

К. Ф. К о м к о в

**ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ
ИЗМЕНЕНИЯ ВИДА ДЕФОРМИРОВАННОГО
СОСТОЯНИЯ И СДВИГОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК
ПЛАСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ**

В предположении, что нелинейность, вызванная пластической деформацией, может быть описана тензорно-нелинейными уравнениями, проведен анализ скалярных функций, характеризующих формоизменение. Показано, что эти функции могут быть определены по экспериментальным диаграммам при простых напряженных состояниях. Результаты исследований представлены в виде графиков, из которых следует, что изменение всех характеристик наиболее отчетливо проявляется при напряжениях, следующих за пределом текучести.

Ключевые слова: пластичность, формоизменение, девиатор, подобие, диаграмма, нелинейность, свойство, сталь.

Физико-механика процесса деформирования стала более понятна при его рассмотрении как совокупности трех взаимосвязанных процессов — изменения объема, формы и вида деформированного состояния. Для первых двух прямые испытания на растяжение (сжатие), объемное сжатие и чистый сдвиг позволяют получить сведения о механических свойствах различных сред, которые необходимы для решения практических задач и являются исходными данными при теоретическом обобщении.

Изучение вида напряженного состояния началось в сороковых годах прошлого столетия экспериментальными исследованиями на трубчатых образцах. Для оценки изменения вида деформированного состояния результаты оформлялись в виде диаграмм Лоде. Отсутствие теоретических предпосылок к анализу экспериментальных результатов приводило к весьма противоречивым выводам о форме этой диаграммы [1–3]. Однако многие работы на эту тему показали необходимость изучения механических свойств материалов в зависимости от уровня и вида напряженного состояния.

Цель настоящей работы — показать практическую возможность восстановления закономерности изменения деформированного состояния и найти взаимосвязь с характеристиками процесса формоизменения. Как отмечено в [4], решение этой задачи необходимо начинать с анализа тензорно-нелинейных уравнений [5] связи напряжений с деформациями

$$\sigma_{ij} = F_0 \delta_{ij} + F_1 \varepsilon_{ij} + F_2 \varepsilon_{i\alpha} \varepsilon_{\alpha j} \quad (1)$$

и деформаций с напряжениями

$$e_{ij} = \Phi_0 \delta_{ij} + \Phi_1 \sigma_{ij} + \Phi_2 \sigma_{i\alpha} \sigma_{\alpha j}, \quad i, j, \alpha = 1, 2, 3, \quad (2)$$

где σ_{ij} — тензор напряжений; ε_{ij} — тензор деформаций; Φ_β , F_β ($\beta = 0, 1, 2$) — скалярные функции инвариантов тензоров напряжений и деформаций соответственно.

Для придания физического смысла основным сдвиговым характеристикам полезно ввести в рассмотрение величины, определяющие жесткость среды в направлении главных касательных напряжений,

$$G_i = \tau_i / \gamma_i. \quad (3)$$

Здесь $\tau_i = (\sigma_j - \sigma_\alpha) / 2$ — напряжения и $\gamma_i = \varepsilon_j - \varepsilon_\alpha$ — деформации сдвига ($i, j, \alpha = 1, 2, 3; i \neq j \neq \alpha$), а $\sigma_i = S_0 c_i / 3 + \sigma_0$ — главные напряжения, $\varepsilon_i = e_0 d_i / 2 + \varepsilon_0$ — главные деформации; $c_1 = 2 \cos \theta$, $c_2 = \sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta$, $c_3 = -(\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta)$, θ — угол вида напряженного состояния, определяемый соотношением

$$\theta = 1/3 \arccos[9S_{ij}S_{j\alpha}S_{\alpha i} / (2S_0^3)], \quad 0 \leq \theta \leq \pi/3; \quad (4)$$

$d_1 = 2 \cos v$, $d_2 = \sqrt{3} \sin v - \cos v$, $d_3 = -(\sqrt{3} \sin v + \cos v)$, v — угол вида деформированного состояния

$$v = 1/3 \arccos[4e_{ij}e_{j\alpha}e_{\alpha i} / (3e_0^3)], \quad 0 \leq v \leq \pi/3; \quad (5)$$

$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}$, $\sigma_0 = 1/3 \sigma_{ii}$, $S_0 = 3/2 S_{ij} S_{ij}$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_0 \delta_{ij}$, $\varepsilon_0 = 1/3 \varepsilon_{ii}$, $e_0 = 2/3 e_{ij} e_{ij}$; S_{ij} — девиатор напряжений, σ_0 — среднее напряжение, S_0 — интенсивность напряжений; e_{ij} — девиатор деформаций, ε_0 — средняя деформация, e_0 — интенсивность деформаций.

Определяя среднее значение жесткостей и среднее квадратическое отклонение (с точностью до постоянного множителя) как

$$G_m = G_i / 3; \quad (6)$$

$$G_d = \{8[(G_1 - G_2)^2 + (G_2 - G_3)^2 + (G_3 - G_1)^2] / 9\}^{1/2}, \quad (7)$$

можно преобразовать уравнения (1) с разделением тензора напряжений на девиатор и шаровой тензор и привести их к следующему виду:

$$S_{ij} = 2G_m e_{ij} - G_d (e_{i\alpha} e_{\alpha j} - 1/2 e_0^2 \delta_{ij}) / e_0; \quad (8)$$

$$\sigma_0 = F_0 + 2G_m \varepsilon_0 - G_d (1/2 - \varepsilon_0^2 / e_0^2) e_0. \quad (9)$$

При этом скалярные функции, входящие в (1), принимают выражения

$$F_1 = 2(G_m + G_d \varepsilon_0 / e_0), \quad F_2 = G_d / e_0. \quad (10)$$

Сдвиговые характеристики, введенные соотношениями (3), можно представить в следующем виде:

$$G_i = G_v g_i, \quad (11)$$

где смешанный инвариант

$$G_v = S_0/(3e_0) \quad (12)$$

в работе В.В. Новожилова [6] введен как обобщенный модуль сдвига. В общем случае он представляет собой функцию инвариантов тензора деформаций. Характеристики G_m и G_d , исходя из их определений (6) и (7), также можно сопоставить с модулем (12):

$$G_m = G_v g_m; \quad (13)$$

$$G_d = G_v g_d. \quad (14)$$

Коэффициенты

$$g_m = \sin(2v + \theta)/\sin 3v, \quad (15)$$

$$g_d = 4 \sin(\theta - v)/\sin 3v, \quad (16)$$

$$g_i = (c_j - c_\alpha)/(d_j - d_\alpha) \quad (i, j, \alpha = 1, 2, 3; \quad i \neq j \neq \alpha) \quad (17)$$

являются функциями только угла v при $\theta = \text{const}$. Несложные преобразования соотношений (13) и (14) дают

$$G_v = (G_m^2 - 1/2 G_m G_d \cos 3v + G_d^2/16)^{1/2}; \quad (18)$$

$$\omega(v) = \text{arctg}[g_d \sin 3v/(4g_m - g_d \cos 3v)], \quad (19)$$

где $\omega(v) = \theta - v$ — фаза подобия девиаторов напряжений и деформаций [6].

Аналогично преобразуя уравнения (2) с привлечением сдвиговых податливостей $\phi_i = \gamma_i/\tau_i = 1/G_i$ в направлении главных касательных напряжений и их среднего и среднего квадратического значений (с точностью до постоянного множителя)

$$\Phi_m = \phi_i/3; \quad (20)$$

$$\Phi_d = \{[(\phi_1 - \phi_2)^2 + (\phi_2 - \phi_3)^2 + (\phi_3 - \phi_1)^2]/8\}^{1/2}, \quad (21)$$

приводим их к следующему виду:

$$e_{ij} = \Phi_m S_{ij}/2 + \Phi_d (S_{i\alpha} S_{\alpha j} - 2/9 S_0^2 \delta_{ij})/S_0; \quad (22)$$

$$\varepsilon_0 = \Phi_0 + \Phi_m \sigma_0/2 + \Phi_d (2/9 - \sigma_0^2/S_0^2) S_0. \quad (23)$$

Используя уравнения (22), из определений (20) и (21) устанавливаем зависимость характеристик Φ_m и Φ_d от угла v при $\theta = \text{const}$, а именно

$$\Phi_m = \Phi_\theta \sin(2\theta + v)/\sin \theta; \quad (24)$$

$$\Phi_d = 3 \Phi_\theta \sin(\theta - v)/(2 \sin 3\theta). \quad (25)$$

Это, в свою очередь, дает возможность найти связь между сдвиговыми характеристиками в виде

$$\Phi_\theta = 1/G_v = (\Phi_m^2 + 4/3 \Phi_m \Phi_d \cos 3\theta + 4/9 \Phi_d^2)^{1/2} \quad (26)$$

и еще одно соотношение для определения фазы подобия девиаторов:

$$\omega(\theta) = \arctg[2\Phi_d \sin 3\theta / (3\Phi_m + 2\Phi_d \cos 3\theta)]. \quad (27)$$

Из (27) следует, что изменение вида деформированного состояния зависит только от сдвиговых характеристик, как бы ни был сложен закон связи шаровых тензоров напряжений и деформаций, например в самом общем виде представленный выше уравнениями (9) и (23).

В работе [7] показано, что фаза подобия девиаторов может быть выражена как

$$\operatorname{tg} \omega = \Delta A / A_\omega. \quad (28)$$

Числитель в этом соотношении может рассматриваться как работа касательных напряжений на взаимных деформациях сдвига, знаменатель — как работа главных касательных напряжений на соответствующих деформациях.

Поскольку нелинейная деформация проходит с отклонением от принципа взаимности работ, то при деформировании, проходящем с заметным снижением сопротивления и в соответствии с соотношением (27), фаза подобия принимает положительное значение. Следовательно, угол v с ростом деформации отстает от угла θ .

Этот вывод следует только из анализа тензорно-нелинейных уравнений, соотношений (19), (27) и (28). Он позволил существенно развить предложенную ранее [7] методику определения фазы подобия девиаторов и численными исследованиями подтвердить, что $\omega(\theta) = \omega(v)$, и однозначно найти значение угла вида деформированного состояния

$$v = \theta - \omega(\theta) \quad (29)$$

при наличии сведений о сдвиговых характеристиках Φ_m и Φ_d .

Как и ранее [7], предлагаемая методика опирается на равенства

$$\phi_1 = \Phi_c, \quad \phi_2 = \Phi_\tau, \quad \phi_3 = \Phi_p, \quad (30)$$

которые выявлены при анализе податливостей в направлениях главных касательных напряжений. В этих равенствах величины Φ_p , Φ_τ , Φ_c представляют собой податливость Φ_θ для частных напряженных состояний $\theta = 0$, $\theta = \pi/6$ и $\theta = \pi/3$.

Исходными данными для реализации методики служат диаграммы $S_0 - e_0$, полученные по результатам испытаний при пропорциональном изменении напряжений. При ее отработке было найдено, что с учетом формулы (28) удобным аргументом для искомых величин следует считать смешанный инвариант $A = S_0 e_0 / 2$, характеризующий уровень напряженно-деформированного состояния. Определяя по диаграммам числовые значения S_0 для нескольких фиксированных значений e_0 ,

необходимо вычислить значения смешанного инварианта. Полученная таблица позволяет перестроить диаграммы $S_0 - e_0$ в графики зависимости $S_0 - A$ и $e_0 - A$.

Далее для каждого заданного значения A_j ($j = 1 \dots n$) необходимо найти соответствующие им S_0 и e_0 по трем графикам. Значения последних величин позволяют определить податливости Φ_p , Φ_c и Φ_τ , а затем в первом приближении вычислить характеристики

$$\Phi_m = (\Phi_c + \Phi_\tau + \Phi_p)/3; \quad (31)$$

$$\Phi_d = \{[(\Phi_c - \Phi_\tau)^2 + (\Phi_\tau - \Phi_p)^2 + (\Phi_p - \Phi_c)^2]/8\}^{1/2}. \quad (32)$$

Здесь они определяются по формулам (20) и (21), в которых все ϕ_i относятся не к одному трехосному состоянию, а к трем отмеченным выше состояниям. Именно в этом состоит основное допущение предложенной методики.

Анализ экспериментальных результатов, изложенных в [8] и [9], показал, что положение кривых $S_0 - e_0$, полученных при различных напряженных состояниях, не произвольное, а подчиняется закономерности, которую предлагается описать зависимостью

$$\Phi_\theta = a_1 + a_2\theta + a_3\theta^2. \quad (33)$$

Это является вторым допущением. Коэффициенты a_i находятся для каждого уровня A_j :

$$a_1 = \Phi_p, \quad a_2 = 3(4\Phi_\tau - 3\Phi_p - \Phi_c)/\pi, \quad a_3 = 18(\Phi_p - 2\Phi_\tau + \Phi_c)/\pi^2. \quad (34)$$

Вычисления проводятся при $\theta = \text{const}$ с шагом по A , равным A_τ . Последняя величина представляет собой значение работы, соответствующей началу пластической деформации, например, при растяжении. При определении пределов текучести для любого θ принимается зависимость, аналогичная соотношению (33). Тогда эти характеристики легко устанавливаются по трем значениям пределов текучести: S_{tp} , S_{tr} , S_{tc} , относящимся соответственно к $\theta = 0$, $\theta = \pi/6$ и $\theta = \pi/3$. Аналогично находятся параметры предельного (разрушающего) состояния.

На второй итерации после определения значений Φ_θ по (33), $\text{tg } \omega(\theta)$ по (27) и $v = \theta - \text{arctg } \omega(\theta)$ по (29) вновь вычисляются характеристики Φ_m , Φ_d уже по соотношениям (24), (25), а $\omega(\theta)$ и v — по-прежнему, используя (27) и (29). Третья итерация к изменению значений перечисленных величин не приводит, поэтому характеристики G_v по формуле $G_v = 1/\Phi_\theta$, G_m по (13), G_m по (14) и $\omega(v)$ по (19) вычисляются без итераций. Перечисленные вычисления при $A_j = \text{const}$ образуют цикл. Каждый цикл заканчивается проверкой, заключающейся в том,

что произведение податливости Φ_θ на жесткость G_v , найденное после определения Φ_m , Φ_d , ν , G_m и G_d , должно равняться единице, т.е.

$$(\Phi_m^2 + 4/3\Phi_m\Phi_d \cos 3\theta + 4/9\Phi_d^2) \times (G_m^2 - 1/2G_mG_d \cos 3\nu + G_d^2/16) = 1. \quad (35)$$

В циклах с $\theta = 0$ и $\theta = \pi/3$, которые содержат неопределенности типа $\sin \omega / \sin 3\theta$, для недопущения вычислительных ошибок необходимо значение угла θ , смещенное изначально на 1° , приближать к 0° или 60° через десятые доли градуса до тех пор, пока значения $G_v = 1/\Phi_\theta$ не будут расходиться со значениями

$$G_v = G_m \pm G_d/4. \quad (36)$$

Последние формулы вытекают из (18) при $\theta = \pi/3$ и $\theta = 0$ соответственно.

Описанная методика была апробирована на диаграммах $S_0 - e_0$ для стали 10, приведенных в работах [8, 9], где на основе экспериментальных исследований было выдвинуто предположение, что процесс формоизменения упомянутых материалов протекает таким образом, что диаграммы $S_0 - e_0$ не зависят от знака параметра Лоде λ_σ . Это означает, что для растяжения, сжатия, двухосного растяжения (сжатия) они совпадают и находятся выше диаграмм, для которых $|\lambda_\sigma| < 1$. Ниже всех лежит диаграмма для чистого сдвига.

Исходные данные для вычислений приведены на рис. 1. Диаграммы $S_0 - e_0$ для стали 10 по испытаниям на растяжение (сжатие) и чистый сдвиг, перестроенные в графики $S_0 - A$, представлены кривыми 1 и 2 соответственно. Последующие две кривые 3 и 4 иллюстрируют зависимость податливостей Φ_τ и Φ_p , а кривые 6 и 7 дают представление

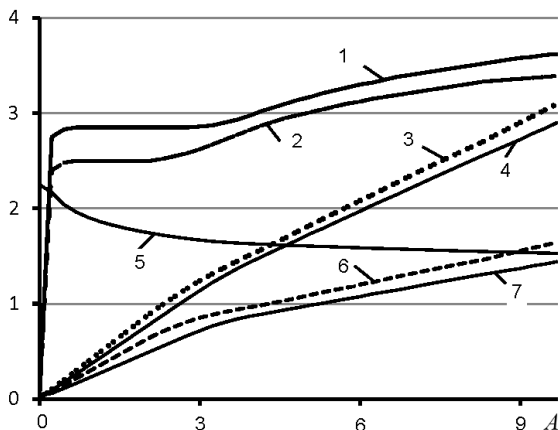


Рис. 1. Исходные данные зависимости механических свойств от $A = S_0e/2$: 1 и 2 — $S_0 \times 10^{-2}$ при растяжении и чистом сдвиге; 3 и 4 — $[e_0, e_{0p}] \times 50$; 5 — $\ln G_p/5$; 6 и 7 — $[\Phi_\tau, \Phi_p] \times (3 \cdot 10^3)$

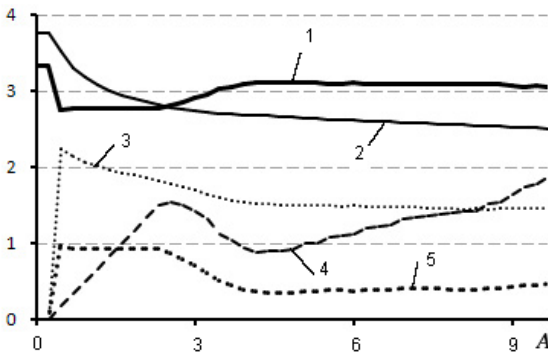


Рис. 2. Зависимость механических характеристик от A :

$1 - \nu \times 6$; $2 - \ln G_v/3$; $3 - \ln G_d/4$; $4 - \Phi_d \times (5 \cdot 10^4)$; $5 - \text{tg } \omega \times 10$

об изменении интенсивности деформаций. Поскольку кривые для соответствующих характеристик жесткости почти накладываются друг на друга, убывающая кривая 5 представлена для $\ln G_p$.

Ниже в графическом виде приведены результаты численного исследования. На рис. 2 все графики относятся к $\theta = \theta_0$, при котором отклонение от подобия достигает максимального значения. Кривая 1 представляет искомую закономерность изменения угла вида деформированного состояния в зависимости от A . Кривые 2 и 3 дают представление об изменении характеристик жесткости графиками для $\ln G_v$ и $\ln G_d$.

Поведение характеристик Φ_d и $\text{tg } \omega$ иллюстрируется кривыми 4 и 5. Пока материал деформируется линейно и упруго, величины G_d , Φ_d и $\text{tg } \omega$ равны нулю, а G_v и ν имеют постоянные значения. При появлении пластической деформации возрастает значение Φ_d , а кривые для G_d и $\text{tg } \omega$ имеют всплеск практически на всей площадке текучести. На этом же участке наблюдается резкое снижение угла ν , значения которого затем постепенно восстанавливаются, оставаясь ниже угла θ .

Более наглядно рассматриваемая закономерность представлена на рис. 3, где графики иллюстрируют изменения угла ν в зависимости от A . Угол θ от одной кривой к другой изменяется на пять градусов. Кривая 1 соответствует растяжению, кривая 2 — чистому сдвигу, кривая 3 — простому сжатию. Первый и последний графики — прямые линии, поскольку при растяжении и сжатии $\omega = 0$, $\nu = \theta$.

Отмеченные циклы вычислений можно провести также при $A = \text{const}$ с шагом по оси θ в 2–3 градуса. На рис. 4 иллюстрируется зависимость сдвиговых характеристик от вида напряженного состояния. Кривая 1 относится к податливости Φ_θ , кривая 2 — к Φ_m . Кривая 3 представляет зависимость $\nu = f(\theta)$, кривая 4 относится к характеристике G_d , ее зеркальное отражение — кривая 5, представляющая Φ_d . Кривая 6 показывает изменение $\text{tg } \omega$. Значение $\text{tg } \omega_{\text{max}}$ соответствует $\theta_0 = 31,8^\circ$.

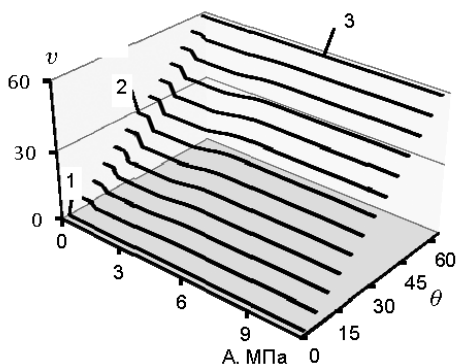


Рис. 3. Зависимости угла ν от A и угла θ (угол θ изменяется с шагом 5°):

1 — растяжение; 2 — чистый сдвиг; 3 — сжатие

Каждая кривая представляет собой зависимость $g_i = f_i(A)$ при $\theta = \text{const}$. Угол θ от одной кривой к другой изменяется на пять градусов. По-прежнему, как и на рис. 3, кривая 1 соответствует растяжению, 2 — чистому сдвигу, 3 — простому сжатию.

Следует отметить, что кривая 1 на рис. 5 и кривая 3 на рис. 7 представляют относительные жесткости G_1/G_v и G_3/G_v , которые реализуются в диагональных площадках элементарного объема с главными касательными напряжениями, равными нулю. Кроме того, равенства (30), положенные в основу методики, отражаются здесь в том, что графики 3 на рис. 5 и 1 на рис. 7 — прямые линии. Так же ведет себя график 2 на рис. 6. Следовательно, при отмеченных напряженных состояниях модули G_i ($i = 3, 2, 1$) совпадают с обобщенными модулями.

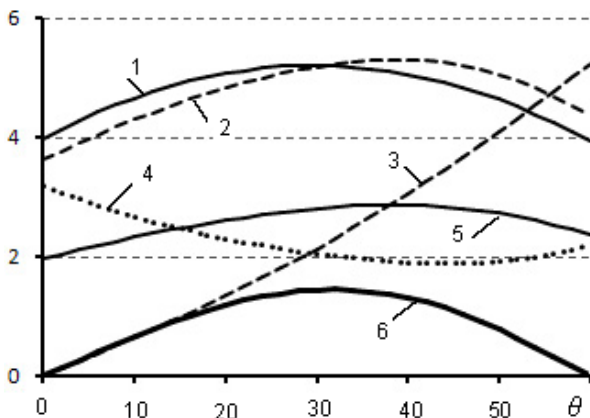


Рис. 4. Зависимости сдвиговых характеристик от вида напряженного состояния: 1 — $\Phi_\theta \times (2 \cdot 10^5)$; 2 — $\Phi_m \times (2 \cdot 10^5)$; 3 — $\nu \times 5$; 4 — $G_d \times (1,5 \cdot 10^{-4})$; 5 — $\Phi_d \times (7,5 \cdot 10^5)$; 6 — $\text{tg } \omega \times 15$

Поведение характеристик жесткости G_i в направлении главных касательных напряжений, G_m и G_d удобно рассмотреть в сравнении с обобщенным модулем сдвига. Такая возможность появляется при введении коэффициентов g_i , g_m и g_d в соотношения (11), (13) и (14), которые являются составной частью алгоритма предложенной методики. Численные расчеты дают возможность представить их графически (рис. 5–7). Каждая кривая представляет собой зависимость $g_i = f_i(A)$ при $\theta = \text{const}$. Угол θ от одной кривой к другой изменяется на пять градусов. По-прежнему, как и на рис. 3, кривая 1 соответствует растяжению, 2 — чистому сдвигу, 3 — простому сжатию.

Следует отметить, что кривая 1 на рис. 5 и кривая 3 на рис. 7 представляют относительные жесткости G_1/G_v и G_3/G_v , которые реализуются в диагональных площадках элементарного объема с главными касательными напряжениями, равными нулю. Кроме того, равенства (30), положенные в основу методики, отражаются здесь в том, что графики 3 на рис. 5 и 1 на рис. 7 — прямые линии. Так же ведет себя график 2 на рис. 6. Следовательно, при отмеченных напряженных состояниях модули G_i ($i = 3, 2, 1$) совпадают с обобщенными модулями.

Следует отметить, что кривая 1 на рис. 5 и кривая 3 на рис. 7 представляют относительные жесткости G_1/G_v и G_3/G_v , которые реализуются в диагональных площадках элементарного объема с главными касательными напряжениями, равными нулю. Кроме того, равенства (30), положенные в основу методики, отражаются здесь в том, что графики 3 на рис. 5 и 1 на рис. 7 — прямые линии. Так же ведет себя график 2 на рис. 6. Следовательно, при отмеченных напряженных состояниях модули G_i ($i = 3, 2, 1$) совпадают с обобщенными модулями.

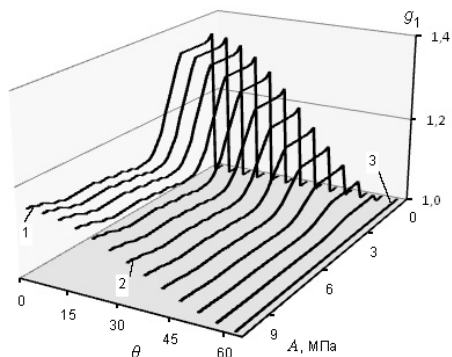


Рис. 5. Зависимость коэффициента g_1 от A и угла θ :

1 – растяжение ($\theta = 0$); 2 – чистый сдвиг ($\theta = \pi/6$); 3 – сжатие ($\theta = \pi/6$)

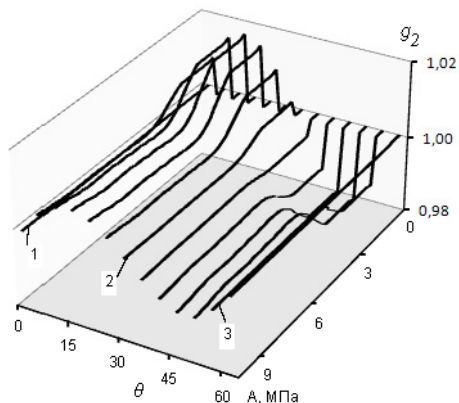


Рис. 6. Зависимость коэффициента g_2 от A и угла θ :

1 – растяжение ($\theta = 0$); 2 – чистый сдвиг ($\theta = \pi/6$); 3 – сжатие ($\theta = \pi/6$)

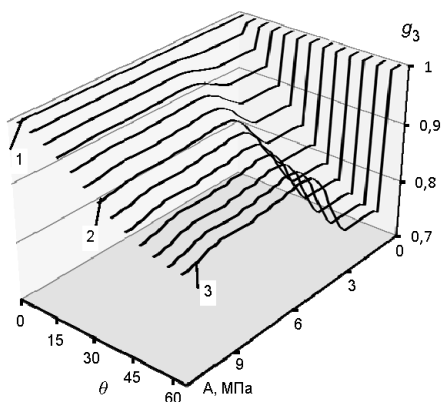


Рис. 7. Зависимость коэффициента g_3 от A и угла θ :

1 – растяжение ($\theta = 0$), 2 – чистый сдвиг ($\theta = \pi/6$), 3 – сжатие ($\theta = \pi/6$)

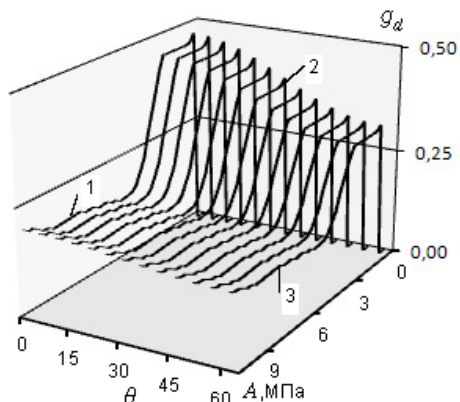


Рис. 8. Зависимость коэффициента g_d от A и угла θ :

1 – растяжение ($\theta = 0$), 2 – чистый сдвиг ($\theta = \pi/6$), 3 – сжатие ($\theta = \pi/6$)

Значения коэффициентов, относящиеся к кривым слева от кривых чистого сдвига, значительно больше значений коэффициентов для кривых справа от чистого сдвига. Первые, для которых $0 < \theta < \pi/6$, примыкают к обобщенному растяжению, вторые, для которых $\pi/6 < \theta < \pi/3$, – к обобщенному сжатию. (Это относится к любому из g_i , представленных графиками на рис. 5–7.) Для первых $\operatorname{tg} \omega$ возрастает и v отстает от θ , для вторых $\operatorname{tg} \omega$ убывает и v стремится к θ (см. рис. 4).

Различие кривых говорит о том, что формоизменение при данных видах напряженного состояния протекает не одинаково, хотя здесь и принято предположение авторов работ [8] и [9] о том, что кривые $S_0 - e_0$ для растяжения и сжатия одинаковы. Вполне возможно, что данное предположение справедливо не для всех пластических материалов.

Графики для g_m не приведены, но их легко представить, поскольку этот коэффициент является усредненной суммой g_i . На рис. 8 приведены графики для g_d , из которых следует, что $g_d > 0$ для любого напряженного состояния, что также вытекает из определения (7) для G_d . Коэффициент g_d является мерой расхождения модулей G_i и показателем анизотропии деформационных свойств, а следовательно, различия пластической деформации сдвига во взаимно перпендикулярных направлениях элементарного объема материала.

С появлением пластической деформации коэффициент g_d изменяется скачкообразно, на площадке текучести имеет практически постоянное значение и затем после резкого снижения его значения располагаются на плавно возрастающей кривой. Отмеченное поведение g_d следует рассматривать как снижение разницы между модулями G_i с ростом пластической деформации. Тот факт, что он быстро убывает после площадки текучести дает основание полагать, что данный показатель не отражает остаточную анизотропию, связанную со структурными изменениями, например, вследствие резкого изменения механизма деформации. Для описания этого весьма важного явления требуются как дополнительные экспериментальные сведения, так и обоснованные допущения, одно из которых можно найти, например, в работе [10].

С изменением θ коэффициент g_d изменяется плавно и при обобщенном растяжении принимает наибольшее значение. В отличие от $\text{tg } \omega$ его значение не равно нулю как при $\theta = 0$, так и $\theta = \pi/3$. Именно в этом следует рассматривать его преимущество как показателя тензорной нелинейности в уравнениях (8). Таким образом, предложенная методика позволила для такого стабильного материала, как сталь провести подробный анализ его нелинейных характеристик, выявить особенности его механического поведения.

Естественно, более точная количественная оценка таких величин, как $\text{tg } \omega$, G_d и Φ_d требует целенаправленных исследований. Для этого были бы полезны испытания при напряженных состояниях, в которых проявлялись бы характеристики G_i или ϕ_i , близкие тем, которые реализуются при растяжении, сжатии и чистом сдвиге.

В заключение следует отметить, что изложенная выше методика, основанная на тензорно-нелинейных уравнениях связи напряжений с деформациями, дает возможность восстановить закономерность изменения угла вида деформированного состояния при наличии сведений о зависимостях $S_0 - e_0$ для трех напряженных состояний: $\theta = 0$, $\theta = \pi/6$ и $\theta = \pi/3$. Располагая обобщенным модулем в виде соотношения (18), по этой зависимости можно получить диаграмму $S_0 - e_0$ для любого θ .

Если диаграммы для растяжения, чистого сдвига и сжатия отличаются по форме, то этот модуль при произвольном угле θ имеет различное графическое отображение, так как оно видоизменяется в соответствии с алгоритмом (33) и (34). Несмотря на это, определяя характеристики G_m и G_d по соотношениям (13) и (14), считая связь между шаровыми тензорами линейно упругой, уравнения (8) и (22)

можно применять для решения практических задач численными методами. Для этого может быть использован опыт деформационной теории пластичности, основанной на представлении о “единой кривой”. Предлагаемый здесь вариант деформационной теории строится на трех кривых, позволяющих, как изложено выше, вычислять в ходе решения задач все необходимые характеристики процесса формоизменения.

Следует обратить внимание на малые отклонения значений коэффициента g_2 от единицы (рис. 6) по сравнению с коэффициентами g_1 и g_3 . Они оказывают незначительное влияние на величину g_m и g_d . Данный факт может быть положен в основу алгоритма приближенной методики, в которой используются уже не три, а две диаграммы испытания, например при растяжении и сжатии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л о д е В. Влияние среднего главного напряжения на текучесть металлов // Теория пластичности. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – С. 336–374.
2. Ж у к о в А. М. Пластические деформации стали при сложном нагружении // Изв. АН СССР. – ОТН. – 1954. – № 11. – С. 53–61.
3. Д е в и с Е. Рост напряжений с изменением деформаций и зависимость “напряжения–деформации” в пластической области для меди при сложном напряженном состоянии // Теория пластичности. – М.: Изд-во иностр. лит., – 1948. – С. 336–374.
4. К о м к о в К. Ф. К определению параметров Лоде при обработке результатов испытаний // Изв. АН. – МТТ. – 2005. – № 2. – С. 126–135.
5. R e i n e r M. A mathematical theory of dilatancy // Am. J. Math. – 1945. – 67. – P. 350–362.
6. Н о в о ж и л о в В. В. О связи между напряжениями и деформациями в нелинейно-упругой среде // ППМ. – 1951. – Т. XV. – Вып. 2. – С. 183–194.
7. К о м к о в К. Ф. О физическом смысле фазы подобия девиаторов и возможности ее определения по результатам испытаний при простых напряженных испытаниях // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Естественные науки”. – 2008. – № 3. – С. 75–83.
8. Ш и ш м а р е в О. А. Вычисление пластических деформаций по теориям течения с учетом влияния вида девиатора напряжений // Вестн. АН БССР. – 1979. – № 4. – С. 17–22.
9. Я н г Ю. И., М и т р о х и н Н. М. О систематическом отклонении от законов пластичности // Докл. АН СССР. – 1960. – Т. 135, № 4. – С. 796–799.
10. К о м к о в К. Ф. Об исследовании некоторых особенностей упругих свойств высоконаполненных полимерных материалов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Машиностроение”. – 2008. – № 3. – С. 3–14.

Статья поступила в редакцию 18.08.2008

Кирилл Федотович Комков родился в 1938 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1966 г. Канд. техн. наук, доцент военно-технического университета. Автор более 30 публикаций в области механики материалов.

K.F. Komkov (b. 1938) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1966. Ph. D. (Eng.), assoc. professor of the Military and Technical University. Author of more than 30 publications in the field of mechanics of materials.

