УДК 539.3

ОБОБЩЕННАЯ ТРЕХМЕРНАЯ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ ТЕЛ. ЧАСТЬ 1: КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

Ю.И. Димитриенко

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

Проблема расчета устойчивости упругих конструкций — одна из основных задач механики деформируемых тел. Традиционные методы расчета конструкций на устойчивость основаны на использовании теории двумерных оболочечных конструкций, как правило, классической теории Кирхгофа–Лява. Разработка методов решения трехмерных задач теории устойчивости позволила бы расширить круг решаемых задач устойчивости и повысить точность получаемых решений. В.В. Новожилов одним из первых вывел уравнения теории устойчивости из общей нелинейной теории упругости для частной модели среды. Цель настоящей работы — вывод обобщенных трехмерных уравнений теории устойчивости нелинейно-упругих тел с конечными деформациями для широкого класса моделей нелинейной упругости. Для решения поставленной задачи применен перспективный с точки зрения общности и универсальности метод варьированной конфигурации, использованный А.И. Лурье, а также универсальный метод представления моделей нелинейно-упругих сред на основе сопряженных энергетических пар тензоров напряжений–деформаций, предложенный ранее автором. Показано, что для двух из этих пар тензоров соотношения теории устойчивости допускают явное аналитическое представление, не требующее использования процедуры вычисления собственных значений тензора искажений. Результаты исследования расширяют знания о фундаментальных соотношениях механики деформируемых сред и составляют теоретическую основу для расчета на устойчивость сложных конструкций, в том числе не являющихся тонкостенными.

Ключевые слова: трехмерная теория устойчивости, энергетические тензоры напряжений и деформаций, конечные деформации.

GENERALIZED THREE-DIMENSIONAL THEORY OF ELASTIC BODIES STABILITY. PART 1: FINITE DEFORMATIONS

Yu.I. Dimitrienko

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: dimit.bmstu@gmail.com

A problem of analysis of elastic structure stability is one of main problems in mechanics of deformable solids. Traditional methods of structure stability analysis are based on applying the theory of two-dimensional shell structures, as a rule, the classical Kirchhoff–Love theory. The development of methods for solving three-dimensional problems of the stability theory could allow us to expand a range of stability problems which can be solved and to increase the accuracy of obtained solutions. V.V. Novozhilov was one of the first investigators who derived equations of the stability theory from the general nonlinear elasticity theory for the particular case of a continuum. The purpose of the present work is the derivation of generalized three-dimensional equations of the stability theory of nonlinearly elastic bodies with finite deformations for a wide class of nonlinear elasticity models. In order to achieve *this aim, two approaches have been applied: the method of a varied configuration (used by A.I. Lurier), which is promising from the viewpoint of generality and universality, as well as the universal method (developed by the author of this paper earlier) for representation of nonlinearly elastic continua models on the basis of energetic pairs of stress and strain tensors. It is shown that for two of the tensor pairs, the stability-theory relationships admit explicit analytical representation without calculation of eigenvalues of the stretch tensor. The results of the study expand the knowledge on fundamental relations of mechanics of deformable continua and represent a theoretical basis for analysis of stability of complex structures including those which are not thin-walled structures.*

Keywords: three-dimensional theory of elastic stability, energetic pairs of stress and strain tensors, finite deformations.

Введение. Проблема расчета устойчивости упругих конструкций — одна из основных задач механики деформируемых тел. Традиционные существующие методы расчета конструкций на устойчивость основаны на использовании теории двумерных оболочечных конструкций, главным образом, на классической теории Кирхгофа–Лява, в которой вводятся дополнительные нагрузки, вызванные наличием "основного" устойчивого напряженного состояния оболочки [1–6]. Уравнения теории устойчивости оболочек в рамках малых деформаций для различных частных случаев, как правило, выводят эмпирически с помощью гипотез и допущений [1–7]. Это связано с тем, что формально уравнения теории устойчивости даже для сред с малыми деформациями получают из общих нелинейных уравнений теории упругости с конечными деформациями, которые в общей постановке достаточно сложны и во многом неоднозначны [8–11]. Это касается различных вариантов возможных моделей нелинейно-упругих сред, которых существует достаточно много, и нет ясности, какие из них предпочтительнее использовать. Вследствие этих проблем эмпирический подход вывода уравнений теории устойчивости получил наибольшее распространение. Однако в последнее время в связи с развитием мощных вычислительных систем, использующих методы конечного элемента, возник интерес к трехмерным задачам теории устойчивости, освоение которых позволило бы расширить круг решаемых задач и повысить точность решений [11–13]. В настоящее время число публикаций, посвященных трехмерным задачам устойчивости, весьма ограничено. Первым уравнения теории устойчивости из общей нелинейной теории упругости, используя при этом один из возможных ее вариантов на основе компонент тензора деформаций Коши–Грина, вывел В.В. Новожилов [8]. Однако до сих пор не ясен следующий вопрос: каковы будут уравнения теории устойчивости, если использовать другие модели нелинейной теории упругости? Некоторые оригинальные подходы к выводу трехмерных уравнений устойчивости рассмотрены в работах А.Н. Гузя [11].

Цель данной работы — вывод обобщенных трехмерных уравнений теории устойчивости нелинейно-упругих тел с конечными деформациями для широкого класса моделей нелинейной упругости. Для этого применен перспективный с точки зрения общности и универсальности метод варьированной конфигурации, использованный А.И. Лурье [9], а также универсальный метод представления моделей нелинейно-упругих сред на основе сопряженных энергетических пар тензоров напряжений–деформаций, предложенный ранее автором данной работы [14, 15].

Варьированная конфигурация. Рассмотрим общий случай конечных деформаций упругих твердых сред [16]. Наряду с актуальной конфигурацией K твердой среды в момент времени t введем еще одну актуальную конфигурацию $\widehat{K}$, которую назовем варьированной [9]. Указанная конфигурация отличается от истинной конфигурации K на "малое перемещение". Конфигурация $\widehat{K}$ используется для поиска возможного не единственного решения, факт существование которого означает возникновение неустойчивости тела. Радиус-вектор $\widehat{\mathbf{x}}$ материальной точки M в конфигурации $\widehat{K}$ связан с радиус-вектором $\mathbf{x}$ той же точки соотношением

$$\widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \delta\mathbf{x}, \tag{1}$$

где $\delta\mathbf{x}$ — вариация радиус-вектора. Найдем эту вариацию. Пусть $f(\xi)$ — гладкая скалярная функция, определенная на отрезке $0 \leq \xi \leq \xi_m$, тогда в малой окрестности точки $\xi = 0$ эту функцию можно представить линейной зависимостью вида $f(\xi) = f(0) + \xi f_\xi(0)$, где $f_\xi(0)$ — производная функции в нуле, $f_\xi(0) = \dfrac{df}{d\xi}(0) = \lim\limits_{\xi\to 0} \dfrac{f(\xi) - f(0)}{\xi}$. С учетом этого представления рассмотрим радиус-вектор $\widehat{\mathbf{x}}$ как функцию не только лагранжевых координат X^i материальной точки и времени t, но и как функцию дополнительного скалярного параметра ξ (фиктивное время). Будем полагать, что такая функция линейна:

$$\widehat{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{x}(X^i, t, \xi) = \mathbf{x}(X^i, t, 0) + \xi\mathbf{w}(X^i, t), \tag{2}$$

где

$$\mathbf{x}(X^i, t, 0) = \mathbf{x}(X^i, t); \quad \mathbf{w} \equiv \frac{d}{d\xi}\mathbf{x}(X^i, t, \xi)\,|_{\xi=0}. \tag{3}$$

Сравнивая (1) и (2), находим вариацию радиус-вектора $\delta\mathbf{x}$ как линейную функцию параметра ξ:

$$\delta\mathbf{x} = \xi\mathbf{w}. \tag{4}$$

Примем, что положение тела в актуальной конфигурации K известно (известен радиус-вектор $\mathbf{x}$), следовательно, задача теории устойчивости заключается в нахождении варьированной конфигурации $\widehat{K}$, т.е. в определении вектора $\mathbf{w}$ (или $\delta\mathbf{x}$ (4)).

Кинематика варьированной конфигурации. Продифференцировав (2) по параметру X^i, получим локальные векторы базиса в конфигурации $\widehat{K}$:

$$\widehat{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial \widehat{\mathbf{x}}}{\partial X^i} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X^i} + \xi \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial X^i} = \mathbf{r}_i + \xi \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial X^i} = \mathbf{r}_i \cdot (\mathbf{E} + \xi \nabla \otimes \mathbf{w}), \tag{5}$$

где ∇ — набла-оператор в конфигурации K. Для локальных векторов $\widehat{\mathbf{r}}_i$ в точке $\xi = 0$ также можно использовать линейное представление вида (2)

$$\widehat{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_i + \xi \mathbf{r}_{i\xi}; \quad \mathbf{r}_{i\xi} \equiv \frac{d}{d\xi} \mathbf{r}_i \,|_{\xi=0}. \tag{6}$$

Сравнивая (5) и (6), определяем

$$\mathbf{r}_{i\xi} = \mathbf{r}_i \cdot \nabla \otimes \mathbf{w}. \tag{7}$$

Выражения для векторов взаимного базиса $\widehat{\mathbf{r}}^i$ имеют вид

$$\widehat{\mathbf{r}}^i = \mathbf{r}^i - \xi \mathbf{r}^i \cdot \nabla \otimes \mathbf{w}^{\mathrm{т}}. \tag{8}$$

Истинность выражения (8) можно проверить вычислением скалярного произведения:

$$\widehat{\mathbf{r}}_i \cdot \widehat{\mathbf{r}}^j = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}^j + \xi \mathbf{r}_i \cdot \nabla \otimes \mathbf{w} \cdot \mathbf{r}^j - \xi \mathbf{r}_i \cdot \nabla \otimes \mathbf{w} \cdot \mathbf{r}^j + \\ + \xi^2 \mathbf{r}_i \cdot \nabla \otimes \mathbf{w} \cdot \nabla \otimes \mathbf{w} \cdot \mathbf{r}^j = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}^j = \delta_i^j. \tag{9}$$

В (9) можно пренебречь слагаемым при ξ^2. Записывая представление вида (2) для векторов $\widehat{\mathbf{r}}^i$ в окрестности точки $\xi = 0$, находим

$$\widehat{\mathbf{r}}^i = \mathbf{r}^i + \xi \mathbf{r}^i_\xi, \quad \mathbf{r}^i_\xi \equiv \frac{d}{d\xi} \widehat{\mathbf{r}}^i \,|_{\xi=0}. \tag{10}$$

Сравнивая (10) с (8), получаем

$$\mathbf{r}^i_\xi = -\mathbf{r}^i \cdot \nabla \otimes \mathbf{w}^{\mathrm{т}}. \tag{11}$$

Таким образом, формулы (7) и (11) позволяют выразить вариации локальных векторов базиса $\delta \mathbf{r}_i$ и $\delta \mathbf{r}^i$ через градиент $\nabla \otimes \mathbf{w}$:

$$\widehat{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_i + \delta \mathbf{r}_i; \quad \widehat{\mathbf{r}}^i = \mathbf{r}^i + \delta \mathbf{r}^i; \quad \delta \mathbf{r}_i = \xi \mathbf{r}_{i\xi}; \quad \delta \mathbf{r}^i = \xi \mathbf{r}^i_\xi. \tag{12}$$

Далее все формулы для вариаций тензоров деформации и напряжений имеют аналогичный вид, поэтому для нахождения этих вариаций достаточно ограничиться определением производных по параметру ξ, которые назовем конвективными производными, так как они характеризуют изменение величин в точке M при переходе из конфигурации K в конфигурацию $\widehat{K}$.

Конвективная производная градиента деформации. Градиент деформации $\widehat{\mathbf{F}}$ в конфигурации $\widehat{K}$ определяем по аналогии с градиентом деформации в конфигурации K: $\widehat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{r}}_i \otimes \overset{0}{\mathbf{r}}{}^i$, где $\overset{0}{\mathbf{r}}{}^i$ — локальные векторы взаимного базиса в отсчетной конфигурации $\overset{0}{K}$. Тогда с учетом (6) и (7) для градиента деформации $\widehat{\mathbf{F}}$ получаем линейное представление в окрестности точки $\xi = 0$:

$$\widehat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{r}}_i \otimes \overset{0}{\mathbf{r}}{}^i = \mathbf{r}_i \otimes \overset{0}{\mathbf{r}}{}^i + \xi \nabla \otimes \mathbf{w}^{\text{т}} \cdot \mathbf{r}_i \otimes \overset{0}{\mathbf{r}}{}^i = \mathbf{F} + \xi \nabla \otimes \mathbf{w}^{\text{т}} \cdot \mathbf{F}; \qquad (13)$$

$$\mathbf{F}_\xi = \frac{d}{d\xi} \widehat{\mathbf{F}} \,|_{\xi=0} = \nabla \otimes \mathbf{w}^{\text{т}} \cdot \mathbf{F} = \overset{0}{\nabla} \otimes \mathbf{w}^{\text{т}}, \qquad (14)$$

где $\overset{0}{\nabla}$ — набла-оператор в отсчетной конфигурации $\overset{0}{K}$. Обратный градиент деформации $\widehat{\mathbf{F}}^{-1}$ в конфигурации $\widehat{K}$ найдем по (10) и (11):

$$\widehat{\mathbf{F}}^{-1} = \overset{0}{\mathbf{r}}_i \otimes \widehat{\mathbf{r}}^i = \overset{0}{\mathbf{r}}_i \otimes \mathbf{r}^i - \overset{0}{\mathbf{r}}_i \otimes \mathbf{r}^i \cdot \nabla \otimes \mathbf{w}^{\text{т}} = \mathbf{F}^{-1} - \mathbf{F}^{-1} \cdot \nabla \otimes \mathbf{w}^{\text{т}}; \quad (15)$$

$$\mathbf{F}_\xi^{-1} = \frac{d}{d\xi} \widehat{\mathbf{F}}^{-1} \,|_{\xi=0} = -\mathbf{F}^{-1} \cdot \nabla \otimes \mathbf{w}^{\text{т}}. \qquad (16)$$

Производную гладких скалярных функций $\Phi_1(\widehat{\mathbf{F}})$ и $\Phi_2(\widehat{\mathbf{F}})$ по параметру ξ вычисляем по формулам

$$\Phi_1(\mathbf{F})_\xi = \frac{d}{d\xi} \Phi_1(\widehat{\mathbf{F}}) \,|_{\xi=0} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \widehat{\mathbf{F}}} \,|_{\xi=0} \cdot \cdot \mathbf{F}_\xi^{\text{т}}; \qquad (17)$$

$$(\Phi_1 \Phi_2)_\xi = \frac{d}{d\xi} (\widehat{\Phi}_1 \widehat{\Phi}_2) \,|_{\xi=0} = \Phi_{1\xi} \widehat{\Phi}_2 \,|_{\xi=0} + \widehat{\Phi}_1 \,|_{\xi=0} \Phi_{2\xi} = \Phi_{1\xi} \Phi_2 + \Phi_1 \Phi_{2\xi}. \qquad (18)$$

В частности, выбирая функцию $\Phi_1 = \sqrt{\mathrm{g}/\overset{0}{\mathrm{g}}}$, где $\mathrm{g} = \det(\mathrm{g}_{ij})$ и $\overset{0}{\mathrm{g}} = \det(\overset{0}{g}_{ij})$ — детерминанты метрических матриц $\overset{0}{\mathrm{g}}_{ij} = \overset{0}{\mathbf{r}}_i \cdot \overset{0}{\mathbf{r}}_j$, $\mathrm{g}_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j$, с учетом уравнения неразрывности в лагранжевом описании ($\sqrt{\mathrm{g}/\overset{0}{\mathrm{g}}} = \det \widehat{\mathbf{F}}$) определяем [16]

$$\Bigl(\sqrt{\mathrm{g}/\overset{0}{\mathrm{g}}}\Bigr)_\xi = \frac{\partial}{\partial \widehat{\mathbf{F}}} \Bigl(\sqrt{\mathrm{g}/\overset{0}{\mathrm{g}}}\Bigr)_{\xi=0} \cdot \cdot \mathbf{F}_\xi^{\text{т}} = \frac{\partial \det \widehat{\mathbf{F}}}{\partial \widehat{\mathbf{F}}} \,|_{\xi=0} \cdot \cdot (\mathbf{F}^{\text{т}} \cdot \nabla \otimes \mathbf{w}) =$$
$$= (\det \widehat{\mathbf{F}})_{\xi=0} \widehat{\mathbf{F}}^{-1\text{т}} \,|_{\xi=0} \cdot F^{\text{т}} \cdot \cdot \nabla \otimes \mathbf{w} = \sqrt{\mathrm{g}/\overset{0}{\mathrm{g}}} \, \nabla \cdot \mathbf{w}, \quad (19)$$

поскольку $\widehat{\mathbf{F}} \,|_{\xi=0} = \mathbf{F}$.

Конвективная производная тензоров деформации Коши–Грина и Альманзи. По формулам (17) и (18) можно вычислить конвективную производную без использования варьированной конфигурации $\widehat{K}$, а непосредственно по формальным правилам дифференцирования тензоров по фиктивному времени, за которое принят параметр ξ. С помощью формул (14) и (16) находим конвективные производные правых тензоров деформации Коши–Грина и Альманзи, определяемых по соотношениям $\mathbf{C} = \overset{\mathrm{V}}{\mathrm{C}} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{F}^{\text{т}} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{E})$ и $\boldsymbol{\Lambda} \equiv \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{C}} = -\dfrac{1}{2}(\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-\text{т}} - \mathbf{E})$:

$$\boldsymbol{\Lambda}_\xi = -\frac{1}{2}(\mathbf{F}_\xi^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-1\text{т}} + \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}_\xi^{-1\text{т}}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-1} \cdot \nabla \otimes \mathbf{w}^{\text{т}} \cdot \mathbf{F}^{-1\text{т}} + \mathbf{F}^{-1} \cdot \nabla \otimes \mathbf{w} \cdot \mathbf{F}^{-1\text{т}}) = \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{F}^{-1\text{т}} = \overset{0}{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\mathbf{w}); \tag{20}$$

$$\mathbf{C}_\xi = \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{C}}_\xi = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{\text{т}} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{E})_\xi = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_\xi^{\text{т}} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^{\text{т}} \cdot \mathbf{F}_\xi) =$$

$$= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{\text{т}} \cdot \nabla \otimes \mathbf{w} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^{\text{т}} \cdot \nabla \otimes \mathbf{w}^{\text{т}} \cdot \mathbf{F}) = \mathbf{F}^{\text{т}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{F} = \overset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{w}), \tag{21}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})$, $\overset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{w})$, $\overset{0}{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\mathbf{w})$ — тензоры линейной деформации,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) &= \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{w} + \nabla \otimes \mathbf{w}^{\text{т}}); \\ \overset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{w}) &= \frac{1}{2}(\overset{0}{\nabla} \otimes \mathbf{w} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^{\text{т}} \cdot \overset{0}{\nabla} \otimes \mathbf{w}^{\text{т}}); \\ \overset{0}{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\mathbf{w}) &= \frac{1}{2}(\mathbf{U}^{-2} \cdot \overset{0}{\nabla} \otimes \mathbf{w} \cdot \mathbf{F}^{-1\text{т}} + \mathbf{F}^{-1} \cdot \overset{0}{\nabla} \otimes \mathbf{w}^{\text{т}} \cdot \mathbf{U}^{-2}). \end{aligned} \tag{22}$$

Конвективные производные левых тензоров деформации Коши–Грина и Альманзи, вычисляемых по $\mathbf{J} = \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{A}} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{\text{т}} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{\text{т}})$ и $\mathbf{A} \equiv \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{A}} = -\dfrac{1}{2}(\mathbf{F}^{-1\text{т}} \cdot \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-1\text{т}} \cdot \mathbf{F}^{-1})$, находим аналогично конвективным производным правых тензоров деформаций (20) и (21) [16]:

$$\mathbf{J}_\xi = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_\xi \cdot \mathbf{F}^{\text{т}} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}_\xi^{\text{т}}) = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{w}^{\text{т}} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{\text{т}} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{\text{т}} \cdot \nabla \otimes \mathbf{w}) = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{w}), \tag{23}$$

$$\mathbf{A}_\xi = -\frac{1}{2}(\mathbf{F}_\xi^{-1\text{т}} \cdot \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-1\text{т}} \cdot \mathbf{F}_\xi^{-1}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{w} \cdot \mathbf{F}^{-1\text{т}} \cdot \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-1\text{т}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \nabla \otimes \mathbf{w}^{\text{т}}) = \mathbf{V}^{-2} \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{V}^{-2}. \tag{24}$$

В (23) и (24) введен еще один тензор линейной деформации:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{w}^{\text{т}} \cdot \mathbf{V}^2 + \mathbf{V}^2 \cdot \nabla \otimes \mathbf{w}), \tag{25}$$

где $\mathbf{V}^2$ — левый тензор искажений, $\mathbf{V}^2 = \mathbf{F}^{-1\text{т}} \cdot \mathbf{F}^{-1}$. Согласно принятой в работе [9] классификации, тензоры $\boldsymbol{\Lambda}$ и $\mathbf{C}$ являются первым и пятым энергетическими тензорами деформации $\overset{(n)}{\mathbf{C}}$, $n = \mathrm{I}, \mathrm{V}$, а тензоры

$\mathbf{A} \equiv \overset{\mathrm{I}}{\mathbf{A}}$ и $\mathbf{J} = \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{A}}$ — первым и пятым квазиэнергетическими тензорами деформации $\overset{(n)}{\mathbf{A}}$, $n = \mathrm{I}, \mathrm{V}$. Для определения конвективных производных остальных тензоров $\overset{(n)}{\mathbf{C}}$ и $\overset{(n)}{\mathbf{A}}$, $n = \mathrm{II}, \mathrm{IV}$, найдем конвективные производные собственных векторов и собственных значений тензоров искажений $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$.

Конвективная производная собственных векторов и собственных значений тензоров искажений. Вычислим конвективные производные $\lambda_{\alpha\xi}, \overset{0}{\mathbf{p}}_{\alpha\xi}, \mathbf{p}_{\alpha\xi}$ собственных значений λ_α и собственных векторов $\overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha$ правого тензора искажений $\mathbf{U} = \mathbf{F}^{\mathrm{т}} \cdot \mathbf{F}$, а также производные $\mathbf{U}_\xi$ и $\mathbf{O}_\xi$. Для этого воспользуемся следующими свойствами собственных значений и собственных векторов [16]:

$$\mathbf{U} = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha \overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha, \quad \mathbf{U}^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha^2 \overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha; \tag{26}$$

$$\overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha \cdot \overset{0}{\mathbf{p}}_\beta = \delta_{\alpha\beta}; \tag{27}$$

$$\mathbf{U}^2 \cdot \overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha = \lambda_\alpha^2 \overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha; \tag{28}$$

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^{\mathrm{т}} \cdot \mathbf{F}. \tag{29}$$

Дифференцируя (29) по параметру ξ, с учетом (21) получаем

$$\mathbf{U}_\xi^2 = 2\mathbf{F}^{\mathrm{т}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{F}. \tag{30}$$

Дифференцируя (27) по параметру ξ и принимая $\beta = \alpha$, находим, что векторы $\overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha$ и $\overset{0}{\mathbf{p}}_{\alpha\xi}$ ортогональны:

$$\overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha \cdot \overset{0}{\mathbf{p}}_{\alpha\xi} = 0. \tag{31}$$

После дифференцирования формулы (28) по параметру ξ имеем

$$\mathbf{U}_\xi^2 \cdot \overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha + \mathbf{U}^2 \cdot \overset{0}{\mathbf{p}}_{\alpha\xi} = \lambda_{\alpha\xi}^2 \overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha + \lambda_\alpha^2 \overset{0}{\mathbf{p}}_{\alpha\xi}. \tag{32}$$

Умножая соотношение (32) скалярно на вектор $\overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha$, получаем

$$\overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha \cdot \mathbf{U}_\xi^2 \cdot \overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha + \overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha \cdot \mathbf{U}^2 \cdot \overset{0}{\mathbf{p}}_{\alpha\xi} = \lambda_{\alpha\xi}^2 \overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha \cdot \overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha + \lambda_\alpha^2 \overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha \cdot \overset{0}{\mathbf{p}}_{\alpha\xi}. \tag{33}$$

С учетом (28) и (31) вторые слагаемые в левой и правой частях равенства (33) обращаются в нуль, тогда

$$\lambda_{\alpha\xi}^2 = \overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha \cdot \mathbf{U}_\xi^2 \cdot \overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha. \tag{34}$$

Откуда, учитывая (18) и (30), находим

$$\lambda_{\alpha\xi} = \frac{1}{\lambda_\alpha} \overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{т}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{F} \cdot \overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha. \tag{35}$$

Используя полярное разложение $\mathbf{F} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U}$ и формулу связи собственных векторов $\mathbf{p}_\alpha = \mathbf{O} \cdot \overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha$, получаем [16]

$$\mathbf{F} \cdot \overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha = \mathbf{O} \cdot \mathbf{U} \cdot \overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha = \lambda_\alpha \mathbf{O} \cdot \overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha = \lambda_\alpha \mathbf{p}_\alpha. \qquad (36)$$

Тогда из (30) и (34) записываем окончательные формулы для конвективной производной собственных значений:

$$\lambda_{\alpha\xi} = \lambda_\alpha \mathbf{p}_\alpha \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{p}_\alpha; \;\; \lambda^2_{\alpha\xi} = 2\lambda^2_\alpha \mathbf{p}_\alpha \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{p}_\alpha. \qquad (37)$$

Умножаем соотношение (32) скалярно на вектор $\overset{0}{\mathbf{p}}_\beta$, тогда

$$\overset{0}{\mathbf{p}}_\beta \cdot \mathbf{U}^2_\xi \cdot \overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha + \overset{0}{\mathbf{p}}_\beta \cdot \mathbf{U}^2 \cdot \overset{0}{\mathbf{p}}_{\alpha\xi} = \lambda^2_{\alpha\xi} \overset{0}{\mathbf{p}}_\beta \cdot \overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha + \lambda^2_\alpha \overset{0}{\mathbf{p}}_\beta \cdot \overset{0}{\mathbf{p}}_{\alpha\xi}, \;\; \alpha \neq \beta. \qquad (38)$$

С учетом (27) и (28) находим (полагая, что все собственные значения λ_α различны), что

$$\overset{0}{\mathbf{p}}_\beta \cdot \overset{0}{\mathbf{p}}_{\alpha\xi} = \frac{\overset{0}{\mathbf{p}}_\beta \cdot \mathbf{U}^2_\xi \cdot \overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha}{\lambda^2_\alpha - \lambda^2_\beta}, \;\; \alpha \neq \beta. \qquad (39)$$

Разложив векторы $\overset{0}{\mathbf{p}}_{\alpha\xi}$ по базису $\overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha$, с учетом (39) получим

$$\overset{0}{\mathbf{p}}_{\alpha\xi} = \sum_{\beta=1}^{3} (\overset{0}{\mathbf{p}}_{\alpha\xi} \cdot \overset{0}{\mathbf{p}}_\beta) \overset{0}{\mathbf{p}}_\beta = \sum_{\alpha\neq\beta,\beta=1}^{3} \frac{\overset{0}{\mathbf{p}}_\beta \cdot \mathbf{U}^2_\xi \cdot \overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha}{\lambda^2_\alpha - \lambda^2_\beta} \overset{0}{\mathbf{p}}_\beta, \qquad (40)$$

или, приняв во внимание (30) и (36), запишем окончательную формулу для производных собственных векторов

$$\overset{0}{\mathbf{p}}_{\alpha\xi} = 2 \sum_{\alpha\neq\beta,\beta=1}^{3} \lambda_\alpha \lambda_\beta \frac{\mathbf{p}_\beta \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{p}_\alpha}{\lambda^2_\alpha - \lambda^2_\beta} \overset{0}{\mathbf{p}}_\beta. \qquad (41)$$

Используя разложение левого тензора искажений $\mathbf{V}$ по собственному базису

$$\mathbf{V}^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda^2_\alpha \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha; \qquad (42)$$

$$\mathbf{V}^2 \cdot \mathbf{p}_\alpha = \lambda^2_\alpha \mathbf{p}_\alpha, \qquad (43)$$

с учетом (14) получаем аналог формулы (38):

$$\mathbf{p}_\beta \cdot \mathbf{V}^2_\xi \cdot \mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_\beta \cdot \mathbf{V}^2 \cdot \mathbf{p}_{\alpha\xi} = \lambda^2_\alpha \mathbf{p}_\beta \cdot \mathbf{p}_{\alpha\xi}. \qquad (44)$$

Из (44) определяем, что

$$\mathbf{p}_\beta \cdot \mathbf{p}_{\alpha\xi} = \frac{\mathbf{p}_\beta \cdot \mathbf{V}^2_\xi \cdot \mathbf{p}_\alpha}{\lambda^2_\alpha - \lambda^2_\beta}, \qquad (45)$$

следовательно,

$$\mathbf{p}_{\alpha\xi} = \sum_{\beta=1}^{3} (\mathbf{p}_{\alpha\xi} \cdot \mathbf{p}_\beta)\mathbf{p}_\beta =$$
$$= \sum_{\alpha\neq\beta\beta=1}^{3} \frac{\mathbf{p}_\beta \cdot \mathbf{V}_\xi^2 \cdot \mathbf{p}_\alpha}{\lambda_\alpha^2 - \lambda_\beta^2}\mathbf{p}_\beta = 2\sum_{\alpha\neq\beta\beta=1}^{3} \frac{\mathbf{p}_\beta \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{p}_\alpha}{\lambda_\alpha^2 - \lambda_\beta^2}\mathbf{p}_\beta. \quad (46)$$

Здесь использована формула (23).

Используя (37), (41) и (46), вычисляем конвективные производные n-й степени тензоров искажений ($\mathbf{U}_\xi^n$, $\mathbf{V}_\xi^n$) и производную тензора поворота ($\mathbf{O}_\xi$). Для этого продифференцируем формулы разложения тензоров по собственному базису:

$$\mathbf{U}_\xi^n = \sum_{\alpha=1}^{3} (n\lambda_\alpha^{n-1}\lambda_{\alpha\xi}\overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha + \lambda_\alpha^n(\overset{0}{\mathbf{p}}_{\alpha\xi} \otimes \overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha + \overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{0}{\mathbf{p}}_{\alpha\xi})) =$$
$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \overset{(n)}{U}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}_\alpha \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{p}_\beta)\overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{0}{\mathbf{p}}_\beta; \quad (47)$$

$$\mathbf{V}_\xi^n = \sum_{\alpha=1}^{3} (n\lambda_\alpha^{n-1}\lambda_{\alpha\xi}\mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha + \lambda_\alpha^n(\mathbf{p}_{\alpha\xi} \otimes \mathbf{p}_\alpha + \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_{\alpha\xi})) =$$
$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \left(\overset{(n)}{V}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}_\alpha \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{p}_\beta) + \overset{(n)}{\tilde{V}}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}_\alpha \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{p}_\beta)\right)\mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta; \quad (48)$$

$$\mathbf{O}_\xi = \sum_{\alpha=1}^{3} (\mathbf{p}_{\alpha\xi} \otimes \overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha + \mathbf{p}_\alpha \otimes \overset{0}{\mathbf{p}}_{\alpha\xi}) = \sum_{\alpha=1}^{3} O_{\alpha\beta}\mathbf{p}_\alpha \cdot \overset{0}{\mathbf{p}}_\beta,$$

где $\overset{(n)}{U}_{\alpha\beta}$, $\overset{(n)}{V}_{\alpha\beta}$, $\overset{(n)}{\tilde{V}}_{\alpha\beta}$, $O_{\alpha\beta}$ — компоненты тензоров в собственных базисах,

$$\overset{(n)}{U}_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha^n n\delta_{\alpha\beta} + \frac{2(1-\delta_{\alpha\beta})\lambda_\alpha\lambda_\beta}{\lambda_\alpha^2 - \lambda_\beta^2}\left(\lambda_\beta^n - \lambda_\alpha^n\right),$$

$$\overset{(n)}{V}_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha^n n\delta_{\alpha\beta}; \quad \overset{(n)}{\tilde{V}}_{\alpha\beta} = \frac{2(1-\delta_{\alpha\beta})}{\lambda_\alpha^2 - \lambda_\beta^2}\left(\lambda_\beta^n - \lambda_\alpha^n\right);$$

$$O_{\alpha\beta} = 2(\lambda_\alpha\lambda_\beta(\mathbf{p}_\alpha \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{p}_\beta) + \mathbf{p}_\beta \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{p}_\alpha)\frac{1-\delta_{\alpha\beta}}{\lambda_\alpha^2 - \lambda_\beta^2}.$$

Конвективная производная энергетических и квазиэнергетических тензоров деформации. Используя (47) и (48), а также обобщенные представления для энергетических и квазиэнергетических тензоров деформации $\overset{(n)}{\mathbf{C}}$ и $\overset{(n)}{\mathbf{A}}$, записываем выражения для конвективных производных этих тензоров [16]:

$$\overset{(0)}{\mathbf{C}}_\xi = \frac{1}{n-\text{III}} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \overset{(n-\text{III})}{U}{}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}_\alpha \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{p}_\beta)\overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{0}{\mathbf{p}}_\beta = {}^4\overset{(n)}{\mathbf{U}} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w});$$

$$\overset{(n)}{\mathbf{A}}_\xi = \frac{1}{n-\text{III}} \mathbf{V}^n_\xi = {}^4\overset{(n)}{\mathbf{V}} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) + {}^4\overset{(n)}{\tilde{\mathbf{V}}} \cdot\cdot\, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{w}),$$

где ${}^4\overset{(n)}{\mathbf{U}}$, ${}^4\overset{(n)}{\mathbf{V}}$, ${}^4\overset{(n)}{\tilde{\mathbf{V}}}$ — тензоры четвертого ранга,

$${}^4\overset{(n)}{\mathbf{U}} = \frac{1}{n-\text{III}} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \overset{(n-\text{III})}{U}{}_{\alpha\beta}\overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes \overset{0}{\mathbf{p}}_\beta \otimes \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta;$$

$${}^4\overset{(n)}{\mathbf{V}} = \frac{1}{n-\text{III}} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \overset{(n-\text{III})}{V}{}_{\alpha\beta}\mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta \otimes \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta;$$

$${}^4\overset{(n)}{\tilde{\mathbf{V}}} = \frac{1}{n-\text{III}} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \overset{(n-\text{III})}{\tilde{V}}{}_{\alpha\beta}\mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta \otimes \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta.$$

Тензоры напряжений в варьированной конфигурации. Рассмотрим модели A_n нелинейно-упругой, анизотропной среды, которым соответствуют определяющие соотношения вида [16]

$$\overset{(n)}{\mathbf{T}} = \sum_{\gamma=1}^{r} \varphi_\gamma I^{(\text{s})}_{\gamma C}, \tag{49}$$

$$\varphi_\gamma = \partial\psi/\partial I^{(s)}_\gamma, \quad I^{(s)}_{\gamma\mathbf{C}} = \partial I^{(s)}_\gamma/\partial\overset{(n)}{\mathbf{C}}, \quad I^{(\text{s})}_\gamma = I^{(s)}_\gamma\Big(\overset{(n)}{\mathbf{C}}\Big),$$

где $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$ — энергетические тензоры напряжений; $I^{(s)}_\gamma\big(\overset{(n)}{\mathbf{C}}\big)$ — инварианты тензора деформации относительно группы симметрии, соответствующей рассматриваемому типу анизотропии среды; $I^{(s)}_{\gamma\mathbf{C}}$ — тензоры производной инвариантов по тензорам деформации; $\psi\big(\overset{(n)}{\mathbf{C}}\big)$ — упругий потенциал. Энергетические тензоры напряжений $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$ (49) — это функции тензора напряжений Коши $\mathbf{T}$ и градиента деформации $\mathbf{F}$, поэтому для вычисления производной $\overset{(n)}{\mathbf{T}}_\xi = \dfrac{d}{d\xi}\overset{(n)}{\widehat{\mathbf{T}}}\Big|_{\xi=0}$ ($\overset{(n)}{\widehat{\mathbf{T}}}$ — энергетические тензоры напряжений в конфигурации $\widehat{K}$) можно применить формулу (16), которая справедлива и для тензорной функции тензорного аргумента. Тогда с учетом (16) и (19) имеем

$$\overset{(n)}{\mathbf{T}}_\xi = {}^4\overset{(n)}{\mathbf{H}}{}^{(s)} \cdot\cdot \overset{(n)}{\mathbf{C}}_\xi = {}^4\overset{(n)}{\mathbf{H}}{}^{(s)} \cdot\cdot\, {}^4\overset{(n)}{\mathbf{U}} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}), \tag{50}$$

где ${}^4\overset{(n)}{\mathbf{H}}{}^{(s)}$ — тензор четвертого ранга,

$$
{}^4\overset{(n)}{\mathbf{H}}{}^{(s)} = \sum_{\gamma,\beta=1}^{r} \frac{\partial^2\psi}{\partial I_\gamma^{(s)} \partial I_\beta^{(s)}} I_{\gamma\mathbf{C}}^{(s)} \otimes I_{\beta\mathbf{C}}^{(s)} + \sum_{\gamma=1}^{r} \varphi_\gamma \frac{\partial^2 I_\gamma^{(s)}}{\partial \overset{(n)}{\mathbf{C}} \partial \overset{(n)}{\mathbf{C}}}.
$$

Для вычисления производных $\mathbf{T}_\xi$ и $\mathbf{P}_\xi$ тензоров напряжений Коши и Пиолы–Кирхгофа используем формулы связи тензоров $\overset{(n)}{\mathbf{T}}$ и $\mathbf{T}$, $\mathbf{P}$ [16]:

$$
\mathbf{T} = {}^4\overset{(n)}{\mathbf{E}} \cdot\cdot \overset{(n)}{\mathbf{T}}; \tag{51}
$$

$$
\mathbf{P} = {}^4\overset{(n)}{\mathbf{E}}{}^0 \cdot\cdot \overset{(n)}{\mathbf{T}}, \tag{52}
$$

где ${}^4\overset{(n)}{\mathbf{E}}$ и ${}^4\overset{(n)}{\mathbf{E}}{}^0$ — тензоры энергетической эквивалентности [16],

$$
{}^4\overset{(n)}{\mathbf{E}} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \overset{(n)}{E}_{\alpha\beta} \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta \otimes \overset{0}{\mathbf{p}}_\beta \otimes \overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha;
$$

$$
{}^4\overset{(n)}{\mathbf{E}}{}^0 = (\overset{0}{\rho}/\rho)\mathbf{F}^{-1} \cdot {}^4\overset{(n)}{\mathbf{E}} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \overset{(n)}{E}{}^0_{\alpha\beta} \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta \otimes \overset{0}{\mathbf{p}}_\beta \otimes \overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha, \quad \overset{(n)}{E}{}^0_{\alpha\beta} = \sqrt{\mathrm{g}/\overset{0}{\mathrm{g}}}\, \frac{\overset{(n)}{E}_{\alpha\beta}}{\lambda_\alpha}. \tag{53}
$$

Компоненты $\overset{(n)}{E}_{\alpha\beta}$ зависят только от собственных значений λ_α, λ_β (их выражения приведены в работе [16]). Дифференцируя (51) и (52) по параметру ξ, получаем

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T}_\xi &= {}^4\overset{(n)}{\mathbf{E}}_\xi \cdot\cdot \overset{(n)}{\mathbf{T}} + {}^4\overset{(n)}{\mathbf{E}} \cdot\cdot \overset{(n)}{\mathbf{T}}_\xi; \\
\mathbf{P}_\xi &= {}^4\overset{(n)}{\mathbf{E}}{}^0_\xi \cdot\cdot \overset{(n)}{\mathbf{T}} + {}^4\overset{(n)}{\mathbf{E}}{}^0 \cdot\cdot \overset{(n)}{\mathbf{T}}_\xi.
\end{aligned} \tag{54}
$$

Конвективные производные тензоров энергетической эквивалентности (53) можно представить в виде

$$
{}^4\overset{(n)}{\mathbf{E}}_\xi = {}^6\overset{(n)}{\mathbf{R}} \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) + {}^6\overset{(n)}{\tilde{\mathbf{R}}} \cdot\cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{w}),
$$

$$
{}^4\overset{(n)}{\mathbf{E}}{}^0_\xi = {}^6\overset{(n)}{\mathbf{R}} \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) + {}^6\overset{(n)}{\tilde{\mathbf{R}}}{}^0 \cdot\cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{w}),
$$

где ${}^6\overset{(n)}{\mathbf{R}}$, ${}^6\overset{(n)}{\tilde{\mathbf{R}}}$, ${}^6\overset{(n)}{\mathbf{R}}{}^0$, ${}^6\overset{(n)}{\tilde{\mathbf{R}}}{}^6$ — тензоры шестого ранга,

$$
\begin{aligned}
{}^6\overset{(n)}{\mathbf{R}} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} (&\mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta \otimes \overset{0}{\mathbf{p}}_\beta \otimes \overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha \otimes (\mathrm{E}_{\alpha\beta,\alpha}\boldsymbol{\Lambda}_\alpha + \mathrm{E}_{\alpha\beta,\beta}\boldsymbol{\Lambda}_\beta) + \\
&+ \mathrm{E}_{\alpha\beta}\mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta \otimes ({}^3\overset{0}{\mathbf{P}}_\beta \otimes \overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha)^{(1342)} + \mathrm{E}_{\alpha\beta} p_\alpha \otimes \mathbf{p}_\beta \otimes \overset{0}{\mathbf{p}}_\beta \otimes {}^3\overset{0}{\mathbf{P}}_\alpha);
\end{aligned} \tag{55}
$$

$$ {}^6\overset{(n)}{\tilde{\mathbf{R}}} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \mathrm{E}_{\alpha\beta}\Big(({}^3\mathbf{P}_\alpha \otimes p_\beta \otimes \overset{0}{\mathbf{p}}_\beta \otimes \overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha)^{(156234)} + \\ + \mathbf{p}_\alpha \otimes ({}^3\mathbf{P}_\beta \otimes \overset{0}{\mathbf{p}}_\beta \otimes \overset{0}{\mathbf{p}}_\alpha)^{(14523)}\Big). $$

В (55) введены тензоры третьего и второго рангов

$$ {}^3\mathbf{P}_\alpha = 2 \sum_{\alpha\neq\beta,\beta=1}^{3} \frac{\mathbf{p}_\beta \otimes \mathbf{p}_\beta \otimes \mathbf{p}_\alpha}{\lambda_\alpha^2 - \lambda_\beta^2}; \quad {}^3\overset{0}{\mathbf{P}}_\alpha = 2 \sum_{\alpha\neq\beta,\beta=1}^{3} \frac{\overset{0}{\mathbf{p}}_\beta \otimes \mathbf{p}_\beta \otimes \mathbf{p}_\alpha}{\lambda_\alpha^2 - \lambda_\beta^2}; $$

$$ \boldsymbol{\Lambda}_\alpha = \lambda_\alpha \mathbf{p}_\alpha \otimes \mathbf{p}_\alpha; \quad \mathrm{E}_{\alpha\beta,\,\beta} = \partial \mathrm{E}_{\alpha\beta} / \partial \lambda_\beta. $$

Тензоры ${}^6\overset{(n)}{\mathbf{R}}{}^0$ и ${}^6\overset{(n)}{\widetilde{\mathbf{R}}}{}^0$ определяют по аналогичным формулам.

Формулировка задачи теории устойчивости нелинейно-упругого тела. Запишем уравнение равновесия в отсчетной конфигурации $\overset{0}{K}$:

$$ \overset{0}{\nabla} \cdot \mathbf{P} + \overset{0}{\rho}\mathbf{f} = 0, \tag{56} $$

где $\mathbf{f}$ — вектор плотности массовых сил. Продифференцируем уравнение (56) по параметру ξ:

$$ \overset{0}{\nabla} \cdot \mathbf{P}_\xi = 0. $$

Вариации вектора плотности массовых сил $\mathbf{f}$, вектора внешних поверхностных сил $\mathbf{S}^e$ и вектора заданных перемещений $\mathbf{u}^e$ принимаем равными нулю. С учетом этого запишем следующее уравнение относительно вектора вариаций $\mathbf{w}$:

$$ \overset{0}{\nabla} \cdot \Big(({}^6\overset{(n)}{\mathbf{R}}{}^{0\text{т}} \cdot\cdot \overset{(n)}{\mathbf{T}} + {}^4\overset{(n)}{\mathbf{H}}{}^{(s)} \cdot\cdot {}^4\overset{(n)}{\mathbf{U}}) \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) + {}^6\overset{(n)}{\mathbf{R}}{}^{0\text{т}} \cdot\cdot \overset{(n)}{\mathbf{T}} \cdot\cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{w}) \Big) = 0, \tag{57} $$

где ${}^6\overset{(n)}{\mathbf{R}}{}^{0\text{т}}$ — транспонированные тензоры шестого ранга, ${}^6\overset{(n)}{\mathbf{R}}{}^{0\text{т}} = \left({}^6\overset{(n)}{\mathbf{R}}{}^{0\text{т}}\right)^{(125634)}$.

Тензоры линейной деформации $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})$ (22) и $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{w})$ (25) в базисе отсчетной конфигурации имеют вид

$$ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-1\text{т}} \cdot \overset{0}{\nabla} \otimes \mathbf{w} + \overset{0}{\nabla} \otimes \mathbf{w}^{\text{т}} \cdot \mathbf{F}^{-1}); $$

$$ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F} \cdot \overset{0}{\nabla} \otimes \mathbf{w} + \overset{0}{\nabla} \otimes \mathbf{w}^{\text{т}} \cdot \mathbf{F}^{\text{т}}). $$

Пусть для рассматриваемого упругого тела граничные условия заданы в виде вектора усилий $\mathbf{S}^e$ на части поверхности $\overset{0}{\Sigma}_\sigma$ и вектора перемещений $\mathbf{u}^e$ на части поверхности $\overset{0}{\Sigma}_u$, тогда

$$\overset{0}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P}\Big|_{\overset{0}{\Sigma}_\sigma} = \mathbf{S}^e; \quad u\Big|_{\overset{0}{\Sigma}_\mathbf{u}} = \mathbf{u}^e. \tag{58}$$

Дифференцируя (58) и используя представление вида (2) для вариации вектора перемещений $\widehat{\mathbf{u}} = \widehat{\mathbf{x}} - \overset{0}{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \xi\mathbf{w} - \overset{0}{\mathbf{x}} = \mathbf{u} + \xi\mathbf{w}$ и $\widehat{\mathbf{u}}\Big|_{\overset{0}{\Sigma}_u} = \mathbf{u}^e$, получаем

$$\overset{0}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P}\Big|_{\overset{0}{\Sigma}_\sigma} = 0, \quad \mathbf{w}\Big|_{\overset{0}{\Sigma}_u} = 0. \tag{59}$$

После подстановки (54) в (59) запишем граничные условия в виде

$$\overset{0}{n}\cdot \left(\left({}^6\mathbf{R}^{0\text{т}} \cdot\cdot \overset{(n)}{\mathbf{T}} + {}^4\overset{(n)}{\mathbf{H}}{}^{(s)} \cdot\cdot {}^4\overset{(n)}{\mathbf{U}} \right) \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) + {}^6\overset{(n)}{\mathbf{R}}{}^{0\text{т}} \cdot\cdot \overset{(n)}{\mathbf{T}} \cdot\cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{w}) \right) \Big|_{\overset{0}{\Sigma}_\sigma} = 0;$$

$$\mathbf{w}\Big|_{\overset{0}{\Sigma}_u} = 0. \tag{60}$$

Система уравнений (57) и (60) образует искомую постановку задачи теории устойчивости нелинейно-упругого тела. Эта задача линейна относительно вектора неизвестных функций $\mathbf{w}$, имеет второй порядок производных и однородна, т.е. допускает тривиальное решение ($\mathbf{w} \equiv 0$). Решением задачи устойчивости является именно нетривиальное решение ($\mathbf{w} \neq 0$). Тривиальное решение соответствует устойчивому равновесию тела, а нетривиальное — неустойчивому.

Формулировка задачи теории устойчивости в виде (57), (60) относит ее к классу задач на собственные значения. Действительно, наряду с задачей теории устойчивости рассмотрим исходную задачу равновесия тела в конфигурации K в лагранжевом описании:

$$\overset{0}{\nabla} \cdot \mathbf{P} = 0;$$

$$\mathbf{P} = {}^4\overset{(n)}{\mathbf{E}}{}^0 \cdot\cdot \overset{(n)}{\mathbf{T}};$$

$$\overset{(n)}{\mathbf{T}} = \sum_{\gamma=1}^{r} \varphi_\gamma I^{(s)}_{\gamma\mathbf{C}}(\overset{(n)}{\mathbf{C}}); \quad \overset{(n)}{\mathbf{C}} = \frac{1}{n - \text{III}}(\mathbf{U}^{n-\text{III}} - \mathbf{E}); \tag{61}$$

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^{\text{т}} \cdot \mathbf{F}; \quad \mathbf{F} = \mathbf{E} + \overset{0}{\nabla} \otimes \mathbf{u}^{\text{т}};$$

$$\overset{0}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P}\Big|_{\overset{0}{\Sigma}_\sigma} = \mu\overset{0}{\mathbf{S}}{}^e; \quad \mathbf{u}\Big|_{\overset{0}{\Sigma}_u} = \mu\overset{0}{\mathbf{u}}{}^e,$$

где μ — введенный скалярный параметр, являющийся множителем при векторах внешних поверхностных сил $\mathbf{S}^e$ и перемещений $\mathbf{u}^e$. Полагаем, что решение этой задачи относительно вектора перемещений $\mathbf{u}$ найдено при значениях μ из некоторого интервала (μ_1, μ_2), тогда можно рассматривать функции $\mathbf{u}(\mu)$ и $\overset{(n)}{\mathbf{T}}(\mu)$. Подставим тензор напряжений $\overset{(n)}{\mathbf{T}}(\mu)$ в систему уравнений (57), (60) и включим параметр μ в число неизвестных параметров задачи устойчивости наряду с вектором $\mathbf{w}$. Следовательно, эта задача имеет следующую формулировку: найти такие значения параметра μ, при которых система уравнений (57), (60) имеет нетривиальное решение $\mathbf{w}$. Это и есть задача на собственные значения. Она решается совместно с основной задачей нелинейной теории упругости, поскольку в уравнения (57), (60) входит тензор $\overset{(n)}{\mathbf{T}}(\mu)$, являющийся решением задачи (61).

Уравнения теории устойчивости для моделей A_{I} и A_{V} нелинейно-упругих сред. Наиболее простой вид формулы (51) и (52) имеют для модели A_{V}:

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}\cdot\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}};\quad \mathbf{P} = \sqrt{\mathrm{g}/\overset{0}{\mathrm{g}}}\,\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}}. \tag{62}$$

Дифференцируя соотношения (62) по параметру ξ с учетом формул (14), получаем

$$\mathbf{T}_\xi = \mathbf{F}\cdot\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}_\xi\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}} + \nabla\otimes\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{F}\cdot\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}} + \mathbf{F}\cdot\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\nabla\otimes\mathbf{w};$$

$$\mathbf{P}_\xi = \sqrt{\mathrm{g}/\overset{0}{\mathrm{g}}}\,\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}_\xi\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}} + \sqrt{\mathrm{g}/\overset{0}{\mathrm{g}}}\,(\nabla\cdot\mathbf{w})\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}} + \sqrt{\mathrm{g}/\overset{0}{\mathrm{g}}}\;\overset{V}{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\nabla\otimes\mathbf{w}.$$

Тогда система уравнений (57), (60) для модели A_{V} нелинейно-упругого тела с учетом (14), (21), (50) принимает вид

$$\overset{0}{\nabla}\cdot\left(\left({}^4\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{H}}{}^{(s)}\cdot\cdot\,\overset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{w})\right)\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}} + \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}\cdot\overset{0}{\nabla}\otimes\mathbf{w} + (\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}\cdot\cdot\overset{0}{\nabla}\otimes\mathbf{w})\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\right) = 0;$$

$$\overset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}(\overset{0}{\nabla}\otimes\mathbf{w}\cdot\mathbf{F} + \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\cdot\overset{0}{\nabla}\otimes\mathbf{w}^{\mathrm{T}});$$

$$\overset{0}{\mathbf{n}}\cdot\left(\left({}^4\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{H}}{}^{(s)}\cdot\cdot\;\overset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{w})\right)\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}} + \overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}\cdot\overset{0}{\nabla}\otimes\mathbf{w} + (\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}\cdot\cdot\overset{0}{\nabla}\otimes\mathbf{w})\,\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\right)\Bigg|_{\overset{0}{\Sigma}_\sigma} = 0;$$

$$\mathbf{w}\Big|_{\overset{0}{\Sigma}_u} = 0. \tag{63}$$

Запишем формулы (51) и (52) для модели A_{I}:

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}\cdot\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{F}^{-1},\quad \mathbf{P} = \sqrt{\mathrm{g}/\overset{0}{\mathrm{g}}}\mathbf{U}^{-2}\cdot\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{F}^{-1}. \tag{64}$$

Дифференцируя соотношения (64) по параметру ξ с учетом (16), находим

$$\mathbf{T}_\xi = \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}\cdot\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}_\xi\cdot\mathbf{F}^{-1} - \nabla\otimes\mathbf{w}\cdot\mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}\cdot\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{F}^{-1} - \mathbf{F}^{-1\mathrm{T}}\cdot\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{F}^{-1}\cdot\nabla\otimes\mathbf{w}^{\mathrm{T}};$$

$$\mathbf{P}_\xi = \sqrt{\mathrm{g}/\overset{0}{\mathrm{g}}}(\mathbf{U}^{-2}\cdot\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}_\xi\cdot\mathbf{F}^{-1} - 2\mathbf{F}^{-1}\cdot\,\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})\cdot\mathbf{F}^{-1\text{т}}\cdot\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{F}^{-1} -$$
$$-\mathbf{U}^{-2}\cdot\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{F}^{-1}\cdot\nabla\otimes\mathbf{w}^{\text{т}} + (\nabla\cdot\mathbf{w})\mathbf{U}^{-2}\cdot\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{F}^{-1}).$$

Следовательно, уравнения (57) и (60) для модели A_{I} нелинейно-упругого тела примут вид

$$\begin{gathered}\overset{0}{\nabla}\cdot((^4\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{H}}{}^{(s)}\cdot\cdot\;\overset{0}{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\mathbf{w}))\cdot\mathbf{F}^{-1} - 2\,\overset{0}{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\mathbf{w})\cdot\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{F}^{-1} - \\ -\mathbf{U}^{-2}\cdot\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{U}^{-2}\cdot\overset{0}{\nabla}\otimes\mathbf{w}^{\text{т}} + (\mathbf{F}^{-1\text{т}}\cdot\cdot\overset{0}{\nabla}\otimes\mathbf{w})\mathbf{U}^{-2}\cdot\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{F}^{-1}) = 0;\end{gathered} \tag{65}$$

$$\overset{0}{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^{-2}\cdot\overset{0}{\nabla}\otimes\mathbf{w}\cdot\mathbf{F}^{-1\text{т}} + \mathbf{F}^{-1}\cdot\overset{0}{\nabla}\otimes\mathbf{w}^{\text{т}}\cdot\mathbf{U}^{-2});$$

$$\begin{gathered}\overset{0}{\mathbf{n}}\cdot((^4\overset{I}{\mathbf{H}}{}^{(s)}\cdot\cdot\;\overset{0}{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\mathbf{w}))\cdot\mathbf{F}^{-1} - 2\,\overset{0}{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\mathbf{w})\cdot\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{F}^{-1} - \\ -\mathbf{U}^{-2}\cdot\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{U}^{-2}\cdot\overset{0}{\nabla}\otimes\mathbf{w}^{\text{т}} + (\mathbf{F}^{-1\text{т}}\cdot\cdot\overset{0}{\nabla}\otimes\mathbf{w})\mathbf{U}^{-2}\cdot\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{F}^{-1})_{\overset{0}{\Sigma}_\sigma} = 0;\end{gathered}$$

$$\mathbf{w}\Big|_{\overset{0}{\Sigma}_u} = 0.$$

Энергетические тензоры напряжений $\overset{\mathrm{I}}{\mathbf{T}}$ и $\overset{\mathrm{V}}{\mathbf{T}}$ в уравнениях (65) и (63) определяются решением задачи равновесия основного состояния (61). Для других моделей (A_{II} и A_{IV}) необходимо использовать общие уравнения теории устойчивости (57) и (60).

Сравнивая получившиеся системы уравнений (63) и (65), а также общую систему (57), (60) при различных значениях номера n модели материала, устанавливаем, что линеаризованная система уравнений теории устойчивости различна для разных моделей нелинейно-упругого поведения материала. Соответственно, будут отличаться и критические внешние нагрузки, вызывающие потерю устойчивости тел.

Выводы. Предложена обобщенная трехмерная теория устойчивости нелинейно-упругих тел для произвольных конечных деформаций, основанная на понятии варьированной конфигурации нелинейно-упругих сред и использовании обобщенных моделей нелинейно-упругих сред, предложенных автором статьи, на базе пяти энергетических пар тензоров напряжений–деформаций. Показано, что итоговые уравнения трехмерной теории устойчивости отличаются друг от друга при различных моделях нелинейно-упругих сред. Для двух типов моделей, использующих правые тензоры деформации Коши–Грина и Альманзи, получены явные аналитические представления уравнений теории устойчивости, не требующие использования процедуры вычисления собственных значений тензора искажений.

Выведенные уравнения трехмерной теории устойчивости имеют универсальный характер: могут применяться как для расчета устойчивости сложных нелинейно-упругих тел в рамках трехмерного анализа напряженно-деформированного состояния, так и тел с малыми упругими деформациями, а также для расчета двумерных оболочечных конструкций. Эти частные случаи рассмотрены в части 2 публикации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Timoshenko S.P.*, *Gere J.M.* Theory of Elastic Stability. NY.; Toronto; London: McGraw-Hill, 1961. 356 p.
2. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 964 с.
3. *Simitses G.J.* An introduction to the elastic stability of structures. NJ.: Prentice Hall, 1976. 256 p.
4. *Bazant Z.P.*, *Cedolin L.* Stability of structures. Oxford: Oxford University Press, 1990. 316 p.
5. *Iyengar N.G.R.* Structural stability of columns and plates. New Delhi: Affiliated East–WestPress, 1986. 284 p.
6. *Васильев В.В.* Механика композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984. 272 с.
7. *Григолюк Э. И.*, *Чулков П.П.* Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Машиностроение, 1973. 172 с.
8. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. М.: УРСС, 2003. 208 с.
9. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
10. *Димитриенко Ю.И.* Нелинейная механика сплошной среды. М.: Физматлит, 2009. 624 с.
11. *Гузь А.Н.* Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Киев: Вища школа, 1986. 512 с.
12. *Коханенко Ю.В.* Трехмерная устойчивость цилиндра при неоднородном начальном состоянии // Доклады НАНУ. 2009. № 1. С. 60–62.
13. *Bazant Z.P.* Stability of Elastic. An elastic and disintegrating structures: a conspectus of main results // ZAMM, ZAngew. Math. Mech. 2000. Vol. 80. No 11–12. P. 709–732.
14. *Dimitrienko Yu. I.* Novel viscoelastic models for elastomers under finite strains // European Journal of Mechanics. A: Solids. 2002. Vol. 21. No 2. P. 133–150.
15. *Димитриенко Ю.И.*, *Даштиев И.З.* Модели вязкоупругого поведения эластомеров при конечных деформациях // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2001. № 1. С. 21–41.
16. *Димитриенко Ю.И.* Механика сплошной среды. Т. 2: Универсальные законы механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 464 с.

REFERENCES

[1] Timoshenko S.P., Gere J.M. Theory of elastic stability. N.Y.-Toronto-London, McGraw-Hill, 1961. 356 p.

[2] Vol'mir A.S. Ustoychivost' deformiruemykh sistem [Stability of deformable systems]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 964 p.

[3] Simitses G.J. An Introduction to the elastic stability of structures. New Jersey, Prentice Hall, 1976. 256 p.

[4] Bazant Z.P., Cedolin L. Stability of structures. Oxford, Oxford Univ. Press., 1990. 316 p.

[5] Iyengar N.G.R. Structural stability of columns and plates. New Delhi, Affiliated East-West Press. 1986. 284 p.

[6] Vasil'ev V.V. Mekhanika kompozitsionnykh materialov [Mechanics of composite materials]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1984. 272 p.

[7] Grigolyuk E.I., Chulkov P.P. Ustoychivost' i kolebaniya trekhsloynykh obolochek. [Stability and oscillations of sandwich shells]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1973. 172 p.

[8] Novozhylov V.V. Osnovy nelineynoy teorii uprugosti [Fundamentals of the nonlinear theory of elasticity]. Moscow, URSS Publ., 2003. 208 p.

[9] Lur'e A.I. Nelineynaya teoriya uprugosti [Non-linear theory of elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 512 p.

[10] Dimitrienko Yu.I. Nelineynaya mekhanika sploshnoy sredy [Nonlinear continuum mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009. 624 p.

[11] Guz' A.N. Osnovy trekhmernoy teorii ustoychivosti deformiruemykh tel [Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies]. Kiev, Vishcha Shkola Publ., 1986. 512 p.

[12] Kokhanenko Yu.V. The three-dimensional stability of a cylinder on the heterogeneous initial state. *Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr.* [Rep. Natl. Acad. Sci. Ukr.], 2009, no. 1, pp. 60–62 (in Russ.).

[13] Bazant Z.P. Stability of elastic, anelastic and disintegrating structures: a conspectus of main results. *Appl. Math. Mech., ZAMM*, 2000, vol. 80, no. 11–12, pp. 709–732.

[14] Dimitrienko Yu.I. Novel viscoelastic models for elastomers under finite strains. *Eur. J. Mech. A: Solids*, 2002, vol. 21, no. 1, pp. 133–150.

[15] Dimitrienko Yu.I., Dashtiev I.Z. Models of viscoelastic behavior of elastomers at finite deformations. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2001, no. 1, pp. 21–41 (in Russ.).

[16] Dimitrienko Yu.I. Mekhanika sploshnoy sredy. T. 2: Universal'nye zakony mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy [Continuum mechanics. Vol. 2: Universal laws of mechanics and electrodynamics of continuous media]. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2011. 464 p.

Статья поступила в редакцию 29.03.2013

Юрий Иванович Димитриенко — д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой “Вычислительная математика и математическая физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 250 научных работ в области механики сплошных сред, вычислительной механики, механики и термомеханики композитов, математического моделирования в науке о материалах, вычислительной газодинамики.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Yu.I. Dimitrienko — Dr. Sci. (Phys.–Math.), professor, head of “Computational Mathematics and Mathematical Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 250 publications in the field of mechanics of continua, computational mathematics, mechanics and thermomechanics of composites, mathematical simulation in the science of materials, computational gas dynamics.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005 Russian Federation.