УДК 519.62

ВРАЩАТЕЛЬНОЕ БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОГО ТЕЛА ПРИ УЧЕТЕ УВЛЕЧЕНИЯ ЧАСТИЦ СРЕДЫ

А.Н. Морозов, **А.В. Скрипкин**

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: amor@mx.bmstu.ru; skripkin@bmstu.ru

Рассмотрено вращательное движение частицы сферической формы, вызванное наличием флуктуирующего момента сил, обусловленного случайными изменениями импульса, который передается частицами вязкой среды изучаемой броуновской частице. Исследование проведено с учетом того, что броуновская частица увлекает окружающие частицы среды. Показано, что в случае больших радиусов частицы соответствующие флуктуации ее угловой скорости относятся к классу немарковских случайных процессов. Определены статистические характеристики флуктуаций угловой скорости и углового ускорения броуновской частицы, включая их характеристические функции и спектральные плотности.

Ключевые слова: вращательное броуновское движение, немарковский процесс, вязкая среда.

ROTATIONAL BROWNIAN MOTION OF A SPHERICAL BODY TAKING INTO ACCOUNT THE CAPTURE OF MEDIUM PARTICLES

A.N. Morozov, **A.V. Skripkin**

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: amor@mx.bmstu.ru; skripkin@bmstu.ru

The rotational motion of a spherical particle is considered which is caused by the presence of the fluctuating force moment induced by random variations in the momentum that is transferred by particles of the viscous medium to the Brownian particle under study. The fact that the Brownian particle captures the surrounding particles of the medium is taken into account during the study. It is shown that in case of large radii of the particle, the appropriate fluctuations of its angular speed relate to the class of non-Markov random processes. Statistical characteristics of fluctuations in angular speed and angular acceleration of the Brownian particle including their characteristic functions and spectral densities are determined.

Keywords: rotational Brownian motion, non-Markov process, viscous medium.

Введение. Как правило, поступательное движение броуновской частицы в вязкой среде описывают в предположении пропорциональности силы сопротивления, действующей на частицу, ее скорости. Случайную силу полагают дельта-коррелированной и имеющей характер белого шума [1]. Такое классическое рассмотрение броуновского движения позволяет получить дифференциальное уравнение движения (уравнение Ланжевена), с помощью которого можно определить любые статистические характеристики флуктуаций импульса и координаты броуновской частицы с использованием хорошо разработанной теории стохастических дифференциальных систем [2].

Случайное вращение броуновской частицы, вызванное флуктуациями тангенциальной составляющей импульса, передаваемого частицами вязкой среды броуновской частице, также обычно описывается с помощью стохастического дифференциального уравнения для момента сил, действующего на броуновскую частицу. В этом случае сопротивление среды полагается пропорциональным угловой скорости вращения [3].

Реальное движение броуновской частицы сопровождается увлечением окружающих ее частиц среды. Это приводит к проявлению наследственных свойств импульса и координаты броуновской частицы. Согласно работе [4], поступательное движение броуновской частицы в вязкой среде, учитывающее указанное взаимодействие этой частицы и окружающих ее частиц, позволяет записать интегральное стохастическое уравнение движения, заменяющее соответствующее ему классическое дифференциальное уравнение Ланжевена. Флуктуации импульса и координаты броуновской частицы становятся немарковскими случайными процессами, а их статистические характеристики существенно отличаются от соответствующих им величин при классическом рассмотрении.

Отметим, что более точное описание многих кинетических процессов (например, теплопроводности или диффузии), учитывающее наследственные свойства среды, также дает возможность записать соответствующие интегральные стохастические уравнения и приводит к немарковскому характеру флуктуаций физических величин [5, 6].

Цель работы — описать модель вращательного движения сферической броуновской частицы, обусловленного флуктуирующим моментом сил со стороны частиц среды, с учетом увлечения броуновской частицей окружающих частиц среды. Такое вращательное броуновское движение также описывается интегральным стохастическим уравнением, а случайное изменение угловой скорости вращения в общем случае является немарковским процессом.

Вращательное броуновское движение. Рассмотрим сферическую броуновскую частицу массой M и радиусом R, находящуюся в вязкой среде с кинематической вязкостью ν и плотностью ρ. Момент инерции такой частицы относительно оси вращения, проходящей через ее центр масс, находится по формуле

$$I = \alpha M R^2 = \frac{4}{3}\alpha \rho_0 R^5,$$

где $\alpha < 1$ — параметр, определяемый характером распределения массы частицы по объему (предположим, что распределение будет симметричным относительно оси вращения); ρ_0 — средняя плотность материала частицы. Уравнение для вращательного движения броуновской частицы имеет вид

$$I\frac{d\Omega(t)}{dt} = M_0(t) + M_r(t) + \xi_M(t), \tag{1}$$

где $\Omega(t)$ — компонента угловой скорости вращения броуновской частицы относительно выбранной оси; $M_0(t)$ — момент детерминированных (остальных) сил, действующих на броуновскую частицу (далее примем, что он равен нулю); $M_r(t)$ — момент силы сопротивления; $\xi_M(t)$ — случайный момент сил.

Классическое описание броуновского вращательного движения предполагает, что момент силы сопротивления пропорционален угловой скорости

$$M_r(t) = -8\pi\rho\nu R^3\Omega\left(t\right). \tag{2}$$

В этом случае в отсутствие остальных сил, действующих на частицу, ее уравнение вращательного движения принимает следующий вид:

$$\frac{d\Omega(t)}{dt} + \frac{8\pi\rho\nu R^3}{I}\Omega\left(t\right) = \frac{1}{I}\xi_M(t). \tag{3}$$

Случайный момент сил $\xi_M(t)$ можно принять белым шумом интенсивностью

$$\sigma = 16\pi\rho\nu R^3 k_B T, \tag{4}$$

где k_B — постоянная Больцмана; T — температура. Среднее значение случайного момента сил $\langle\xi_M\rangle$ равно нулю, а его дисперсия $\langle\xi_M^2\rangle$ может быть представлена выражением, не зависящим от времени:

$$\left\langle\xi_M^2\right\rangle = \frac{\sigma}{\delta t} = \frac{16\pi\rho\nu R^3 k_B T}{\delta t},$$

где δt — характерное время, сопоставимое с временем хаотизации среды (в частности, для газа — это время, близкое к времени соударения молекул [1]). Величина $\Delta\omega = 1/\delta t$ соответствует ширине спектра мощности флуктуаций процесса $\xi_M(t)$.

Одномерную характеристическую функцию $g_1^0\left(\lambda;t\right)$ процесса $\Omega(t)$ можно найти из уравнения (3) с использованием теории стохастических дифференциальных систем [2]:

$$g_1^0\left(\lambda;t\right) = \exp\left[-\frac{\sigma\lambda^2}{16\pi\rho\nu R^3 I}\left(1 - \exp\left(-\frac{16\pi\rho\nu R^3}{I}t\right)\right)\right]. \tag{5}$$

При $t \to \infty$ выражение (5) принимает вид

$$\left.g_1^0\left(\lambda;t\right)\right|_{t\to\infty} = \exp\left(-\frac{\sigma\lambda^2}{16\pi\rho\nu R^3 I}\right);$$

отсюда для дисперсии флуктуаций угловой скорости установившегося процесса вращательного броуновского движения получим

$$\left\langle \Omega^2 (t) \right\rangle \Big|_{t\to\infty} = \frac{\sigma}{8\pi\rho\nu R^3 I} = \frac{2k_B T}{I}. \qquad (6)$$

Из уравнений (3) и (4) можно найти спектральную плотность мощности флуктуаций угловой скорости вращения частицы ω, соответствующую классическому рассмотрению:

$$G_\Omega^0 (\omega) = \frac{1}{I^2}\frac{\sigma}{\omega^2 + (64\pi^2\rho^2\nu^2 R^6)/I^2}. \qquad (7)$$

Из соотношения (7) следует, что при $\omega \to 0$ спектральная плотность стремится к постоянной величине

$$G_\Omega^0 (t) \Big|_{\omega\to 0} = \frac{k_B T}{4\pi\rho\nu R^3}.$$

Учет увлечения среды. Если сферическая частица совершает в вязкой среде колебательное вращательное движение вокруг своего диаметра с частотой ω и угловой скоростью $\Omega(t) = \Omega_0 e^{-i\omega t}$, то в предположении малых чисел Рейнольдса для момента сил $\mu_\omega(t)$, действующих на такую частицу со стороны частиц среды, справедливо выражение [7]

$$\mu_\omega(t) = -\frac{8\pi}{3}\rho\nu R^3 \Omega(t) f\left(\frac{R}{\delta}\right), \qquad (8)$$

где

$$f\left(\frac{R}{\delta}\right) = \frac{3 + 6(R/\delta) + 6(R/\delta)^2 + 2(R/\delta)^3 - 2i(R/\delta)^2(1 + R/\delta)}{1 + 2(R/\delta) + 2(R/\delta)^2}. \qquad (9)$$

Величина

$$\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} \qquad (10)$$

представляет собой характерное расстояние проникания возмущений, создаваемых движущейся сферической частицей в вязкой среде.

Отметим, что из формулы (9) можно вывести классическую зависимость (2) для момента сил сопротивления, если формально принять $\omega = 0$ (соответствует равномерному вращению).

Запишем общее выражение для момента силы сопротивления $M_r(t)$, действующей на броуновскую частицу, если она совершает произвольное вращательное движение с некоторой угловой скоростью $\Omega(t)$. При $t < 0$ среду полагаем невозмущенной. Представим величину $\Omega(t)$ интегралом Фурье:

$$\Omega(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Omega_\omega e^{-i\omega t} d\omega; \quad \Omega_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \qquad (11)$$

Вследствие линейности момент $M_r(t)$ будет определяться как сумма моментов сил сопротивления, действующих на частицу, которая движется с угловой скоростью, равной отдельной компоненте Фурье (11) и определяющейся по (8). Для компоненты $M_{r\omega}$ имеем

$$M_{r\omega} = -\frac{8\pi}{3}\rho\nu R^3 \Omega_\omega e^{-i\omega t} f\left(\frac{R}{\delta}\right). \tag{12}$$

Соотношение (12) зависит от характера функции $f(R/\delta)$, с помощью которой можно при малых или больших значениях параметра R/δ найти соответствующие аналитические выражения для момента сил сопротивления, учитывающие увлечение частиц среды.

Случай больших значений параметра $\boldsymbol{R/\delta}$. Если вращающаяся частица велика по сравнению с характерным расстоянием δ ($R/\delta \gg 1$), то каждый элемент поверхности частицы можно рассматривать как плоский. Сила, действующая на единицу площади колеблющейся по гармоническому закону $V_y = V_{y\omega} e^{-i\omega t}$ плоской поверхности ($x = 0$) в вязкой среде, равна [7]

$$F_\omega = \sqrt{\frac{\omega\nu}{2}}\rho\,(1-i)\,V_y,$$

где $V_y = \Omega R \sin\theta$; θ — полярный угол. Тогда для компоненты $M_{r\omega}$ получим

$$M_{r\omega} = -\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi R^4 \rho\sqrt{\nu\omega}\,(1-i)\,\Omega_\omega e^{-i\omega t}. \tag{13}$$

Тот же результат следует из соотношения (12), если принять

$$f\left(\frac{R}{\delta}\right) = (1-i)\,\frac{R}{\delta}.$$

Если частица вращается с произвольной угловой скоростью $\Omega(t)$, то для момента действующей на нее силы сопротивления с учетом $\left(\dot{\Omega}\right)_\omega = -i\omega\Omega_\omega$ из выражения (13) запишем

$$M_r\,(t) = -\frac{8\sqrt{\pi\nu}}{3}R^4\rho\int\limits_0^t \frac{d\Omega\,(\tau)}{d\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \tag{14}$$

Из формулы (14) можно вывести соотношение для силы сопротивления $F_S\,(t)$, действующей на единицу площади безграничной плоской поверхности, которая движется с произвольной скоростью $V\,(t)$ вдоль оси, лежащей в плоскости. Заменяем величину $\Omega\,(t)$ отношением $V\,(t)\,/\,(R\sin\theta)$, затем находим интеграл $M_r\,(t) = \int\limits_0^\pi 2\pi R^3 F_S\,(t)\sin^3\theta\,d\theta$, приравняем полученное значение $M_r\left(t\right)$ выражению (14) и определяем силу сопротивления

$$F_S(t) = -\rho\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\int\limits_0^t \frac{dV\left(\tau\right)}{d\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \tag{15}$$

Выражение (15) можно получить, решая задачу гидродинамики для одномерного движения плоской поверхности в вязкой среде [7]. Такое движение поверхности с действующей на нее силой трения (15), а также случайной ланжевеновской силой рассмотрено в работе [8]. В настоящей работе показано, что флуктуации скорости поверхности в этом случае представляют собой немарковский случайный процесс, имеющий характер фликкер-шума.

Подставляя (14) в (1), получаем

$$\beta\left(t\right) + \frac{8\sqrt{\pi\nu}}{3I}R^4\rho\int\limits_0^t \frac{\beta\left(\tau\right)d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = \frac{1}{I}\xi_M(t), \tag{16}$$

где $\beta\left(t\right) = d\Omega\left(t\right)/dt$ — угловое ускорение тела.

Формула (16) не сводится к конечной системе дифференциальных операторов, поэтому уравнение динамики вращательного движения частицы оказывается стохастическим интегральным уравнением Вольтерра второго рода, что означает немарковский характер флуктуаций определяемых с его помощью величин, включая угловую скорость и угловое ускорение [9].

Решение уравнения (16) может быть записано с использованием его резольвенты $K(t-\tau)$ [10]:

$$\beta(t) = \frac{1}{I}\xi_M(t) - \int\limits_0^t K(t-\tau)\xi_M(\tau)d\tau, \tag{17}$$

где

$$K(t-\tau) = \frac{1}{t-\tau}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}q_n(t-\tau)^{n/2};\quad q_n = \left(\frac{8\pi}{3}\right)^n \frac{R^{4n}\rho^n\nu^{n/2}}{\Gamma\left(n/2\right)I^{n+1}}. \tag{18}$$

Здесь $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Расчетная зависимость $K(t-\tau)$ приведена на рис. 1. При ее построении было принято, что $R = 10^{-3}$ м, $\rho = 10^3$ кг/м^3, $\nu = 10^{-6}$ м^2/с, $I = (4/3)\alpha\pi\rho_0 R^5$, $\alpha = 1/2$, $\rho_0 = \rho$. С возрастанием разности $t-\tau$ наблюдается резкое уменьшение значения функции $K(t-\tau)$.

Оставляя два первых члена ряда (18), при $t-\tau \ll 1$ для реальных размеров частиц и параметров среды (в частности, для указанных выше) получаем

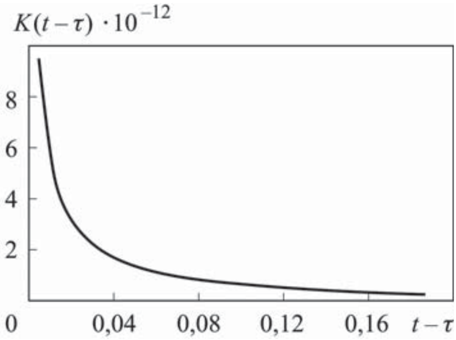

Рис. 1. Расчетная функция $K(t-\tau)$

$$K(t-\tau)=\frac{q_1}{\sqrt{t-\tau}}-q_2=\frac{8\pi R^4\rho\sqrt{\nu}}{3I^2}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi\,(t-\tau)}}-\frac{8\pi R^4\rho\sqrt{\nu}}{3I}\right). \tag{19}$$

Учитывая характер процесса $\xi_M(t)$ и используя метод описания немарковских процессов, задаваемых линейными интегральными преобразованиями, которые приведены в работе [11], определяем статистические характеристики процесса $\beta\,(t)$ (17) с ядром (18) или (19). В частности, для одномерной характеристической функции $g_1\,(\lambda;t)$ такого процесса запишем

$$g_1\,(\lambda;t)=\exp\left[-\frac{1}{2}\sigma\lambda^2\left(\frac{\langle\xi_M^2\rangle}{I^2\sigma}+q_1^2\ln\frac{t}{\delta t}+4\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{q_1q_n}{n-1}t^{(n-1)/2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\,2\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty}(-1)^{n+m}\,\frac{q_nq_m}{n+m-2}t^{(n+m-2)/2}\right)\right]. \tag{20}$$

При вычислении $g_1\,(\lambda;t)$ (20) было принято, что $\int\limits_0^t\delta^2\,(t-\tau)\,d\tau=1/\delta t$. Ввиду того, что суммы в (20) быстро сходятся, основной вклад в показатель экспоненты вносят первые два слагаемых (не зависящее от времени и зависящее от него логарифмически). Таким образом, можно записать

$$g_1\,(\lambda;t)\approx\exp\left[-\frac{1}{2}\lambda^2\left(\frac{\langle\xi_M^2\rangle}{I^2}+\sigma q_1^2\ln\frac{t}{\delta t}\right)\right]. \tag{21}$$

Зависимости $g_1(\lambda;t)$ для различных значений t приведены на рис. 2. Функция $g_1\,(\lambda;t)$ имеет характер гауссовой кривой.

Из соотношения (20) для математического ожидания $\langle\beta\,(t)\rangle$ и дисперсии $\langle\beta^2\,(t)\rangle$ флуктуаций углового ускорения вращающейся броуновской частицы имеем

$$\langle\beta\,(t)\rangle=\left.\frac{\partial g_1\,(\lambda;t)}{i\partial\lambda}\right|_{\lambda=0}=0;$$

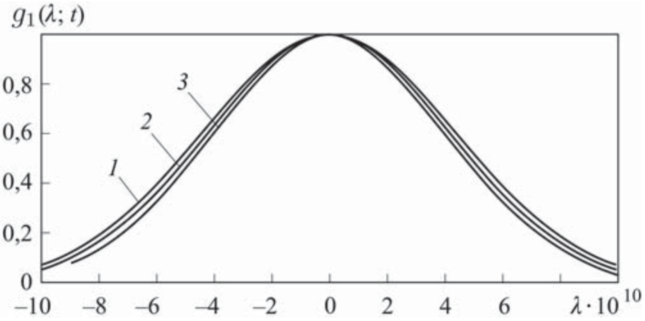

Рис. 2. Зависимость $g_1(\lambda; t)$ для $t = 0{,}01$ (*1*), 0,05 (*2*) и 0,3 с (*3*)

$$\left\langle \beta^2(t) \right\rangle = -\left.\frac{\partial^2 g_1(\lambda; t)}{\partial \lambda^2}\right|_{\lambda=0} =$$
$$= \frac{\langle \xi_M^2 \rangle}{I^2} + \sigma q_1^2 \ln \frac{t}{\delta t} + 4\sigma \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{q_1 q_n}{n-1} t^{(n-1)/2} +$$
$$+ 2\sigma \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} (-1)^{n+m} \frac{q_n q_m}{n+m-2} t^{(n+m-2)/2}.$$

Учитывая (21), получаем

$$\left\langle \beta^2(t) \right\rangle \approx \frac{\langle \xi_M^2 \rangle}{I^2} + \sigma q_1^2 \ln \frac{t}{\delta t}. \tag{22}$$

Согласно (22), учет увлечения броуновской частицей окружающих ее частиц среды приводит к добавлению к слагаемому, не зависящему от времени, слагаемого, которое изменяется с течением времени по закону, близкому к логарифмическому. В частности, это приводит к следующему заключению: экспериментальные наблюдения, проводимые, как правило, при $t \gg \delta t$, могут не зафиксировать изменения дисперсии углового ускорения частицы с течением времени.

Найдем спектральные плотности мощности флуктуаций $\beta(t)$ и $\Omega(t)$ установившегося процесса вращения частицы (при $t \to \infty$), для чего выполним преобразование Лапласа исходного уравнения (19). Для соответствующих образов $\hat{\beta}(t)$ и $\hat{\Omega}(t)$ запишем

$$\hat{\beta}(p) = p\hat{\Omega}(p) = \frac{1}{I} \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p} + (8\pi R^4 \rho \sqrt{\nu})/(3I)} \hat{\xi}_M(p), \tag{23}$$

где $\hat{\xi}_M(p)$ — образ случайного момента силы сопротивления. Выражение (23) позволяет вывести следующее соотношение для спектральных плотностей:

$$G_\Omega(\omega) = \frac{G_\beta(\omega)}{\omega^2} = \frac{1}{I^2} \frac{\sigma}{\omega \left(\omega + \dfrac{8\pi R^4 \rho \sqrt{2\nu\omega}}{3I} + \dfrac{64\pi^2 R^8 \rho^2 \nu}{9I^2} \right)}. \tag{24}$$

Из формулы (24) следует, что при малых частотах ($\omega \ll 1$) спектральная плотность мощности флуктуации угловой скорости броуновской частицы $G_\Omega(\omega)$ обратно пропорциональна частоте. Это свидетельствует о том, что такие флуктуации в низкочастотной области спектра имеют характер фликкер-шума. Графики спектральных плотностей $G_\Omega(\omega)$ и $G_\Omega^0(\omega)$, задаваемых соотношениями (24) и (7) (для указанных выше значений параметров), приведены на рис. 3. В области больших частот спектральные плотности в обоих случаях совпадают.

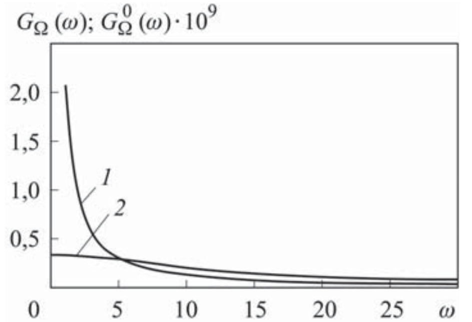

Рис. 3. Спектральные плотности $G_\Omega(\omega)$ (*1*) и $G_\Omega^0(\omega)$ (*2*), задаваемые соотношениями (24) и (7)

Случай малых значений параметра R/δ. Для вращательного броуновского движения микрочастиц (микронного и субмикронного размера) параметр R/δ можно полагать малым для всех сред. Тогда функция $f(R/\delta)$ принимает вид

$$f\left(\frac{R}{\delta}\right) = 3 - 2i\left(\frac{R}{\delta}\right)^2. \qquad (25)$$

После подстановки (25) в (12) с учетом (10) имеем

$$M_{r\omega} = -\frac{8\pi}{3}\rho\nu R^3 \Omega_\omega e^{-i\omega t}\left(3 - \frac{iR^2\omega}{\nu}\right). \qquad (26)$$

Используя $\left(\dot{\Omega}\right)_\omega = -i\omega\Omega_\omega$, из (26) найдем

$$M_{r\omega} = -\frac{8\pi}{3}\rho\nu R^3 e^{-i\omega t}\left(3\Omega_\omega + \frac{R^2}{\nu}\left(\dot{\Omega}\right)_\omega\right). \qquad (27)$$

Интегрирование (27) позволяет записать окончательное выражение для момента сил сопротивления, действующих на микрочастицу, произвольно вращающуюся вокруг одного из диаметров в вязкой среде:

$$M_r(t) = -8\pi\rho\nu R^3\left(\Omega(t) + \frac{R^2}{3\nu}\frac{d\Omega(t)}{dt}\right). \qquad (28)$$

Согласно (28), момент силы сопротивления, действующей на частицу малого радиуса, определяется двумя слагаемыми. Первое из них пропорционально угловой скорости частицы и соответствует классическому случаю, когда не учитывается влияние возмущенного движения среды на частицу. Второе слагаемое, в которое входит производная угловой скорости частицы, обусловлено инерционными свойствами среды и быстро возрастает с увеличением радиуса частицы. В отличие от случая частиц большого радиуса (выражение (14)), формула для момента $M_r(t)$ (28) не содержит интегрального оператора, что свидетельствует об исчезновении влияния памяти среды на вращение частицы с уменьшением ее радиуса. Данный факт вызван значительным влиянием инерции среды на характер движения частицы, по сравнению с влиянием созданного им возмущения среды, которое мало́ при небольших значениях параметра R/δ.

Подставляя (26) в (1), получаем

$$\left(1+\frac{2\rho}{\alpha\rho_0}\right)\frac{d\Omega(t)}{dt}+\frac{8\pi\rho\nu R^3}{I}\Omega\left(t\right)=\frac{1}{I}\xi_M(t). \tag{29}$$

Выражение (29) показывает, что влияние увлечения микрочастицей окружающей ее среды эквивалентно добавлению к моменту инерции частицы некоторого дополнительного “эффективного” момента инерции $\dfrac{2\rho}{\alpha\rho_0}I$. Формула (29) переходит в классическое выражение (3) при $\rho/\rho_0 \ll 1$, тогда фактически инертностью среды можно пренебречь.

Аналогично соотношениям (6) и (7), получаемым при классическом описании вращательного броуновского движения, в рассматриваемом случае находим выражения для дисперсии и спектральной плотности флуктуаций угловой скорости

$$\left.\left\langle\Omega^2\left(t\right)\right\rangle\right|_{t\to\infty}=\frac{\sigma}{8\pi\rho\nu R^3 I\left(1+2\rho/(\alpha\rho_0)\right)}=\frac{2k_BT}{I\left(1+2\rho/(\alpha\rho_0)\right)};$$

$$G_\Omega\left(\omega\right)=\frac{\sigma}{I^2\left(1+2\rho/(\alpha\rho_0)\right)^2\omega^2+64\pi^2\rho^2\nu^2R^6}.$$

Таким образом, учет увлечения микрочастицей окружающих ее частиц вязкой среды приводит к уменьшению масштаба флуктуаций угловой скорости, что обусловлено наличием инертности среды.

Заключение. Рассмотренная модель вращательного броуновского движения сферического тела, учитывающая увлечение им окружающих частиц вязкой среды, приводит к существенному отличию статистических характеристик такого движения от стохастических характеристик, полученных при классическом описании движения, в котором учет взаимодействия со средой осуществлялся введением линейного по угловой скорости момента силы сопротивления. В частности, флуктуации больших частиц становятся немарковскими (в области низких частот имеют характер фликкер-шума), а особенности статистических характеристик вращения микрочастиц сильно зависят от инертных свойств среды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Климонтович Ю. Л.* Статистическая физика. М.: Наука, 1982. 608 с.
2. *Пугачев В.С.*, *Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука, 1990. 632 с.
3. *Валиев К.А.*, *Иванов Е.Н.* Вращательное броуновское движение // Успехи физических наук. 1973. Т. 109. С. 31–64.
4. *Morozov A.N.*, *Skripkin A.V.* Spherical particle Brownian motion in viscous medium as non-Markovian random process // Physics Letters A. 2011. Vol. 375. P. 4113–4115.
5. *Морозов А.Н.*, *Скрипкин А.В.* Распространение тепла в пространстве вокруг цилиндрической поверхности как немарковский случайный процесс // Инженерно-физический журнал. 2011. Т. 84. № 6. С. 1121–1127.
6. *Морозов А.Н.*, *Скрипкин А.В.* Описание испарения сферической частицы жидкости как немарковского случайного процесса с использованием интегральных стохастических уравнений // Известия вузов. Сер. Физика. 2010. № 11. С. 55–64.
7. *Ландау Л.Д.*, *Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
8. *Морозов А.Н.*, *Скрипкин А.В.* Применение уравнения Вольтерра второго рода для описания вязкого трения и теплопроводности // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2006. № 3. С. 62–71.
9. *Морозов А.Н.* Необратимые процессы и броуновское движение. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. 332 с.
10. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 304 с.
11. *Морозов А.Н.* Метод описания немарковских процессов, задаваемых линейным интегральным преобразованием // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2004. № 3. С. 47–56.

REFERENCES

[1] Klimontovich Yu.L. Statisticheskaya fizika [Statistical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 608 p.

[2] Pugachev V.S., Sinitsyn I.N. Stokhasticheskie differentsial’nye sistemy [Stochastic differential systems]. Moscow, Nauka Publ., 1990. 632 p.

[3] Valiev K.A., Ivanov E.N. The rotational Brownian motion. *Usp. Fiz. Nauk* [Prog. Phys. Sci.], 1973, vol. 109, pp. 31–64 (in Russ.).

[4] Morozov A.N., Skripkin A.V. Spherical particle Brownian motion in viscous medium as non-Markovian random process. *Phys. Lett. A.*, 2011, vol. 375, pp. 4113–4115.

[5] Morozov A.N., Skripkin A.V. Heat distribution around the cylindrical surface as a non-Markovian random process. *Inzh.-Fiz. Zh.* [J. Eng. Phys.], 2011, vol. 84, no. 6, pp. 1121–1127 (in Russ.).

[6] Morozov A.N., Skripkin A.V. The description of evaporation of a spherical fluid particle as a non-Markovian random process using stochastic integral equations. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Fizika.* [Proc. Univ., Physics], 2010, no. 11, pp. 55–64 (in Russ.).

[7] Landau L.D., Lifshits E.M. Gidrodinamika [Hydrodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 736 p.

[8] Morozov A.N., Skripkin A.V. Application of the Volterra equation of the second kind for the description of the viscous friction and thermal conductivity. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2006, no. 3, pp. 62–71 (in Russ.).

[9] Morozov A.N. Neobratimye protsessy i brounovskoe dvizhenie [Irreversible processes and Brownian motion]. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 1997. 332 p.

[10] Volterra V. Teoriya funktsionalov, integral’nykh i integrodifferentsial’nykh uravneniy [Functional theory, integral and integro-differential equations]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 304 p.

[11] Morozov A.N. A method for describing non-Markovian processes using a linear integral transform. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2004, no. 3, pp. 47–56 (in Russ.).

Статья поступила в редакцию 14.06.2013

Андрей Николаевич Морозов — д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 200 научных работ в области прецизионных измерений и физической кинетики.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

A.N. Morozov (b. 1959) — Dr. Sci. (Phys.-Math.), professor, head of “Physics” department of the Bauman Moscow Technical University. Author of more than 200 publications in the field of high precision measuring and physical kinetics.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005 Russia.

Алексей Владимирович Скрипкин — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 30 работ в области физической кинетики и электродинамики сплошных сред.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

A.V. Skripkin (b. 1983) — Ph. D. (Phys.-Math.), assoc. professor of “Physics” department of the Bauman Moscow Technical University. Author of more than 30 publications in the field of physical kinetics and condensed matter electrodynamics.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005 Russia.