

УДК 519.62

Н. А. Михеева, А. Н. Морозов,
А. В. Скрипкин

ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДИФФУЗИИ ПРИ ПОМОЩИ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрены процессы диффузии частиц пара с плоской поверхности жидкости и поверхности сферической капли. Исследованы особенности испарения с учетом флуктуаций потока частиц, вызванных случайными изменениями температуры, концентрации и другими факторами. Найдены статистические характеристики флуктуаций соответствующих величин, в том числе для потока массы через границу раздела жидкости и пара, а также концентрации у поверхности жидкости. Найдено распределение числа полностью испарившихся капель в зависимости от времени.

Процессы диффузии играют важную роль во многих областях науки и техники. В частности, поведение компонентов электронных схем во многом определяется происходящими в них процессами диффузии и часто является основной причиной выхода их из строя [1]. Большой интерес также представляет изучение процессов диффузии с поверхности сферических частиц (например, с поверхности находящихся в атмосфере капельных аэрозолей [2]).

Многие биологические объекты, встречающиеся в природе (или внутри живых организмов), имеют форму капельных аэрозолей [3]. В некоторых случаях описание тех или иных биологических процессов невозможно без исследования поведения таких аэрозолей, например, получения оценки их среднего времени жизни или скорости испарения пара с поверхности капель (или их конденсации на эту поверхность).

На диффузию всегда оказывают влияние различные стохастические процессы. В частности, при описании процесса испарения жидкости с плоской поверхности (или с поверхности сферической капли) во многих случаях необходимо учитывать случайные флуктуации потока частиц, вызванные флуктуациями температуры, локальной концентрации частиц пара у поверхности жидкости и др. В связи с этим актуально исследование процессов диффузии с учетом указанных флуктуаций.

В настоящей работе рассматриваются процессы диффузии частиц пара, находящихся над поверхностью жидкости, занимающей полупространство, и диффузия частиц пара, испаряющихся с поверхности сферической капли (или конденсирующихся на эту поверхность), при учете флуктуаций потока частиц.

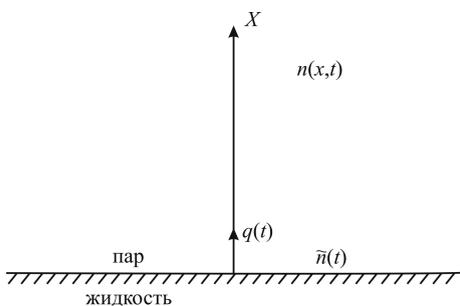


Рис. 1. Диффузия пара в полупространстве

Диффузия пара, находящегося над поверхностью жидкости, занимающей полупространство. Рассмотрим пространство, одна половина которого заполнена жидкостью, а во второй находится испарившийся с ее поверхности пар. Введем ось X , направленную перпендикулярно плоскости раздела жидкости и пара (рис. 1), тогда поверхность жидкости будет соответствовать плоскости $X = 0$.

Концентрацию насыщенного пара обозначим через n_0 , концентрацию пара у поверхности $\tilde{n}(t)$ будем считать функцией времени. Рассмотрим случай, когда начальная концентрация пара над поверхностью жидкости постоянна и равна концентрации насыщенного пара n_0 (при условии пренебрежения конвекцией пара).

В случае, когда концентрация пара над поверхностью жидкости зависит только от координаты x и времени t , концентрация пара $n(x, t)$ удовлетворяет одномерному уравнению диффузии

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2} \quad (1)$$

с граничными и начальными условиями

$$n(x, t)|_{x=0} = \tilde{n}(t), \quad (2)$$

$$n(x, t)|_{t=0} = n_0. \quad (3)$$

На границе жидкости возможно как испарение, так и конденсация пара. Будем считать, что конденсация наступает тогда, когда концентрация пара у границы жидкости превышает концентрацию насыщенного пара. При этом поток частиц примем пропорциональным разности концентрации у поверхности жидкости и концентрации насыщенного пара, т.е.

$$q(t) = -\alpha(\tilde{n}(t) - n_0), \quad (4)$$

где α — коэффициент аккомодации, зависящий в общем случае от рода вещества, температуры и др. Из соотношения (4) следует, что поток частиц положительный в случае испарения частиц жидкости и отрицательный при конденсации частиц пара.

Кроме того, поток частиц можно найти с помощью общего выражения

$$q(t) = -D \frac{\partial n}{\partial x} \Big|_{x=0}. \quad (5)$$

Перейдем от потока частиц к массовому потоку $q_m(t)$, который численно равен массе частиц, испаряющихся (конденсирующихся) с единицы площади жидкости за единицу времени. Выражения для массового потока $q_m(t)$ получаются из соотношений (4) и (5) путем их умножения на массу частицы m , т.е.

$$q_m(t) = -m\alpha(\tilde{n}(t) - n_0); \quad (6)$$

$$q_m(t) = -mD \left. \frac{\partial n}{\partial x} \right|_{x=0}. \quad (7)$$

Дополнив выражение (6) случайной составляющей $\xi(t)$, которую будем считать белым шумом с интенсивностью σ , имеем

$$q_m(t) = -m\alpha(\tilde{n}(t) - n_0) + \xi(t). \quad (8)$$

Приравнивая выражения (7) и (8), получаем

$$-mD \left. \frac{\partial n}{\partial x} \right|_{x=0} = -m\alpha(\tilde{n}(t) - n_0) + \xi(t). \quad (9)$$

Для нахождения производной $\frac{\partial n}{\partial x}$ воспользуемся решением задачи (1)–(3). Ввиду линейности уравнения диффузии оно представляет собой сумму двух слагаемых, одно из которых обусловлено начальной концентрацией частиц, а другое — концентрацией частиц на поверхности, описываемой произвольной функцией.

Так как в нижнем полупространстве находится жидкость, то между потоком, связанным с наличием начальной концентрации, и потоком испаряющейся жидкости почти сразу устанавливается динамическое равновесие и необходимо оставить лишь слагаемое, связанное с произвольной концентрацией частиц у поверхности жидкости [4] (т.е. условием (3) пренебрегаем), тогда

$$n(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D}} \int_0^t \frac{x}{(t - \tau)^{3/2}} \exp \left[-\frac{x^2}{4D(t - \tau)} \right] \tilde{n}(\tau) d\tau. \quad (10)$$

Найдем производную выражения (10) по координате x . Получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\pi D}} \int_0^t \left[\frac{1}{(t - \tau)^{3/2}} - \frac{2x^2}{4D(t - \tau)^{5/2}} \right] \times \\ \times \exp \left[-\frac{x^2}{4D(t - \tau)} \right] \tilde{n}(\tau) d\tau. \quad (11) \end{aligned}$$

Вычисление интеграла по частям в формуле (11) приводит к соот-

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{\pi D}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{x^2}{4D(t-\tau)}\right] \frac{d\tilde{n}(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (12)$$

Подстановка формулы (12) в выражение (9) дает

$$-m\alpha(\tilde{n}(t) - n_0) + \xi(t) = m\sqrt{\frac{D}{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{d\tilde{n}(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (13)$$

Принимая во внимание, что $\tilde{n}(t) = \int_0^t \frac{d\tilde{n}(\tau)}{d\tau} d\tau$, считая, что $\tilde{n}(0) = 0$,

и вводя обозначения

$$\delta n(t) = \tilde{n}(t) - n_0, \quad (14)$$

$$Z(t) = \frac{d\delta n(t)}{dt}, \quad (15)$$

окончательно получаем

$$\int_0^t \left(\sqrt{\frac{D}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} + \alpha \right) mZ(\tau) d\tau = \xi(t). \quad (16)$$

Таким образом, случайный процесс $Z(t)$, равный производной по времени от разности концентраций частиц у поверхности жидкости и насыщенного пара, описывается интегральным оператором Вольтерра первого рода (16) с ядром, представляющим сумму слагаемого абелевого типа и постоянной величины. Описание случайного процесса $Z(t)$ интегральным уравнением приводит к тому, что $Z(t)$ в общем случае представляет немарковский случайный процесс [5]. Величина $\delta n(t)$ в общем случае также представляет собой немарковский случайный процесс, так как является интегралом по времени от немарковского процесса $Z(t)$.

Интенсивность флуктуаций массового потока σ и величину α можно оценить, используя характерные параметры задачи (температуру T , массу частицы m , концентрацию насыщенного пара n_0 и коэффициент диффузии D), с помощью следующих выражений:

$$\sigma = Dm^2 n_0^2; \quad (17)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{kT}{m}}, \quad (18)$$

где k — постоянная Больцмана.

В пределе $t \rightarrow \infty$ найдем спектральные плотности флуктуаций массового потока $q_m(t)$, величины $\delta n(t)$, а также плотность флуктуаций массы жидкости, испарившейся с единицы площади поверхности жидкости к моменту времени t , которую обозначим $M(t)$.

Для нахождения спектральной плотности флуктуаций разности концентраций у поверхности и насыщенного пара $G_{\delta\bar{n}}(\omega)$ проведем преобразование Лапласа выражения (16). Получим

$$\left(\sqrt{\frac{D}{p}} + \frac{\alpha}{p} \right) m \hat{Z}(p) = \hat{\xi}(p), \quad (19)$$

где p — параметр преобразования; $\hat{Z}(p)$, $\hat{\xi}(p)$ — преобразования Лапласа для функций $Z(t)$, $\xi(t)$ соответственно. Учитывая выражение (15), для преобразования Лапласа функции $\delta n(t)$ имеем

$$\delta \hat{n}(p) = \frac{\hat{\xi}(p)}{m(\sqrt{Dp} + \alpha)}. \quad (20)$$

Воспользовавшись определением

$$G_{\delta\bar{n}}(\omega)|_{t \rightarrow \infty} = |\delta \hat{n}(i\omega)|^2 \quad (21)$$

и тем фактом, что спектральная плотность белого шума представляет собой постоянную величину, равную его интенсивности,

$$G_{\xi}(\omega) = \sigma, \quad (22)$$

окончательно получим

$$G_{\delta\bar{n}}(\omega) = \frac{\sigma}{m^2 (D\omega + \alpha\sqrt{2D\omega} + \alpha^2)}. \quad (23)$$

Отсюда следует, что при $\omega \rightarrow 0$ спектральная плотность $G_{\delta\bar{n}}(\omega)$ стремится к постоянной величине

$$G_{\delta\bar{n}}(\omega)|_{\omega \rightarrow 0} = \frac{\sigma}{m^2 \alpha^2} = \frac{Dn_0^2}{\alpha^2}, \quad (24)$$

а при $\omega \rightarrow \infty$ стремится к нулю:

$$G_{\delta\bar{n}}(\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = 0. \quad (25)$$

Из выражений (8) и (20) для спектральной плотности флуктуаций массового потока $G_{q_m}(\omega)$ получаем

$$G_{q_m}(\omega) = \frac{\sigma D \omega}{D\omega + \alpha\sqrt{2D\omega} + \alpha^2}. \quad (26)$$

Из выражения (26) следует, что при $\omega \rightarrow \infty$ величина $G_{q_m}(\omega)$ стремится к интенсивности флуктуаций случайной составляющей массо-

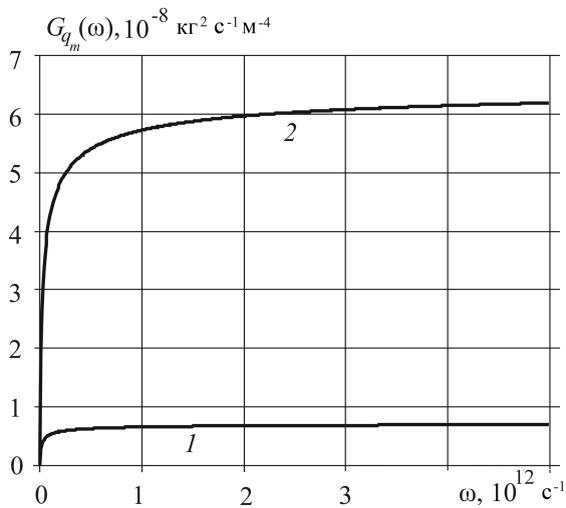


Рис. 2. Графики спектральных плотностей $G_{q_m}(\omega)$ для воды (1) и этилового спирта (2)

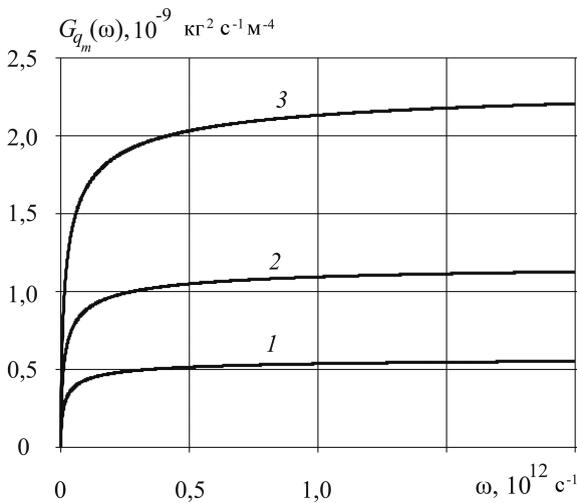


Рис. 3. Графики спектральных плотностей $G_{q_m}(\omega)$ для воды при температурах 273 (1), 278 (2) и 283 К (3)

вого потока, т.е.

$$G_{q_m} |_{\omega \rightarrow \infty} = \sigma. \quad (27)$$

Графики, рассчитанные по формуле (26), приведены на рис. 2 для воды и этилового спирта. Рис. 3 иллюстрирует изменение графика спектральной плотности $G_{q_m}(\omega)$ для воды в зависимости от температуры. Расслоение графиков связано с тем, что параметр α зависит от температуры (см. формулу (18)). С повышением температуры увеличивается также концентрация насыщенного водяного пара, входящая в выражение (17).

Масса жидкости, испарившейся с единицы площади поверхности к моменту времени t ,

$$M(t) = \int_0^t q_m(\tau) d\tau, \quad (28)$$

тогда спектральная плотность флуктуаций величины $M(t)$ согласно (26) имеет вид

$$G_M(\omega) = \frac{\sigma D}{\omega \left(D\omega + \alpha\sqrt{2D\omega} + \alpha^2 \right)}. \quad (29)$$

Из выражения (29) следует, что в области малых частот спектральная плотность $G_M(\omega)$ обратно пропорциональна частоте:

$$G_M(\omega)|_{\omega \rightarrow 0} = \frac{\sigma D}{\alpha^2 \omega} = \frac{D^2 m^2 n_0^2}{\alpha^2 \omega}. \quad (30)$$

Это указывает на то, что флуктуации испарившейся к моменту времени t массы жидкости $M(t)$ имеют характер фликкер-шума [6]. Графики функции (29) для различных веществ приведены на рис. 4.

Найдем одномерную и L -мерные характеристические функции флуктуаций величины $\delta n(t)$. Решение для функции $\delta n(t)$ будем искать в виде интегрального оператора Вольтерра первого рода, имеющего вид свертки

$$\delta n(t) = \int_0^t K(t - \tau) \xi(\tau) d\tau, \quad (31)$$

где $K(t - \tau)$ — ядро интегрального уравнения, подлежащее определению.

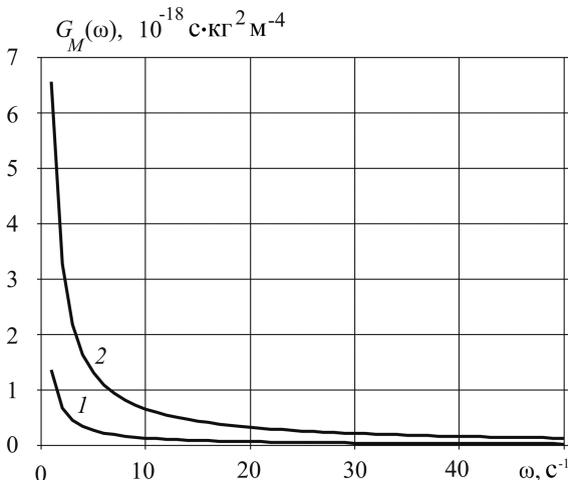


Рис. 4. Графики спектральных плотностей $G_M(\omega)$ для воды (1) и этилового спирта (2)

Выполнив преобразование Лапласа последнего выражения и приравняв полученный образ $\delta\hat{n}(p)$ аналогичной величине из соотношения (20), для образа ядра $\hat{K}(p)$ получим выражение

$$\hat{K}(p) = \frac{1}{m(\sqrt{Dp} + \alpha)}. \quad (32)$$

Выполнив обратное преобразование Лапласа [7, с. 210], получим

$$K(t - \tau) = \frac{1}{m\sqrt{D}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi(t - \tau)}} - \frac{\alpha}{\sqrt{D}} \exp\left[\frac{\alpha^2(t - \tau)}{D}\right] \operatorname{erfc}\left[\frac{\alpha\sqrt{t - \tau}}{\sqrt{D}}\right] \right\}, \quad (33)$$

где функция $\operatorname{erfc}(x)$ — дополнительный интеграл ошибок [8]:

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-s^2} ds. \quad (34)$$

В связи с тем, что функция $\operatorname{erfc}(x)$ с увеличением x убывает быстрее, чем возрастает функция $\exp(x^2)$, при $t - \tau \rightarrow \infty$ ядро $K(t - \tau)$ стремится к нулю:

$$K(t - \tau)|_{(t-\tau) \rightarrow \infty} = 0. \quad (35)$$

График функции $K(t - \tau)$, рассчитанный по формуле (33), приведен на рис. 5 (для простоты значения всех параметров принимались равными единице). При реальных значениях параметров функция $K(t - \tau)$ имеет такой же характер.

Очевидно, что для массового потока $q_m(t)$ можно записать выражение, аналогичное (31),

$$q_m(t) = \int_0^t R(t - \tau)\xi(\tau)d\tau, \quad (36)$$

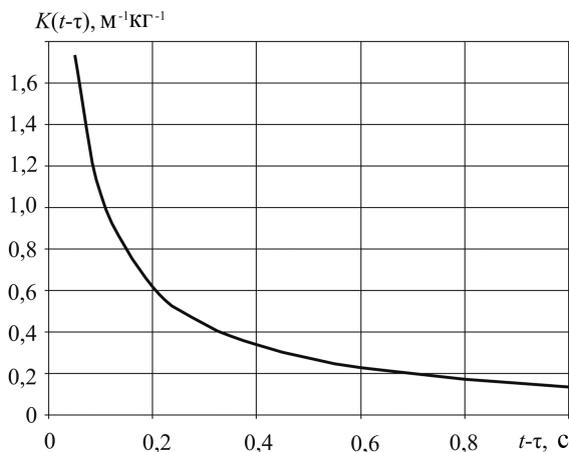


Рис. 5. График функции $K(t - \tau)$

где ядро

$$R(t - \tau) = \delta(t - \tau) - \alpha m K(t - \tau). \quad (37)$$

Здесь $\delta(t - \tau)$ — дельта-функция.

Воспользовавшись методом, изложенным в работе [9], для одномерной ($g_1(\lambda; t)$) и L -мерной ($g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L)$) характеристических функций случайного процесса $\delta n(t)$ получим выражения

$$g_1(\lambda; t) = \exp \left[-\frac{1}{2} i \sigma \lambda^2 \int_0^t K^2(t - \tau) d\tau \right]; \quad (38)$$

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \exp \left[-\frac{1}{2} \sigma i \left(\sum_{k=1}^L \lambda_k^2 \int_0^{t_k} K^2(t_k - \tau) d\tau + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \sum_{\substack{k, l=1, \\ k < l}}^L \lambda_k \lambda_l \int_0^{t_k} K(t_k - \tau) K(t_l - \tau) d\tau \right) \right]. \quad (39)$$

Характеристические функции (38) и (39) позволяют найти любые статистические характеристики случайного процесса $\delta n(t)$. В частности для его математического ожидания $\langle \delta n(t) \rangle$ и момента второго порядка $\langle \delta n(t_1) \delta n(t_2) \rangle$ имеем

$$\langle \delta n(t) \rangle = \left. \frac{\partial g_1(\lambda; t)}{i \partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = 0; \quad (40)$$

$$\langle \delta n(t_1) \delta n(t_2) \rangle = \left. \frac{\partial^2 g_2(\lambda_1, \lambda_2; t_1, t_2)}{i \partial \lambda_1 \partial \lambda_2} \right|_{\substack{\lambda_1=0, \\ \lambda_2=0}} = \sigma \int_0^{t_1} K(t_1 - \tau) K(t_2 - \tau) d\tau. \quad (41)$$

В выражении (41) считается, что $t_1 \leq t_2$.

Полагая $t = t_1 = t_2$, из формулы (41) находим дисперсию процесса $\delta n(t)$

$$\langle \delta n^2(t) \rangle = \sigma \int_0^t K^2(t - \tau) d\tau. \quad (42)$$

Очевидно, что статистические характеристики флуктуаций массового потока $q_m(t)$ определяются формулами (38)–(42), в которых ядро $K(t - \tau)$ заменено на ядро $R(t - \tau)$.

Диффузия пара, находящегося над поверхностью сферической капли жидкости (общая постановка задачи). Рассмотрим процесс диффузии в пространстве, в котором находится неподвижная сферическая капля жидкости с первоначальным радиусом R_0 (рис. 6).

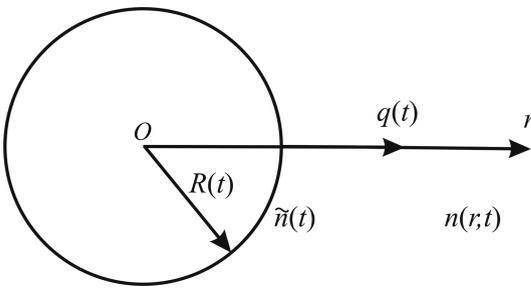


Рис. 6. Диффузия пара над поверхностью частицы сферической формы

Поместим начало сферической системы координат в центр капли и обозначим, как и ранее, через $\tilde{n}(t)$ концентрацию частиц у поверхности жидкости. Ввиду симметрии задачи концентрация частиц пара будет зависеть только от расстояния до центра капли r и времени t . В этом случае уравнение диффузии примет вид

$$\frac{\partial n(r, t)}{\partial t} = \frac{D}{r} \frac{\partial^2 (rn(r, t))}{\partial r^2} \quad (43)$$

с граничным условием

$$n(r, t)|_{r=R} = \tilde{n}(t) \quad (44)$$

и начальной концентрацией частиц пара

$$n(r, t)|_{t=0} = n_0. \quad (45)$$

Здесь R — радиус частицы, который в общем случае изменяется с течением времени; n_0 — концентрация насыщенного пара.

Выражения для массового потока с поверхности капли имеют вид [11]

$$q_m(t) = -\frac{mD}{R} (\tilde{n}(t) - n_0) + \xi(t); \quad (46)$$

$$q_m(t) = -mD \frac{\partial n(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=R}. \quad (47)$$

Приравнявая соотношения (46) и (47), получаем

$$-\frac{mD}{R} (\tilde{n}(t) - n_0) + \xi(t) = -mD \frac{\partial n(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=R}. \quad (48)$$

Решение системы уравнений (43)–(45) находим с помощью введения вспомогательной функции

$$F(r, t) = rn(r, t). \quad (49)$$

Подстановка (49) в (43)–(45) приводит к системе уравнений для $F(r, t)$

$$\frac{\partial F(r, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 F(r, t)}{\partial r^2}; \quad (50)$$

$$F(r, t)|_{r=R} = R\tilde{n}(t); \quad (51)$$

$$F(r, t)|_{t=0} = n_0 r, \quad r > R. \quad (52)$$

Видно, что функция $F(r, t)$ формально соответствует одномерному уравнению диффузии.

Запишем выражение для производной $\left. \frac{\partial F(r, t)}{\partial r} \right|_{r=R}$ с учетом (47):

$$\left. \frac{\partial F(r, t)}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{R}{mD} q_m(t) + \tilde{n}(t). \quad (53)$$

Квазистационарный случай. Рассмотрим случай капли с постоянным радиусом $R(t) = R_0$. Другими словами, будем искать статистические характеристики соответствующих физических случайных процессов (потока, концентрации у поверхности капли и др.), пренебрегая изменением радиуса частицы. Это, в частности, физически обосновано в случае частиц большого радиуса и относительно небольшого промежутка времени наблюдения процесса диффузии над поверхностью капли.

Решая задачу (50)–(52) аналогично задаче (1)–(3) с учетом определения (49) и формулы (53), для массового потока с поверхности сферической частицы радиусом R находим выражение

$$q_m(t) = \frac{mD}{R_0} \int_0^t \left(\frac{R_0}{\sqrt{\pi D}} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} + 1 \right) \frac{d\tilde{n}(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (54)$$

Введем, как и ранее, обозначения $\delta n(t) = \tilde{n}(t) - n_0$ и $Z(t) = \frac{d\delta n(t)}{dt}$, тогда с учетом формулы (46) получим

$$\frac{mD}{R_0} \int_0^t \left(\frac{R_0}{\sqrt{\pi D}} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} + 2 \right) Z(\tau) d\tau = \xi(t). \quad (55)$$

Видно (см. выражение (16)), что интегральное уравнение для случайного процесса $Z(t)$ с точностью до постоянных совпадает с полученным ранее уравнением для процесса диффузии над плоской поверхностью жидкости. Таким образом, сразу можно сказать, что статистические характеристики указанных случайных процессов будут иметь сходный характер. Отметим, что это справедливо для рассматриваемого квазистационарного случая.

Аналогично полученным ранее характеристикам для спектральных плотностей массового потока $G_{q_m}(\omega)$, разности концентраций у поверхности капли и концентрации насыщенного пара $G_{\delta n}(\omega)$ и массы жидкости $G_M(\omega)$, испарившейся с поверхности капли к моменту времени t , имеем

$$G_{q_m}(\omega) = \frac{D + R_0\sqrt{2D\omega} + R_0^2\omega}{4D + 2R_0\sqrt{2D\omega} + R_0^2\omega} \sigma; \quad (56)$$

$$G_{\delta n}(\omega) = \frac{R_0^2}{m^2 D} \frac{\sigma}{4D + 2R_0\sqrt{2D\omega} + R_0^2\omega}; \quad (57)$$

$$G_M(\omega) = \frac{\sigma}{\omega^2} \frac{D + R_0\sqrt{2D\omega} + R_0^2\omega}{4D + 2R_0\sqrt{2D\omega} + R_0^2\omega} \sigma. \quad (58)$$

Интенсивность белого шума σ , как и прежде, определяется формулой (17). Графики, рассчитанные по выражению (56) для воды и этилового спирта, приведены на рис. 7. Они имеют вид, аналогичный графикам соответствующих спектральных плотностей для диффузии над плоской поверхностью жидкости.

Кривые на рис. 8 иллюстрируют влияние радиуса частицы на спектральную плотность массового потока $G_{q_m}(\omega)$.

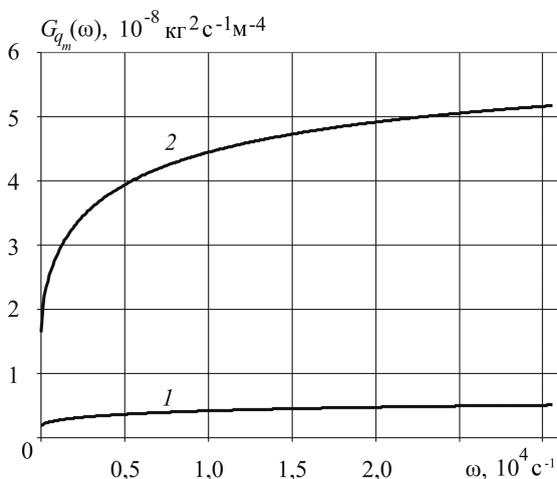


Рис. 7. Графики спектральной плотности массового потока $G_{q_m}(\omega)$ для воды (1) и этилового спирта (2)

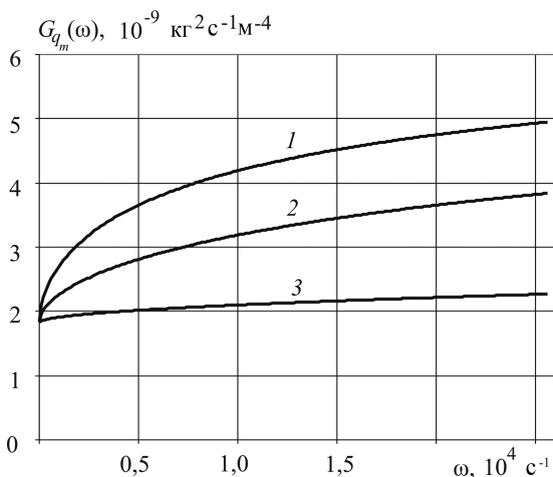


Рис. 8. Графики спектральной плотности массового потока $G_{q_m}(\omega)$ для воды при начальных радиусах капли 100, 50 и 10 мкм (кривые 1, 2 и 3)

Представляя массовый поток с помощью интегрального оператора (36) для ядра $K(t - \tau)$, в рассматриваемом квазистационарном случае испарения с поверхности капли имеем

$$K(t - \tau) = \frac{1}{m\sqrt{D}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{t - \tau}} - \frac{2\sqrt{D}}{\sqrt{R_0}} \exp \left[\frac{4D(t - \tau)}{R_0} \right] \operatorname{erfc} \left[\frac{4D(t - \tau)}{R_0} \right] \right\}. \quad (59)$$

Использование выражения (59) позволяет найти характеристические функции любого порядка для массового потока аналогично соотношениям (38) и (39), а следовательно, и моменты любого порядка.

Случай диффузии над поверхностью сферической капли с изменяющимся радиусом. Рассматриваемый случай капли с неизменным радиусом является первым приближением к реальности, так как результирующий поток частиц с поверхности капли приводит к изменению ее массы, а следовательно, и радиуса. Особенно важно учитывать изменение радиуса в случае малых капель (микронного размера), так как даже в течение короткого промежутка времени их радиус может измениться настолько, что квазистационарное приближение становится неприменимым. И наконец, при расчете времени жизни капли (до ее исчезновения) учет изменения радиуса частицы необходим принципиально.

Однако решение поставленной задачи достаточно сложно (как известно, задача Стефана может быть решена аналитически в очень ограниченном числе случаев [10]). В связи с этим получение статистических характеристик физических величин, описывающих поставленную задачу, может быть осуществлено только с применением численных методов. При численном расчете использованы формулы, полученные для квазистационарного случая, с учетом изменения радиуса частицы.

Изменение радиуса частицы за время dt легко найти, зная массовый поток $q_m(t)$.

За время dt масса капли M_k изменится на величину

$$dM_k = -q_m(t) 4\pi R^2(t) dt \quad (60)$$

(знак “минус” связан с выбором положительного направления массового потока). С другой стороны массу капли можно определить согласно выражению

$$M_k = \rho \frac{4}{3} \pi R^3(t), \quad (61)$$

где ρ — плотность жидкости. Находя производную $\frac{dM_k}{dt}$ из формулы (61) и приравнявая ее производной из выражения (60), получаем

$$\frac{dR(t)}{dt} = -\frac{q_m(t)}{\rho}. \quad (62)$$

Полученная зависимость радиуса капли от текущего массового потока через ее поверхность при численном расчете использовалась на каждом шаге итерации.

Расчеты проведены при числе шагов итерации 30000, шаге по времени $\Delta t = 1$ с, массе молекул, составляющих каплю, $m = 3 \cdot 10^{-23}$ кг, коэффициенте диффузии $D = 10^{-5}$ м²/с, начальном радиусе частицы $R_0 = 1$ мкм, плотности жидкости $\rho = 1000$ кг/м³, концентрации насыщенного пара $n_0 = 10^{23}$ м⁻³; интенсивность флуктуирующей составляющей массового потока рассчитывалась по формуле (17).

Численный расчет осложнялся тем, что использование реального значения массы отдельной молекулы жидкости приводило к необходимости очень большого числа шагов итерации для достижения момента исчезновения капли, что в свою очередь требовало значительных затрат машинного времени. В связи с этим при численных расчетах масса молекулы была завышена, что формально соответствует уменьшению числа молекул, составляющих каплю. Это позволило значительно сократить необходимое количество машинного времени и, следовательно, получить такое число независимых реализаций, которое позволяет говорить об удовлетворительной статистической достоверности полученных результатов. Следует отметить, что завышение массы отдельной молекулы не приводит к изменению характера статистических характеристик рассматриваемого процесса диффузии, а оказывает влияние лишь на соответствующие постоянные параметры, зависящие от конкретной начальной постановки задачи.

При численном расчете был выбран также относительно большой шаг итерации по времени, что требовалось для устойчивости расчета при росте шага итерации. Однако это также не влияет на характер статистических характеристик процесса.

На рис. 9 приведен график зависимости радиуса частицы от шага итерации N , на рис. 10 — график потока, а на рис. 11 — изменение концентрации частиц у поверхности капли. График на рис. 12 иллюстрирует спектральную плотность массового потока $G_{q_m}(\omega)$, показанного на рис. 10, а также аппроксимационную зависимость найденной спектральной плотности (показанную белым цветом). Как и следовало ожидать, она представляет собой прямую, параллельную оси абсцисс. Уравнение, описывающее кривую аппроксимации, имеет вид

$$G_{q_m}(\omega) = 4 \cdot 10^{-9} + 7 \cdot 10^{-14} \omega. \quad (63)$$

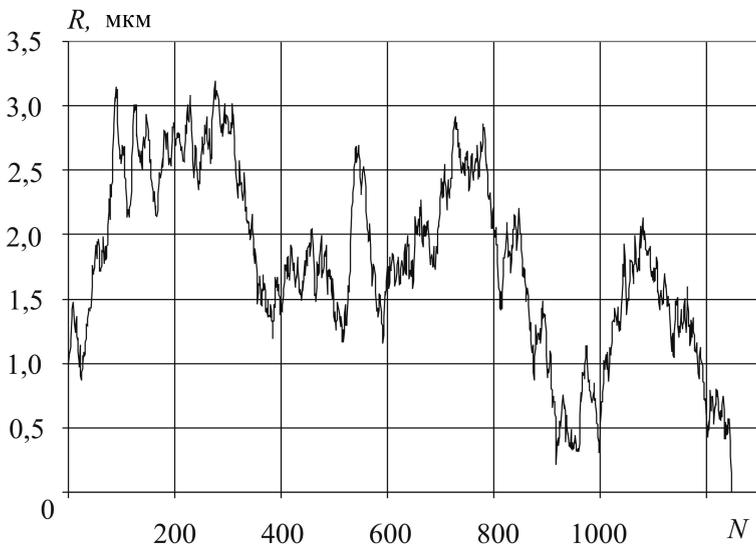


Рис. 9. Изменение радиуса капли R в зависимости от шага итерации

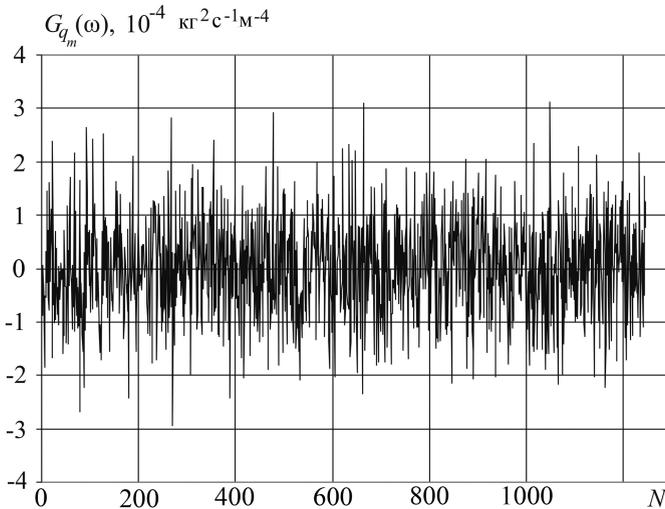


Рис. 10. Изменение массового потока в зависимости от шага итерации

Это говорит о том, что флуктуации массового потока представляют собой белый шум, как и было показано ранее аналитически.

На рис. 13 изображен в логарифмическом масштабе график спектральной плотности для флуктуаций радиуса сферической капли $G_R(\omega)$. Как и ожидалось (см. формулу (62)), эта зависимость обратно пропорциональна второй степени частоты. Для кривой аппроксимации, построенной по степенному закону, имеем выражение

$$G_R(\omega) = 2 \cdot 10^{-6} \omega^{-1,9}. \quad (64)$$

По результатам 3000 независимых реализаций найдены те моменты итерационного процесса, при которых происходит исчезновение кап-

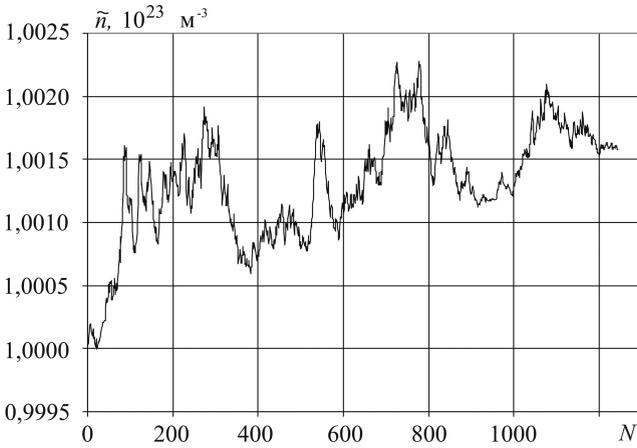


Рис. 11. Изменение концентрации у поверхности капли $\tilde{n}(t)$ в зависимости от шага итерации

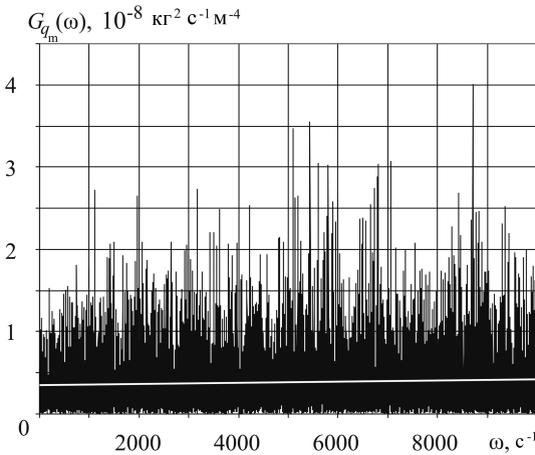


Рис. 12. Графики спектральной плотности флуктуаций массового потока G_{q_m} и аппроксимационной зависимости

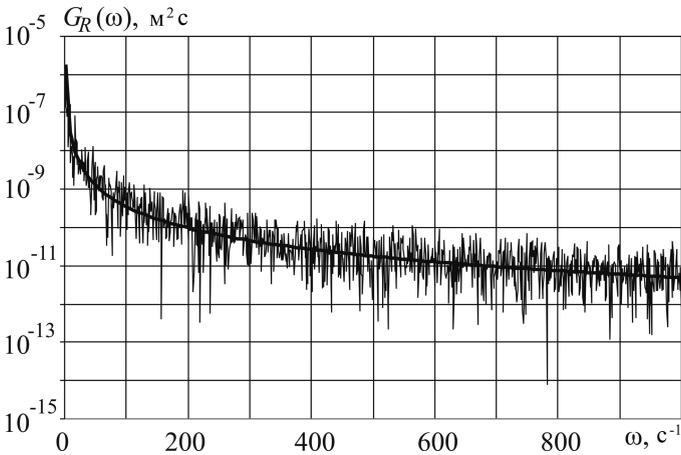


Рис. 13. График спектральной плотности радиуса капли $G_R(\omega)$ и кривая аппроксимации

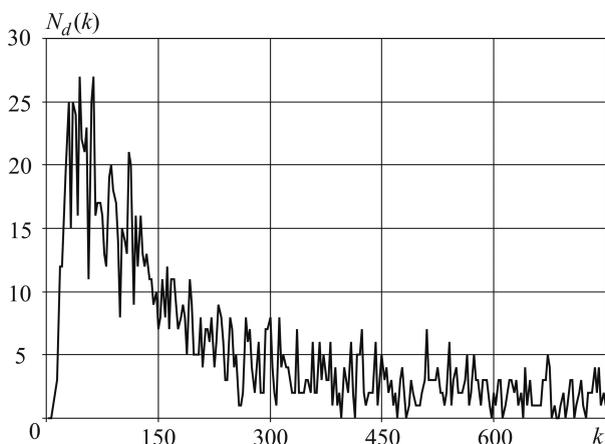


Рис. 14. График распределения числа частиц $N_d(k)$, исчезнувших на k -м шаге итерации

ли. На рис. 14 изображен график распределения числа частиц $N_d(k)$, исчезнувших в на k -м шаге итерации. Видно, что эта зависимость подобна зависимости для пуассоновского процесса.

Полученные в работе результаты могут быть использованы при исследовании капель атмосферного аэрозоля в гидрометеорологических исследованиях, например, при прогнозировании времени исчезновения тумана, экологическом мониторинге загрязнения городов и промышленных территорий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Е п и ф а н о в Г. И., М о м а Ю. А. Твердотельная электроника. – М.: Высш. шк., 1986. – 304 с.
2. Д о в г а л ю к Ю. А., И в л е в Л. С. Физика водных и других атмосферных аэрозолей. – СПб: Изд-во СПбГУ, 1998. – 321 с.
3. Р е м и з о в А. Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высш. шк., 1999. – 616 с.
4. Т и х о н о в А. Н., С а м а р с к и й А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
5. М о р о з о в А. Н. Необратимые процессы и броуновское движение. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. – 332 с.
6. Б о ч к о в Г. Н., К у з о в л е в Ю. Е. Новое в исследованиях $1/f$ -шума // Успехи физических наук. – 1983. – Т. 141, вып. 1. – С. 151–176.
7. П р у д н и к о в А. П., Б р ы ч к о в Ю. А., М а р и ч е в О. И. Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1981. – 800 с.
8. Н и к и ф о р о в А. Ф., У в а р о в В. Б. Специальные функции математической физики. – М.: Наука, 1984. – 342 с.
9. М о р о з о в А. Н. Метод описания немарковских процессов, задаваемых линейным интегральным преобразованием // Вестник МГТУ. Сер. “Естественные науки”. – 2004. – № 3. – С. 47–56.
10. Р у б и н ш т е й н Л. И. Проблема Стефана. – Рига: Звайгзне, 1967. – 458 с.
11. Ф у к с Н. А. Испарение и рост капель в газообразной среде. – М.: Изд-во АН СССР, 1958. – 91 с.

Статья поступила в редакцию 23.10.2008

Наталья Александровна Михеева родилась в 1985 г., студентка 6 курса МГТУ им. Н.Э. Баумана.

N.A. Mikheeva (b. 1985), student of the Bauman Moscow State Technical University.



Андрей Николаевич Морозов, родился в 1959 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1982 г., д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 100 научных работ в области прецизионных измерений и физической кинетики.

A.N. Morozov (b. 1959), graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1982. D. Sc. (Phys.-Math.), professor, head of “Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 100 publications in the field of high precision measuring systems and physical kinetics theory.

Алексей Владимирович Скрипкин родился в 1983 г., окончил Курский государственный университет в 2005 г. Аспирант кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 10 работ в области физической кинетики и взаимодействия электромагнитных полей с проводящими средами.

A.V. Skripkin (b. 1983) graduated from Kursk State University in 2005. Postgraduate student of “Physics” Department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 10 publications in the field of physical kinetics theory and interaction of electromagnetic waves with conducting media.

ЖУРНАЛ “ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА имени Н.Э. БАУМАНА”

В журнале публикуются наиболее значимые результаты фундаментальных и прикладных исследований и совместных разработок, выполненных в МГТУ имени Н.Э. Баумана и других научных и промышленных организациях.

Журнал “Вестник МГТУ имени Н.Э. Баумана” в соответствии с постановлением Высшей аттестационной комиссии Федерального агентства по образованию Российской Федерации включен в перечень периодических и научно-технических изданий, в которых рекомендуется публикация основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора наук.

Подписку на журнал “Вестник МГТУ имени Н.Э. Баумана” можно оформить через агентство “Роспечать”.

Подписывайтесь и публикуйтесь!

Подписка по каталогу “Газеты, журналы” агентства “Роспечать”

Индекс	Наименование серии	Объем выпуска	Подписная цена (руб.)	
		Полугодие	3 мес.	6 мес.
72781	“Машиностроение”	2	250	500
72783	“Приборостроение”	2	250	500
79982	“Естественные науки”	2	250	500

Адрес редакции журнала “Вестник МГТУ имени Н.Э. Баумана”: 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Тел.: (499) 263-62-60; (499) 263-67-98 (499) 263-60-45.

E-mail: press@bmstu.ru