УДК 517.17

ОБОСНОВАНИЕ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА КВАЗИГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

А.Ф. Грибов, **Б.И. Шахтарин**

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: alexandr-gribov@list.ru

Дано строгое математическое обоснование метода квазигармонической линеаризации, который был предложен как модификация метода гармонического баланса для анализа фазовых систем. Для этих систем $\dot{x} = f(x)$ существует такой вектор $d \neq 0$, что $\forall x \in R^n$ $f(x+d) = f(x)$.

Математическим обоснованием классического метода гармонической линеаризации занимались многие авторы (Р. Басс, Е.С. Пятницкий, Е.Н. Розенвассер и др.) Специфика фазовых систем — наличие векового члена — потребовала постановки задачи обоснования процедуры получения решения обобщенным методом квазигармонической линеаризации. Для фазовых систем возможно существование как O-цикла, так и l-обходного φ-цикла. Условия существования l-обходного φ-цикла могут быть использованы для поиска хаотических систем со счетным числом различных l-оборотных φ-циклов, $l = 1, 2, 3, \ldots$ Если у полученной системы алгебраических уравнений при всех l существует решение для одних и тех же значений параметров, то исходная система имеет счетное число периодических движений. Поскольку счетное множество φ-циклов может быть только седловым, система является хаотической. Такие l-оборотные φ-циклы имеют вид

$$\varphi(t) = \omega t + \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{N} w_k \exp\Big(ik\frac{\omega}{l}t\Big)$$

и предполагаемое решение подставляется в исходное уравнение. Нелинейная функция, входящая в уравнение фазовой системы, оказывается периодической и раскладывается в ряд Фурье. Затем приравниваются члены, содержащие одинаковые гармоники.

Определены условия, при которых решения, найденные методом квазигармонической линеаризации, мало отличаются от точного решения.

***Ключевые слова*:** фазовая система, метод гармонического баланса, оценка точности.

SUBSTANTIATION OF THE GENERALIZED METHOD FOR QUASI-HARMONIC LINEARIZATION

A.F. Gribov, **B.I. Shakhtarin**

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: alexandr-gribov@list.ru

The strict mathematical substantiation of the method for quasi-harmonic linearization is given, which has been proposed as a modification of the harmonic balance method for analysis of phase systems. For these systems $\dot{x} = f(x)$ there exists a vector $d \neq 0$ such that $\forall x \in R^n$ $f(x+d) = f(x)$. Many authors (R. Bass, E.S. Pyatnitskii, E.N. Rosenwasser, et al.) were engaged in mathematical substantiation of the classical *method for harmonic linearization. The phase system specificity — the presence of a secular term — has required the statement of the problem on substantiation of the procedure for obtaining a solution using the generalized method for quasi-harmonic linearization. The existence of both an O-cycle and an l-bypass φ-cycle is possible for phase systems. Conditions of existence of an l-bypass φ-cycle can be used for searching chaotic systems with the denumerable many of different l-turn φ-cycles, $l = 1, 2, 3, \ldots$. If a solution to the obtained system of algebraic equations exists with all l for the same values of parameters then the initial system has a denumerable number of periodic movements. Since the denumerable set of φ-cycles can be only a saddle one, the system is chaotic. These l-turn φ-cycles have the form*

$$\varphi(t) = \omega t + \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{N} w_k \exp\Big(ik\frac{\omega}{l}t\Big)$$

and the suggested solution is substituted into the initial equation. The nonlinear function entering the phase-system equation appears to be periodic and is expanded into a Fourier series. Next, the terms containing identical harmonics are equated. The conditions are determined, with which the solutions that are found using the quasi-harmonic linearization method differ very little from the exact solution.

***Keywords*:** phase system, harmonic balance method, estimate of accuracy.

Приближенные методы исследования систем автоматического регулирования широко используются в инженерной практике и позволяют получить аналитические соотношения, необходимые для анализа и расчета конкретных систем. Распространенным аналитическим средством инженерного анализа всегда являлся метод гармонического баланса [1]. Модификация этого метода, позволяющая исследовать фазовые системы, была предложена Б.И. Шахтариным в работе [2] и названа методом квазигармонической линеаризации. Его обобщение для случая произвольного (конечного) числа гармоник в предполагаемом решении рассмотрено в работе [3], а в работе [4] приведены определяющие соотношения, по которым можно находить параметры l-оборотных φ-циклов и исследовать их устойчивость.

Рассмотрим фазовую систему с невырожденной передаточной функцией $W(p)$. Такую систему можно представить в виде с явно выделенной угловой координатой $\varphi = \sigma$ [5]

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \varrho^{\text{т}} x - a\Phi(\varphi); \\ \dot{x} &= Ax + k\Phi(\varphi), \end{aligned} \tag{1}$$

где A — постоянная матрица размерностью $(n-1) \times (n-1)$; k и ϱ — постоянные $(n-1)$-мерные векторы; a — число; $\Phi(\varphi) \equiv (F(\varphi) - \gamma)$ — скалярная 2π-периодическая функция.

Пусть $K(p) = \dfrac{R(p)}{p^{-1}S(p)}$ передаточная функция системы (1) от входа Φ к выходу $(-\dot{\varphi})$. Тогда передаточная функция линейной части имеет вид

$$W(p) = p^{-1}K(p);$$

$$\dot{\varphi}(t) = -K(p)\Phi(\varphi(t)); \qquad p = d/dt; \tag{2}$$
$$K(p) = \left(\sum_{k=0}^{m} b_k p^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k\right)^{-1}.$$

Результаты практического применения метода квазигармонической линеаризации для анализа движений систем рассматриваемого класса свидетельствуют о наличии ограничений, существенно сужающих область его возможного применения. Так, при стремлении частоты цикла ω к нулю точность метода резко падает. Поэтому возникает вопрос о его теоретическом обосновании.

Для обоснования классического метода гармонической линеаризации применялись различные подходы и эта задача рассматривалась многими авторами [6–8]. Используем один из этих подходов для обоснования процедуры получения решения обобщенным методом квазигармонической линеаризации [8].

Для достижения поставленной цели фазовую систему (1) с явно выделенной угловой координатой φ путем невырожденного линейного преобразования $x \longrightarrow Hx$ преобразуем к следующей системе:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= x_1 - a\Phi(\varphi); \\ \dot{x} &= Ax + r\Phi(\varphi). \end{aligned} \tag{3}$$

Далее примем, что в пространстве R^{n-1} все векторы заданы своими координатами в стандартном ортонормированном базисе $\{e_i\}_{i=1}^{n-1}$, где e_i — вектор, все компоненты которого равны нулю, кроме i-й, равной единице.

Пусть в (3) $a = 0$, тогда $x_1 = \dot{\varphi}$. Представив второе уравнение системы в интегральной форме

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} (e^{A(t-\tau)}r)\Phi(\varphi(\tau))d\tau, \quad t \geq t_0$$

и умножив правую и левую его части скалярно на e_1, выразим $x_1 = \dot{\varphi}(t)$:

$$x_1(t) = (e^{A^{\text{т}}(t-t_0)}e_1, x_0) + \int_{t_0}^{t} (e^{A^{\text{т}}(t-\tau)}e_1, r)\Phi(\varphi(\tau))d\tau. \tag{4}$$

Введем функции

$$\begin{aligned} k(t) &= 1(t)(e^{A^{\text{т}}t}e_1, r); \\ k_i(t) &= 1(t)(e^{A^{\text{т}}t}e_1, e_i); \\ 1(t) &= \begin{cases} 1 & t \geq 0; \\ 0 & t < 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{5}$$

Тогда

$$k(t)=\sum_{j=1}^{n-1}1(t)r_j(e^{A^{\text{т}}t}e_1,e_j)=\sum_{j=1}^{n-1}r_jk_j(t)$$

и согласно (5) равенство (4) примет вид

$$x_1(t)=\dot\varphi(t)=\sum_{j=1}^{n-1}k_j(t-t_0)x_j^0+\int\limits_{t_0}^{t}k(t-\tau)\Phi(\varphi(\tau))d\tau. \qquad (6)$$

Предположим, что все нули функции $S(p)$ расположены слева от мнимой оси. В этом случае

$$k(t)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(i\omega)e^{i\omega t}d\omega. \qquad (7)$$

Наряду с интегральным уравнением (6) рассмотрим следующее уравнение:

$$\dot y(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_{\omega_{\text{ср}}}(t-\tau)\Phi(y(\tau))d\tau, \qquad (8)$$

где

$$\varphi_{\omega_{\text{ср}}}(t)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\omega_{\text{ср}}}^{\omega_{\text{ср}}}K(i\omega)e^{i\omega t}d\omega.$$

Спектр функции $\varphi_{\omega_{\text{ср}}}(t)$ обозначим через $\overline{K}(i\omega)$:

$$\varphi_{\omega_{\text{ср}}}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{K}(i\omega)e^{i\omega t}d\omega,$$

$\overline{K}(i\omega)=-K(i\omega)$ при $|\omega|\le\omega_{\text{ср}}$ и $\overline{K}(i\omega)=0$ при $|\omega|>\omega_{\text{ср}}$. Решение уравнения (6) будем искать в виде

$$\varphi(t)=\omega t+\sum_{k=1}^{N}A_k\sin(k\omega t+\gamma_k), \qquad (9)$$

где $\omega=2\pi/T$ — частота цикла.

Оказывается, что любое периодическое решение вида (9) уравнения (8) совпадает с периодическими функциями этого вида, найденными методом квазигармонического баланса, примененным к исходному уравнению.

Действительно, пусть уравнение (8) имеет периодическое решение

$$y(t) = \omega t + \sum_{\substack{k=-\infty \\ (k\neq 0)}}^{\infty} \alpha_k e^{ik\omega t}.$$

Поскольку $\Phi(x)$ — это 2π-периодическая функция, функция $\Phi\Big(\omega t + \sum_{\substack{k=-\infty \\ (k\neq 0)}}^{\infty} \alpha_k e^{ik\omega t}\Big)$ — периодическая и

$$\Phi\Big(\omega t + \sum_{\substack{k=-\infty \\ (k\neq 0)}}^{\infty} \alpha_k e^{ik\omega t}\Big) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k(\alpha_{\pm 1,\pm 2}, \ldots) e^{ik\omega t}.$$

Подставляя это выражение в (8), получаем

$$\omega + \sum_{\substack{k=-\infty \\ (k\neq 0)}}^{\infty} ik\omega\alpha_k e^{ik\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\omega_{\text{ср}}}(t-\tau)\beta_k(\alpha_{\pm 1}, \ldots) e^{ik\omega\tau}\, d\tau =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\omega_{\text{ср}}}(\xi)\beta_k(\alpha_{\pm 1}, \ldots) e^{ik\omega t} e^{-ik\omega\xi}\, d\xi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k e^{ik\omega t}\overline{K}(ik\omega).$$

Пусть $N\omega \le \omega_{\text{ср}} \le (N+1)\omega$, тогда

$$\begin{array}{ll}
\alpha_k = 0 & |k| \ge N+1; \\
ik\omega\alpha_k = \beta_k(\alpha_{\pm 1}, \ldots, \alpha_{\pm N})\overline{K}(ik\omega) = & \\
= -\beta_k(\alpha_{\pm 1}, \ldots, \alpha_{\pm N})K(ik\omega) & 0 \ne |k| \le N; \\
\omega = -\beta_0 K(0) = (\gamma - h_0)\dfrac{b_0}{a_0} & k = 0,
\end{array}$$

где h_0 — коэффициент разложения в ряд Фурье функции $\Phi(x)$. Эти соотношения являются соотношениями квазигармонического баланса при учете N гармоник, полученными ранее. В этом смысле уравнение (8) — это уравнение квазигармонического баланса. Обоснование метода заключается в поиске условий, при выполнении которых исходное уравнение будет иметь решение, достаточно близкое к решению уравнения квазигармонического баланса (8).

Теоретическое обоснование метода квазигармонической линеаризации представим в виде совокупности следующих утверждений.

Лемма 1. *Пусть скалярная функция* $u(t) \ge 0$ *и* $\dot{u}(t) \ge 0$ *при* $t \ge 0$, $u(t)$ *— оригинал интегрального преобразования Лапласа,* $u(0) = 0$ *и* *при $t \geq 0$ выполнено неравенство*

$$\dot{u}(t) \leq A + B \int\limits_0^t u(\tau)\, d\tau, \tag{10}$$

где A — положительная постоянная. Тогда при $t \geq 0$

$$u(t) \leq \frac{A}{\sqrt{B}} \operatorname{sh} \sqrt{B} t.$$

◄ Представим неравенство (10) в виде

$$\dot{u}(t) = A + B \int\limits_0^t u(\tau)\, d\tau + c(t), \tag{11}$$

где $c(t) \leq 0$. Переходя к изображениям, получаем

$$pU(p) = \frac{A}{p} + B\frac{U(p)}{p} + C(p),$$

отсюда

$$U(p) = \frac{p}{p^2 - B}\left[\frac{A}{p} + C(p)\right] = \frac{A}{p^2 - B} + \frac{C(p)p}{p^2 - B}.$$

Переходя к оригиналам, используя теорему о свертке, определяем

$$u(t) = \frac{A}{\sqrt{B}} \operatorname{sh} \sqrt{B} t + \int\limits_0^t c(t - \tau) \operatorname{ch} \sqrt{B} \tau\, d\tau.$$

Поскольку $c(t) \leq 0$, то $\int\limits_0^t c(t - \tau) \operatorname{ch} \sqrt{B} \tau\, d\tau \leq 0$ и

$$u(t) \leq \frac{A}{\sqrt{B}} \operatorname{sh} \sqrt{B} t.$$

►

Лемма 2. *Функция* $\int\limits_{-\infty}^{t_0} k(t - \tau)\Phi(\varphi(\tau))\, d\tau$ *разложима по системе функций* $k_i(t - t_0)$, $\quad i = 1, \ldots, n - 1$, *т.е.*

$$\int\limits_{-\infty}^{t_0} k(t - \tau)\Phi(\varphi(\tau))\, d\tau = \sum_{i=1}^{n-1} k_i(t - t_0) x_i^0,$$

где x_i^0 — функционалы $\varphi(t)$.

Доказательство леммы 2 приведено в работе [8].

Лемма 3. *Пусть полюсы оператора $W(p)$ расположены слева от мнимой оси, а функции $\psi_{\omega_{\text{ср}},\triangle}(t)$ и $\rho_\triangle(\omega)$ определены соотношениями (17) и (13) соответственно. Тогда функция $\psi_{\omega_{\text{ср}},\triangle}(t)$ абсолютно интегрируема, причем*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\psi_{\omega_{\text{ср}},\triangle}|\,dt \leq \frac{\max\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\varepsilon_2\}}{\varepsilon_0} \max\{\sup_\omega |\rho''_\triangle|, \sup_\omega |\rho'_\triangle|, 1\} R^1,$$

где числа ε_i , $i = 0, 1, 2$, находятся по формулам (12) и (18), а постоянная R^1 имеет вид

$$R^1 = \int\limits_{|\omega|\leq\omega_{\text{ср}}} [|K| + 2|K'| + |K''|]\,d\omega.$$

Доказательство приведено в работе [8].

Лемма 4. *Пусть полюсы оператора $K(p)$ расположены слева от мнимой оси, а функция $k(t)$ определяется по выражению (7). Тогда имеет место оценка*

$$\sup_{t\in(-\infty,\infty)} |k(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |K(i\omega)|\,d\omega.$$

Доказательство дано в работе [8].

Теорема. *Пусть для уравнения (2) выполнены следующие условия:*

1) разность порядков полиномов в знаменателе и числителе передаточной функции $K(p)$ составляет не менее двух;

2) все полюсы функции $K(p)$ расположены слева от мнимой оси;

3) функция $\Phi(x)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|\Phi(x') - \Phi(x'')| < L|x' - x''|, \quad x', x'' \in (-\infty, \infty);$$

4) процедура квазигармонического баланса, примененная к уравнению (2), определяет решение $\omega t + \sum\limits_{k=1}^{N} A_k \sin(k\omega t + \gamma_k)$.

Тогда уравнение (2) имеет решение $\varphi(t)$, удовлетворяющее неравенству

$$|\varphi(t) - (\omega t + \sum_{k=1}^{N} A_k \sin(k\omega t + \gamma_k))| \leq \varepsilon^{1/2} R S \Omega_\beta(\omega);$$
$$t \in [t_0, t_0 + S\,\text{arsh}(1/\varepsilon^{1/2})],$$

где R и S — постоянные, определяемые параметрами системы и амплитудами A_k; $\Omega_\beta(\omega)$ — невозрастающая функция ω, $\beta \in [0, 1)$,

$\varepsilon = \max\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$,

$$\varepsilon_i = \frac{\displaystyle\int\limits_{|\omega|>(N+\beta)\omega} \left|\frac{d^i}{d\omega^i} K(i\omega)\right| d\omega}{\displaystyle\int\limits_{|\omega|\le(N+\beta)\omega} \left|\frac{d^i}{d\omega^i} K(i\omega)\right| d\omega}, \quad i = 0, 1, 2.$$

◀ Согласно изложенному в работе [8], приведем уравнение (6) к виду, явным образом содержащим малый параметр. Так же, как и в работе [8], выберем величину $\omega_{\text{ср}}$ такую, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{\displaystyle\int\limits_{|\omega|>\omega_{\text{ср}}} |K(i\omega)|\, d\omega}{\displaystyle\int\limits_{|\omega|\le\omega_{\text{ср}}} |K(i\omega)|\, d\omega} = \varepsilon_0 \ll 1, \tag{12}$$

т.е. площадь “хвоста” амплитудной частотной характеристики линейной части системы при $|\omega| > \omega_{\text{ср}}$ намного меньше площади “полосы пропускания” при $|\omega| \le \omega_{\text{ср}}$.

Введем также дважды непрерывно дифференцируемую действительную функцию

$$\rho_\triangle(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad |\omega| \le \omega_{\text{ср}}; \\ \pi(\omega) & \text{при} \quad \omega_{\text{ср}} < |\omega| \le \omega_{\text{ср}} + \triangle; \\ 0 & \text{при} \quad |\omega| > \omega_{\text{ср}} + \triangle, \end{cases} \tag{13}$$

где $\triangle$ — некоторое число; $\pi(\omega)$ — некоторая функция такая, что $0 \le \pi(\omega) \le 1$.

С учетом функции $\rho_\triangle(\omega)$ представим импульсную переходную функцию $k(t)$ в следующем виде:

$$-k(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(i\omega)e^{i\omega t}\, d\omega =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|\le\omega_{\text{ср}}+\triangle} \rho_\triangle(\omega)K(i\omega)e^{i\omega t}\, d\omega +$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\omega|>\omega_{\text{ср}}} [1-\rho_\triangle(\omega)]K(i\omega)e^{i\omega t}\, d\omega = \varphi_{\omega_{\text{ср}},\triangle}(t) + \psi^1_{\omega_{\text{ср}},\triangle}(t). \tag{14}$$

Здесь импульсная переходная функция, определяемая полосой пропускания фильтра $K(p)$, находится по выражению

$$\varphi_{\omega_{\text{ср}},\triangle}(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega| \le \omega_{\text{ср}}+\triangle} \rho_{\triangle}(\omega) K(i\omega) e^{i\omega t}\, d\omega, \tag{15}$$

а импульсная переходная функция, определяемая "хвостом" фильтра $K(p)$, — как

$$\psi^1_{\omega_{\text{ср}},\triangle}(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega| > \omega_{\text{ср}}} [1 - \rho_{\triangle}(\omega)] K(i\omega) e^{i\omega t} d\omega. \tag{16}$$

Функция $\rho_{\triangle}(\omega)$ позволяет сгладить частотные характеристики "полосы пропускания" и "хвоста".

Для функции $\psi^1_{\omega_{\text{ср}},\triangle}(t)$ имеет место следующая оценка:

$$|\psi^1_{\omega_{\text{ср}},\triangle}(t)| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega| \le \omega_{\text{ср}}} |K(i\omega)|\, d\omega \frac{\int\limits_{|\omega| > \omega_{\text{ср}}} [1 - \rho_{\triangle}(\omega)] |K(i\omega)|\, d\omega}{\int\limits_{|\omega| \le \omega_{\text{ср}}} |K(i\omega)|\, d\omega} <$$

$$< \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega| \le \omega_{\text{ср}}} |K(i\omega)|\, d\omega \frac{\int\limits_{|\omega| > \omega_{\text{ср}}} |K(i\omega) d\omega}{\int\limits_{|\omega| \le \omega_{\text{ср}}} |K(i\omega)| d\omega} = \varepsilon_0 \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\omega| \le \omega_{\text{ср}}} |K(i\omega)|\, d\omega.$$

Таким образом,

$$\psi^1_{\omega_{\text{ср}},\triangle}(t) = \varepsilon_0 \psi_{\omega_{\text{ср}},\triangle}(t), \tag{17}$$

где функция $\psi_{\omega_{\text{ср}},\triangle}(t)$ принимает значения того же порядка, что и функция $\varphi_{\omega_{\text{ср}},\triangle}(t)$.

Введем функции

$$K_1(i\omega) = -\frac{d}{d\omega} K(i\omega); \qquad K_2(i\omega) = -\frac{d^2}{d\omega^2} K(i\omega).$$

Поскольку для физически реализуемого фильтра $K(p)$ эти функции абсолютно интегрируемы, существует такое число $\omega_{\text{ср}}$, что

$$\varepsilon_i = \frac{\int\limits_{|\omega| > \omega_{\text{ср}}} |K_i(i\omega)|\, d\omega}{\int\limits_{|\omega| \le \omega_{\text{ср}}} |K_i(i\omega)|\, d\omega} \ll 1, \qquad i = 1, 2. \tag{18}$$

Обозначим $\varepsilon = \max\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.

Пусть процедура квазигармонического баланса дает решение в виде

$$\varphi(t) = \omega t + \sum_{k=1}^{N} A_k \sin(k\omega t + \gamma_k).$$

Зафиксируем число $\omega_{\text{ср}} = (N+\beta)\omega$, где $\beta \in [0,1)$. Тогда уравнение (8) также имеет это решение. Примем $\triangle = (1-\beta)\omega$ и рассмотрим интегральное уравнение

$$\dot z(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{\omega_{\text{ср}},\triangle}(t-\tau)\Phi(z(t))\,d\tau, \tag{19}$$

где функция $\varphi_{\omega_{\text{ср}},\triangle}(t)$ определяется по равенству (15). Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функция

$$z(t) = \omega t + \sum_{k=1}^{N} A_k \sin(k\omega t + \gamma_k)$$

удовлетворяет интегральному уравнению (19).

Используя соотношения (15)–(17), преобразуем уравнение (6) к уравнению

$$\dot\varphi(t) = \sum_{j=1}^{n-1} k_j(t-t_0)x_j^0 + \int\limits_{t_0}^{t} [\varphi_{\omega_{\text{ср}},\triangle}(t-\tau) + \varepsilon_0\psi_{\omega_{\text{ср}},\triangle}(t-\tau)]\Phi(\varphi(\tau))\,d\tau \tag{20}$$

и представим разность уравнений (20) и (19) в виде

$$\dot\varphi(t) - \dot z(t) = \sum_{j=1}^{n-1} k_j(t-t_0)x_j^0 - \int\limits_{-\infty}^{t_0} \varphi_{\omega_{\text{ср}},\triangle}(t-\tau)\Phi(z(\tau))\,d\tau +$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t} \varphi_{\omega_{\text{ср}},\triangle}(t-\tau)[\Phi(\varphi(\tau)) - \Phi(z(\tau))]\,d\tau + \varepsilon_0 \int\limits_{t_0}^{t} \psi_{\omega_{\text{ср}},\triangle}(t-\tau)\Phi(\varphi(\tau))\,d\tau -$$

$$- \int\limits_{t}^{\infty} \varphi_{\omega_{\text{ср}},\triangle}(t-\tau)\Phi(z(\tau))\,d\tau.$$

Поскольку $k(t) = \varphi(t) + \varepsilon_0\psi(t)$ и $\varphi(t) = -\varepsilon_0\psi(t)$ при $t<0$, $k(t)=0$ при $t<0$, то

$$\dot{\varphi}(t) - \dot{z}(t) = \sum_{j=1}^{n-1} k_j(t-t_0)x_j^0 - \int_{-\infty}^{t_0} k(t-\tau)\Phi(z(\tau))\,d\tau +$$

$$+ \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{t_0} \psi_{\omega_{\text{ср}},\triangle}(t-\tau)\Phi(z(\tau))\,d\tau + \int_{t_0}^{t} \varphi(t-\tau)[\Phi(\varphi(\tau)) - \Phi(z(\tau))]\,d\tau +$$

$$+ \varepsilon_0 \int_{t_0}^{t} \psi_{\omega_{\text{ср}},\triangle}(t-\tau)\Phi(\varphi(\tau))\,d\tau + \varepsilon_0 \int_{t}^{\infty} \psi_{\omega_{\text{ср}},\triangle}(t-\tau)\Phi(z(\tau))\,d\tau. \quad (21)$$

Выберем некоторое конкретное решение исходного уравнения (20) с начальными условиями $x_i^0\,(i = 1, \ldots, n-1)$, определяемыми леммой 1. При этом $\varphi^0 = \omega t_0 + \sum\limits_1^N A_k \sin(k\omega t_0 + \gamma_k)$. Тогда в соответствии с леммой 2 выполняется равенство

$$\int_{-\infty}^{t_0} k(t-\tau)\Phi(z(\tau))\,d\tau = \sum_{i=1}^{n-1} k_i(t-t_0)x_i^0$$

и (21) принимает вид

$$\dot{\varphi}(t) - \dot{z}(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{t_0} \psi_{\omega_{\text{ср}}\triangle}(t-\tau)\Phi(z(\tau))\,d\tau +$$

$$+ \varepsilon_0 \int_{t_0}^{t} \psi_{\omega_{\text{ср}},\triangle}(t-\tau)\Phi(\varphi(\tau))\,d\tau + \varepsilon_0 \int_{t}^{\infty} \psi_{\omega_{\text{ср}},\triangle}(t-\tau)\Phi(z(\tau))\,d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \varphi(t-\tau)[\Phi(\varphi(\tau)) - \Phi(z(\tau))]\,d\tau. \quad (22)$$

Прибавляя и вычитая в правой части уравнения (22) выражение

$$\varepsilon_0 \int_{t_0}^{t} \psi(t-\tau)\Phi(z(\tau))\,d\tau,$$

получаем

$$\dot{\varphi}(t) - \dot{z}(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t-\tau)\Phi(z(\tau))\,d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} k(t-\tau)[\Phi(\varphi(\tau)) - \Phi(z(\tau))]\,d\tau. \quad (23)$$

Учитывая, что функция $\Phi(x)$ удовлетворяет условию Липшица $|\Phi(x)| \leq 1$, а также используя лемму 3, запишем неравенство

$$
\begin{gathered}
|\dot{\varphi}(t) - \dot{z}(t)| \leq \varepsilon_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\psi(t-\tau)|\, d\tau + \\
+ L \int\limits_{t_0}^{t} |k(t-\tau)||\varphi(\tau) - z(\tau)|\, d\tau \leq \\
\leq \varepsilon \max\{\sup_{\omega} |\rho''_{\triangle}|, \sup_{\omega} |\rho'_{\triangle}|, 1\} R + L \int\limits_{t_0}^{t} |k(t-\tau)||\varphi(\tau) - z(\tau)|\, d\tau,
\end{gathered}
\tag{24}
$$

где

$$
\varepsilon = \max\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2\}; \quad R = \int\limits_{-\infty}^{\infty} [|K| + 2|K'| + |K''|]\, d\omega. \tag{25}
$$

Согласно леммам 1 и 4, неравенство (24) может быть представлено в виде

$$
|\varphi(t) - z(t)| \leq \varepsilon \max\{\sup_{\omega} |\rho''_{\triangle}|, \sup_{\omega} |\rho'_{\triangle}|, 1\} RS \operatorname{sh} St,
$$

где

$$
S = \left(\sqrt{L \int\limits_{-\infty}^{\infty} |K(i\omega)|\, d\omega} \right)^{-1}, \tag{26}
$$

откуда следует, что

$$
\begin{gathered}
|\varphi(t) - z(t)| \leq \varepsilon^{1/2} \max\{\sup_{\omega} |\rho''_{\triangle}|, \sup_{\omega} |\rho'_{\triangle}|, 1\} RS, \\
t \in [t_0, t_0 + S \operatorname{arsh}(1/\varepsilon^{1/2})].
\end{gathered}
\tag{27}
$$

Таким образом, для каждого периодического решения $z(t)$ уравнения (19) существует такое решение $\varphi(t)$ исходного уравнения (20), определяемое начальными условиями и в соответствии с леммой 2, что имеют место оценки (27), (26).

Периодические решения уравнения (8) тождественно совпадают с периодическими решениями уравнения (19), тогда

$$
\begin{gathered}
|\varphi(t) - y(t)| \leq \varepsilon^{1/2} \max\{\sup_{\omega} |\rho''_{\triangle}|, \sup_{\omega} |\rho'_{\triangle}|, 1\} RS, \\
t \in [t_0, t_0 + S \operatorname{arsh}(1/\varepsilon^{1/2})].
\end{gathered}
\tag{28}
$$

Учитывая, что $y(t)$ при $\omega_{\text{ср}} = (N + \beta)\omega$, $\beta \in [0, 1)$ совпадает с функцией $\omega t + \sum\limits_{k=1}^{N} A_k \sin(k\omega t + \gamma_k)$, найденной обобщенным методом квазигармонического баланса, окончательно получаем

$$|\varphi(t) - (\omega t + \sum_{k=1}^{N} A_k \sin(k\omega t + \gamma_k))| \leq$$
$$\leq \varepsilon^{1/2} \max\{\sup_\omega |\rho''_\triangle|, \sup_\omega |\rho'_\triangle|, 1\} RS,$$
$$t \in [t_0, t_0 + S\operatorname{arsh}(1/\varepsilon^{1/2})].$$

►

Замечание. Как показано в работе [8], в качестве функции $\pi(\omega)$ для $\rho_\triangle(\omega)$ из (13) можно использовать следующее выражение:

$$\pi(\omega) = 1 - \left(\frac{|\omega| - \omega_{\text{ср}}}{\triangle}\right)^3 \left[6\left(\frac{|\omega| - \omega_{\text{ср}}}{\triangle}\right)^2 - 15\left(\frac{|\omega| - \omega_{\text{ср}}}{\triangle}\right) + 10\right].$$

В этом случае имеет место оценка

$$\max\{\sup_\omega |\rho''_\triangle|, \sup_\omega |\rho'_\triangle|, 1\} \leq \max\left\{\frac{2}{(1-\beta)\omega}, \frac{7}{(1-\beta)^2\omega^2}, 1\right\} = \Omega_\beta(\omega).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов Е.П.*, *Пальтов И.П.* Приближенные методы исследования нелинейных автономных систем. М.: Физматгиз, 1960. 792 с.
2. *Шахтарин Б.И.* Устойчивость движений нелинейной системы с периодической характеристикой // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1977. № 5. С. 174–182.
3. *Грибов А.Ф.*, *Шахтарин Б.И.* Учет высших гармоник в методе квазигармонической линеаризации // Автоматика и телемеханика. 1981. № 10. С. 183–188.
4. *Грибов А.Ф.*, *Шахтарин Б.И.* Обобщенный квазигармонический метод анализа фазовых систем // Радиотехника и электроника. 2013. Т. 58. № 11. С. 1–6.
5. *Леонов Г.А.* Метод нелокального сведения в теории абсолютной устойчивости нелинейных систем // Автоматика и телемеханика. 1984. № 2. С. 37–45.
6. *Розенвассер Е.Н.* Апостериорные оценки погрешности метода гармонического баланса в задаче о периодических движениях автономных систем // Автоматика и телемеханика. 1985. № 2. С. 44–51.
7. *Бобылев Н.А.*, *Красносельский М.А.* О методе гармонического баланса в задаче об автоколебаниях // Автоматика и телемеханика. 1984. № 9. С. 44–51.
8. *Браверман Э.М.*, *Меерков С.М.*, *Пятницкий Е.С.* Малый параметр в проблеме обоснования метода гармонического баланса (в случае гипотезы фильтра) // Автоматика и телемеханика. 1975. № 1. С. 5–21.

REFERENCES

[1] Popov E.P., Pal'tov I.P. Priblizhennye metody issledovaniya nelineynykh avtonomnykh sistem [Approximate methods for the study of nonlinear autonomous systems]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1960. 792 p.

[2] Shakhtarin B.I. The stability of a nonlinear system motion with the periodic characteristic. Izv. Akad. Nauk SSSR. *Tekhnicheskaya kibernetika* [Bull. Acad. Sci. USSR, Technical Cybernetics], 1977, no. 5, pp. 174–182 (in Russ.).

[3] Gribov A.F., Shakhtarin B.I. Accounting of higher harmonics in the quasiharmonic linearization method. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1981, no. 10, p. 183–188 (in Russ.).

[4] Gribov A.F., Shakhtarin B.I. Generalized quasi-harmonic method of the phase systems analysis. *Radiotekhnika i elektronika* [J. Communications Technology and Electronics], 2013, vol. 58, no. 11, pp. 1–6 (in Russ.).

[5] Leonov G.A. Nonlocal reduction method in the absolute stability theory of nonlinear systems. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1984, no. 2, pp. 37–45 (in Russ.).

[6] Rozenvasser E.N. A posteriori estimates of fallibility for the harmonic balance method in the problem of periodic motions of autonomous systems. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1985, no. 2, pp. 44–51 (in Russ.).

[7] Bobylev N.A., Krasnosel'skiy M.A. On the harmonic balance method in the problem of self-vibration. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1984, no. 9, pp. 44–51 (in Russ.).

[8] Braverman E.M., Meerkov S.M., Pyatnitskiy E.S. Small parameter in the justification problem of the method of harmonic balance (in the case of the filter hypothesis). *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1975, no. 1, pp. 5–21 (in Russ.).

Статья поступила в редакцию 26.06.2013

Александр Федорович Грибов — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 30 научных работ в области динамических фазовых систем, теории бифуркаций.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Gribov A.F. — Cand. Sci. (Phis.–Math.), assoc. professor of “Mathematical Simulation” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 30 publications in the field of dynamical phase system and the theory of bifurcations.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Борис Ильич Шахтарин — д-р техн. наук, профессор кафедры “Автономные информационные и управляющие системы” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 250 научных работ в области радиотехники, статистического анализа, фазовой синхронизации, формирования и обнаружения сигналов.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

B.I. Shakhtarin — Dr. Sci. (Eng.), professor of “Autonomous Information and Control Systems” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 250 publications in the field of radio engineering, statistical analysis, phase synchronization, formation and detection of signals.
Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005 Russian Federation.