УДК 531.36

О СТАБИЛИЗАЦИИ ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЫ

Т.В. Муратова

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва
e-mail: tamura@bk.ru

Исследована возможность и определены условия стабилизации неустойчивой прямолинейной формы вязкоупругого стержня периодически изменяющейся следящей силой.

Ключевые слова: вязкоупругий стержень, периодически изменяющаяся следящая сила, параметрический резонанс.

ON STABILIZATION OF VISCOELASTIC RECTILINEAR ROD BY PERIODICALLY VARYING FOLLOWER FORCE

T.V. Muratova

Bauman Moscow State Technical University, Moscow
e-mail: tamura@bk.ru

The possibility to stabilize the unstable rectilinear form of a viscoelastic rod using the periodically varying follower force is investigated. The stabilization conditions are defined.

Keywords: viscoelastic rod, periodically varying follower force, parametrical resonance.

Эффект дестабилизации малыми диссипативными силами неконсервативной системы, обнаруженный в работах [1, 2], состоит в том, что в пространстве параметров существуют область, где равновесие системы без диссипации устойчиво, а при наличии малой диссипации неустойчиво.

Уравнения движения. На свободный конец консольно закрепленного стержня действует периодически изменяющаяся следящая сила $P_0 + P_1 \cos \omega t$; P_0, P_1 — постоянные величины. Линеаризованное в окрестности прямоугольной формы $y = 0$ уравнение движения стержня с граничными условиями имеет вид

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \nu\frac{\partial^5 y}{\partial t \partial x^4} + (P_0 + P_1 \cos \omega t)\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0; \qquad (1)$$

$$y(0,t) = \frac{\partial y(0,t)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial^2 y(l,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 y(l,t)}{\partial x^3} = 0, \qquad (2)$$

где EI — жесткость сечения стержня при изгибе, m — линейная плотность стержня.

При составлении уравнения (1) использовалось определяющее соотношение модели Кельвина–Фойгта $\sigma = E(e + \nu\dot{e})$, где σ, e, E, ν — соответственно напряжение, деформация, модуль упругости и время релаксации.

Введем безразмерное время $\tau = \omega t$ и вместо x новое переменное $\xi = x\,l^{-1}$. Уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial^4 y}{\partial \xi^4} + \frac{\omega\nu}{EI}\frac{\partial^5 y}{\partial t \partial \xi^4} + \frac{l^2}{EI}\left(P_0 + P_1 \cos\tau\right)\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{m\omega^2 l^4}{EI}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \qquad (3)$$

Решение уравнения (3) может быть сведено к решению системы обыкновенных диффереенциальных урравнений. Будем искать решение уравнения (3) в виде

$$y(\xi,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\tau) z_k(\xi), \qquad (4)$$

где функции $z_k(\xi)$ являются решением краевой задачи

$$\begin{gathered} \frac{d^4 z_k}{d\xi^4} - \lambda_k^2 \mu^2 z_k = 0; \\ z_k(0) = \frac{dz_k}{d\xi}(0) = 0; \qquad \frac{d^2 z_k}{d\xi^2}(1) = \frac{d^3 z_k}{d\xi^3}(1) = 0. \end{gathered} \qquad (5)$$

Здесь $\mu^2 = \dfrac{m\omega^2 l^4}{EI}$ и $\ddot{u}_k + \lambda_k^2 u_k = 0$.

Решение краевой задачи (5) имеет вид

$$z_k(\xi) = \gamma_k(\cos\delta_k\xi - \operatorname{ch}\delta_k\xi) + \operatorname{sh}\delta_k\xi - \sin\delta_k\xi, \qquad (6)$$

где $\gamma_k = \dfrac{\sin\delta_k + \operatorname{sh}\delta_k}{\cos\delta_k + \operatorname{ch}\delta_k}$, $\quad k = 1, 2\ldots$, $\delta_k^2 = \lambda_k\mu$, а δ_k удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{ch}\delta_k \cos\delta_k = -1, \quad k = 1, 2\ldots. \qquad (7)$$

Два наименьших корня уравнения (7) $\delta_1 \simeq 1{,}875$, $\delta_2 \simeq 4{,}694$, тогда $\gamma_1 \simeq 1{,}362$ и $\gamma_2 \simeq 0{,}982$.

Система функций $\{z_k(\xi)\}$ удовлетворяет на отрезке [0,1] условию ортогональности

$$\int_0^1 z_k(\xi) z_m(\xi) d\xi = 0, \quad k \neq m. \qquad (8)$$

Обозначим $a_k = \int_0^1 z_k^2(\xi) d\xi = 0$, $k = m$. Подставляя (4) в уравнение (3), умножая на $z_k(\xi)$ и интегрируя от 0 до 1, учитывая условия ортогональности (8), получаем счетную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Ограничимся системой двух уравнений

$$\begin{aligned}
&\ddot{u}_1 + k\mu^{-2}\delta_1^4\dot{u}_1 + \mu^{-2}\delta_1^4 u_1 + \\
&\qquad + p\mu^{-2}(e_{11}u_1 + e_{21}u_2) + \varepsilon\cos\tau(e_{11}u_1 + e_{21}u_2) = 0; \\
&\ddot{u}_1 + k\mu^{-2}\delta_2^4\dot{u}_2 + \mu^{-2}\delta_2^4 u_2 + \\
&\qquad + p\mu^{-2}(e_{12}u_1 + e_{22}u_2) + \varepsilon\cos\tau(e_{12}u_1 + e_{22}u_2) = 0,
\end{aligned} \tag{9}$$

где $k = \dfrac{\nu\omega}{EI}$, $p = \dfrac{l^2}{EI}P_0$, $\varepsilon = \dfrac{l^2}{EI}\mu^{-2}P_1$.

В системе (9) перейдем к новым переменным V_1, V_2 с помощью линейного преобразования

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}, \; L = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{e_{21}p}{\mu^2\omega_2^2 - \delta_1^4 - pe_{11}} \\ \dfrac{e_{12}p}{\mu^2\omega_1^2 - \delta_2^4 - pe_{22}} & 1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где ω_1, ω_2 удовлетворяют уравнению частот

$$\det \begin{pmatrix} -\omega^2 + \mu^{-2}\delta_1^4 + p\mu^{-2}e_{11} & p\mu^{-2}e_{21} \\ p\mu^{-2}e_{12} & -\omega^2 + \mu^{-2}\delta_2^4 + p\mu^{-2}e_{22} \end{pmatrix} = 0.$$

В переменных V_1, V_2 система (9) примет вид

$$\begin{aligned}
&\ddot{V}_1 + k\sigma(d_{11}^0\dot{V}_1 + d_{21}\dot{V}_2) + \omega_1^2 V_1 + \varepsilon\sigma\cos\tau(e_{11}^0 V_1 + e_{21}^0 V_2) = 0; \\
&\ddot{V}_2 + k\sigma(d_{12}^0\dot{V}_1 + d_{22}\dot{V}_2) + \omega_2^2 V_2 + \varepsilon\sigma\cos\tau(e_{12}^0 V_1 + e_{22}^0 V_2) = 0, \\
&\sigma = \det L^{-1}.
\end{aligned} \tag{11}$$

В (11) коэффициенты d_{ij}^0, e_{ij}^0 выражаются через $e_{ij}, \delta_1, \delta_2, p$ и μ.

Стабилизация прямолинейной формы стержня комбинационным резонансом суммарного типа. При $\varepsilon = 0$, $k = 0$ прямолинейная форма $y(x,t) = 0$ устойчива при $p < p_0 \approx 20{,}15$ [3]. В случае $k > 0$, $\varepsilon = 0$ эта форма асимптотически устойчива при $p < p_1 \approx 9{,}328$ и достаточно малом k. Имеем явление падения критической нагрузки при малой вязкости. Отсюда возникает задача о возможности стабилизации прямолинейной формы стержня в области $p_1 < p < p_0$ при наличии комбинационного резонанса.

Пусть частоты ω_1 и ω_2 удовлетворяют условию $\omega_1 + \omega_2 - 1 = 0$. Предварительно вместо переменных V_1, V_2 в системе (11) введем переменные r_i, φ_i, $i = 1,2$ по формулам $V_i = r_i\sin\varphi_i$, $\dot{V}_i = r_i\omega_i\cos\varphi_i$, $i = 1,2$. Тогда система (11) примет вид

$$
\begin{aligned}
&\dot\varphi_1 = \omega_1 + k\sigma(d^0_{11}\sin\varphi_1\cos\varphi_1 + d^0_{21}r_2r_1^{-1}\omega_2\omega_1^{-1}\sin\varphi_1\cos\varphi_2) + \\
&+ \varepsilon\sigma\omega_1^{-1}(e^0_{11}\sin^2\varphi_1 + e^0_{21}r_2r_1^{-1}\sin\varphi_1\sin\varphi_2)\cos\tau \\
&\dot\varphi_2 = \omega_2 + k\sigma(d^0_{12}r_1r_2^{-1}\omega_1\omega_2^{-1}\sin\varphi_2\cos\varphi_1 + d^0_{22}\sin\varphi_2\cos\varphi_2) + \\
&+ \varepsilon\sigma\omega_2^{-1}(e^0_{12}r_1r_2^{-1}\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + e^0_{22}\sin^2\varphi_2)\cos\tau; \\
&\dot r_1 = -k\sigma(d^0_{11}\cos^2\varphi_1 r_1 + d^0_{21}\omega_2\omega_1^{-1}\cos\varphi_1\cos\varphi_2 r_2) - \\
&- \varepsilon\sigma\omega_1^{-1}(e^0_{11}\sin\varphi_1\cos\varphi_1 r_1 + e^0_{21}\cos\varphi_1\sin\varphi_2 r_2)\cos\tau \\
&\dot r_2 = -k\sigma(d^0_{12}\omega_1\omega_2^{-1}\cos\varphi_1\cos\varphi_2 r_1 + d^0_{22}\cos^2\varphi_2 r_2) - \\
&- \varepsilon\sigma\omega_2^{-1}(e^0_{12}\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + e^0_{22}\sin\varphi_2\cos\varphi_2 r_2)\cos\tau.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Введем расстройку $\Delta = \omega_1 + \omega_2 - 1$, $\Delta \sim \varepsilon$ и, сделав замену переменных $\varphi_1, \varphi_2, \tau \to \varphi_1, \varphi_2, \theta$, $\theta = \varphi_1 + \varphi_2 - \tau$, приведем систему уравнений (12) к виду, в котором резонанс устранен за счет увеличения на единицу числа медленных переменных. Осредняя эту систему по быстрым переменным φ_1 и φ_2, получаем уравнения, описывающие эволюцию медленных переменных, для которых сохранены прежние обозначения

$$
\begin{aligned}
&\dot\theta = \Delta - \frac{1}{4}\varepsilon\sigma e^0_{21}\omega_1^{-1}r_2r_1^{-1}\cos\theta - \frac{1}{4}\varepsilon\sigma e^0_{12}\omega_2^{-1}r_1r_2^{-1}\cos\theta; \\
&\dot r_1 = -\frac{1}{2}k\sigma d^0_{11}r_1 - \frac{1}{4}\varepsilon\sigma\omega_1^{-1}e^0_{21}r_2\sin\theta; \\
&\dot r_2 = -\frac{1}{2}k\sigma d^0_{22}r_2 - \frac{1}{4}\varepsilon\sigma\omega_2^{-1}e^0_{12}r_1\sin\theta.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

На границе устойчивости система (13) имеет ненулевое стационарное решение, которое находится из системы уравнений

$$
\begin{aligned}
&4\Delta - \varepsilon\sigma e^0_{21}\omega_1^{-1}r_2r_1^{-1}\cos\theta - \varepsilon\sigma e^0_{12}\omega_2^{-1}r_1r_2^{-1}\cos\theta = 0; \\
&2kd^0_{11}r_1 + \varepsilon\omega_1^{-1}e^0_{21}r_2\sin\theta = 0; \\
&2kd^0_{22}r_2 + \varepsilon\omega_2^{-1}e^0_{12}r_1\sin\theta = 0.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Условием существования стационарного решения является равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов при r_1 и r_2 во втором и третьем уравнениях

$$
4\omega_1\omega_2k^2\kappa - \varepsilon^2\sin^2\theta = 0,
\tag{15}
$$

где $\kappa = \dfrac{d^0_{11}d^0_{22}}{e^0_{12}e^0_{21}}$. Равенство (15) справедливо только при $\kappa > 0$.

Численный расчет показал, что на резонансной кривой $\omega_1 + \omega_2 - 1 = 0$ выполняется условие $\kappa > 0$ при $p_1 < p < p_0$. Если $0 < p < p_1$, то $\kappa < 0$.

Таким образом, при комбинационном резонансе $\omega_1 + \omega_2 - 1 = 0$ возможна стабилизация прямолинейной формы упруговязкого стержня в области, где без параметрического возбуждения прямолинейная форма неустойчива.

Исключая r_1, r_2 и θ из системы (14), с учетом (15) получаем с точностью до величины ε^2 уравнение границы области устойчивости

$$\varepsilon^2 = 4\omega_1\omega_2\kappa[4\Delta^2\mu^4(\delta_1^4 + \delta_2^4)^{-2} + k^2].$$

Отметим, что случай параметрического возбуждения, когда закрепленный конец стержня совершает вдоль вертикали периодические колебания, рассмотрен в работе [4], где показана возможность стабилизации при комбинационном резонансе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Z i e g l e r H. Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik // Ind.–Arch. – 1952. Bd. 20. H. 1. – S. 49–56.
2. B o l o t i n V. V., Z h i n z h e r N. I. Effects of damping on stability of elastic systems subjected to non-conservative forces // Intern. J. Solids and Structures. – 1969. – Vol. 5. – No. 9. – P. 965–989.
3. Б о л о т и н В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. – М.: Физматгиз, 1961. – 339 с.
4. А г а ф о н о в С. А. Стабилизация параметрическим возбуждением упруговязкого стержня, находящегося под действием следящей силы // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1996. – № 3. – С. 137–141.

Статья поступила в редакцию 21.03.2012

Татьяна Владимировна Муратова — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 20 научных работ в области теории устойчивости.

T.V. Muratova — Ph. D. (Phys.-Math.), assoc. professor of “Mathematical Simulation” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 20 publications in the field of theory of stability.