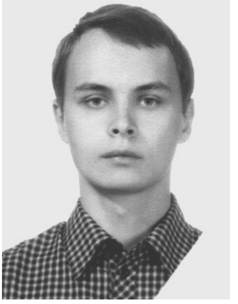
Алексей Леонидович Лебедев родился в 1983 г., окончил в 2007 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Аспирант кафедры “Высшая математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специализиуется в области методов решения некорректных задач.

A.L. Lebedev (b. 1983) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2007. Post-graduate of “Higher Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Specializes in the field of methods of solving ill-posed problems.

Павел Анатольевич Плохута родился в 1983 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2006 г. Аспирант кафедры “Вычислительная математика и математическая физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор четырех научных работ в области решения некорректных задач и радиопеленгации.

P.A. Plokhuta (b. 1983) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2006. Post-graduate of “Computational Mathematics and Mathematical Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 4 publication in the field of solving ill-posed problems in radio-direction finding.



УДК 519.234

В. Б. Горяинов, Е. Р. Горяинова

ЗНАКОВЫЕ КРИТЕРИИ НЕЗАВИСИМОСТИ НАБЛЮДЕНИЙ В МОДЕЛИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ АВТОРЕГРЕССИИ ПОРЯДКА (1,1)

Построены свободные от распределения знаковые критерии для проверки независимости наблюдений, описываемых уравнением пространственной авторегрессии порядка (1,1). Найдено точное распределение статистик критериев, доказана их асимптотическая нормальность.

Ключевые слова: знаковый критерий, знаковые методы, пространственная авторегрессия.

Модель пространственной авторегрессии широко используется в экономике [1], естественных [2] и технических [3] науках. Систематическое изучение ее статистических свойств началось с работ Тьостхейма [4, 5]. К настоящему времени в рамках этой модели решены основные задачи параметрического анализа [6].

В настоящей работе предпринимается попытка непараметрического (знакового) анализа этой модели. В одномерном случае аналогичные задачи для авторегрессии решены в работе [7], для уравнения скользящего среднего — в работе [8].

Постановка задачи. Рассмотрим стационарное поле X_{ij}, $i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ на плоской целочисленной решетке, описываемой уравнением пространственной авторегрессии порядка $(1, 1)$:

$$X_{ij} = a_{10} X_{i-1,j} + a_{01} X_{i,j-1} + a_{11} X_{i-1,j-1} + \varepsilon_{ij}, \;\; i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad (1)$$

где ε_{ij} — независимые одинаково распределенные случайные величины с неизвестной функцией распределения $F(x)$; $a = (a_{10}, a_{01}, a_{11})$ — неизвестный вектор параметров авторегрессионной модели.

Проверим по наблюдениям X_{ij}, $i = 0, \ldots m, j = 0, \ldots, n$, гипотезу H_0 о независимости наблюдений в (1), т.е.

$$H_0 : a = 0.$$

В качестве альтернативы будем рассматривать гипотезы H^+_{pq} и H^-_{pq} о том, что координата a_{pq} вектора a отлична от нуля, т.е. для любых $(p, q) \in B = \{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$

$$\begin{aligned} H^+_{pq} : \qquad & a_{pq} > 0, \quad a_{kl} = 0 \text{ для любых } (k, l) \neq (p, q), \\ H^-_{pq} : \qquad & a_{pq} < 0, \quad a_{kl} = 0 \text{ для любых } (k, l) \neq (p, q). \end{aligned}$$

Мы будем строить критерии, основанные не на самих наблюдениях, а на их знаках, точнее на матрице S, состоящей из элементов

$$S_{ij} = \operatorname{sign}(X_{ij}), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0, \\ 1, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

Обозначим Q критическую область знакового критерия, т.е. такое подмножество множества $\mathfrak{S}$ матриц размера $m \times n$ с элементами из -1 и 1, что при $S \in Q$ гипотеза H_0 отклоняется. Тогда функция мощности $P(a, Q)$ этого критерия имеет вид

$$P(a, Q) = \sum_{s \in Q} \mathsf{P}\{S = s | a\},$$

где $\mathsf{P}\{S = s|a\}$ — вероятность события $\{S = s\}$ при альтернативе a.

Для проверки H_0 против H^+_{pq} и H^-_{pq} мы будем строить локально наиболее мощные знаковые критерии, т.е. критерии, функции мощности $P(a, Q)$ которых наиболее круто изменяются в направлении a_{pq} в окрестности нуля. Другими словами, Q выбирается так, чтобы

$$\left. \frac{\partial P(a, Q)}{\partial a_{pq}} \right|_{a=0} = \sum_{s \in Q} \frac{\partial \mathsf{P}\{S = s|a\}}{\partial a_{pq}}$$

была максимальной при H^+_{pq} и минимальной при H^-_{pq}.

Основные результаты. Обозначим

$$E = -\int_{-\infty}^{0} tF'(t)\,dt, \qquad K = 4F'(0)E,$$

$$z_{pq} = \sum_{i=p+1}^{m}\sum_{j=q+1}^{n} s_{ij}s_{i-p,j-q}, \quad Z_{pq} = \sum_{i=p+1}^{m}\sum_{j=q+1}^{n} S_{ij}S_{i-p,j-q}.$$

Теорема 1. Пусть функция распределения случайных величин ε_{ij} удовлетворяет следующим условиям:

$$F(0) = 1/2, \quad F'(0) > 0; \tag{2}$$

$$\mathsf{E}(\varepsilon_{11}) = 0; \tag{3}$$

$$\mathsf{E}[|F'(\theta u X_{11}) - \\ - F'(0)||X_{11}|] \to 0 \text{ при } u \to 0 \text{ для любого } \theta \in (0,1). \tag{4}$$

Тогда для любых $(p,q) \in B$ при альтернативах H_{pq}^{+}, H_{pq}^{-}

$$\mathsf{P}\{S = s|a\}) = 2^{-mn}(1 + K z_{pq} a_{pq}) + o(a_{pq}) \text{ при } a_{pq} \to 0.$$

Доказательство теоремы 1 см. в приложении.

Замечание. Легко видеть, что условие (4) выполнено, если существуют такие $r \in (0,1]$ и $L > 0$, что

$$\mathsf{E}|\varepsilon_{11}|^{1+r} < \infty, \quad |F'(t) - F'(0)| \le L|t|^r \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Действительно, в этом случае

$$\mathsf{E}[|F'(\theta u X_{11}) - F'(0)||X_{11}|] \le \\ \le \mathsf{E}L|\theta u X_{11}|^r|X_{11}| \le L_1|u|\mathsf{E}|\varepsilon_{11}|^{1+r} \to 0 \text{ при } u \to 0.$$

В частности, теорема 1 может быть справедлива для поля X_{ij} с бесконечной дисперсией.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (2)–(4). Тогда:

1) H_0 отклоняется в пользу H_{pq}^{+} на уровне значимости α, если $Z_{pq} > C$, и принимается в противном случае; постоянная C находится из условия $\mathsf{P}\{Z_{pq} > C\} = \alpha$ при H_0, $(p,q) \in B$;

2) H_0 отклоняется в пользу H_{pq}^{-} на уровне значимости α, если $Z_{pq} < C$, и принимается в противном случае; постоянная C находится из условия $\mathsf{P}\{Z_{pq} < C\} = \alpha$ при H_0, $(p,q) \in B$.

Доказательство. Так как при H_0 случайные величины X_{ij} независимы и одинаково распределены, то $\mathsf{P}\{S = s\} = 2^{-mn}$ для любой $s \in \mathfrak{S}$. Поэтому Q будет состоять из тех s, в которых $\dfrac{\partial \mathsf{P}\{S = s|a\}}{\partial a_{pq}}$ принимает наибольшие значения для H_{pq}^{+} и наименьшие для H_{pq}^{-},

$(p,q) \in B$, а количество элементов в Q будет определяться уровнем значимости критерия (если Q состоит из k элементов, то уровень значимости будет равен $k \cdot 2^{-mn}$).

Из теоремы 1 следует, что

$$\left.\frac{\partial \mathsf{P}\{S = s|a\})}{\partial a_{pq}}\right|_{a=0} = 2^{-mn} K z_{pq}, \qquad (p,q) \in B.$$

Отметим, что $E > 0$, и, следовательно, $K > 0$. Таким образом, при проверке H_0 против H^+_{pq} критическое множество Q^+_{pq} состоит из тех матриц s, для которых $z_{pq} > C$, где постоянная C определяется уровнем значимости критерия, $(p,q) \in B$.

Аналогично при проверке H_0 против H^-_{pq} критическое множество Q^-_{pq} состоит из тех матриц s, для которых $z_{pq} < C$, $(p,q) \in B$.

Распределение статистик $\boldsymbol{Z}_{pq}$ при гипотезе $\boldsymbol{H}_0$. Для практического применения построенных критериев нужно знать распределение Z_{pq}, $(p,q) \in B$, при гипотезе H_0. Квантили распределения Z_{pq} находятся при помощи следующей теоремы.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (2)–(4). Тогда при гипотезе H_0 справедливы следующие утверждения:

1) статистика Z_{pq} представима в виде

$$Z_{pq} = 2\xi - (m-p)(n-q),$$

где случайная величина ξ имеет биномиальное распределение с параметрами $(m-p)(n-q)$ и $\dfrac{1}{2}$;

2) Z_{pq} асимптотически нормальна с $\mathsf{E}Z_{pq} = 0$ и $\mathsf{D}Z_{pq} = (m-p)(n-q)$, $(p,q) \in B$.

Доказательство. Покажем, что Z_{pq} — сумма независимых случайных величин с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. При H_0 наблюдения X_{ij} совпадают с ε_{ij} и поэтому являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами. Из условия (2) следует, что при H_0 случайные величины S_{ij} принимают значения ± 1 с вероятностью 1/2. Если $(i-p, j-q) \neq (k,l)$ и $(k-p, l-q) \neq (i,j)$, то независимость $S_{ij}S_{i-p,j-q}$ и $S_{kl}S_{k-p,l-q}$ очевидна. В противном случае, например при $(i-p, j-q) = (k,l)$, независимость $S_{ij}S_{i-p,j-q}$ и $S_{i-p,j-q}S_{i-2p,j-2q}$ вытекает из независимости событий $\{S_{ij}S_{i-p,j-q} = 1\}$ и $\{S_{i-p,j-q}S_{i-2p,j-2q} = 1\}$, $i,j = 0, \pm 1, \ldots$, т.е. равенства

$$\mathsf{P}\{S_{ij}S_{i-p,j-q} = 1, S_{i-p,j-q}S_{i-2p,j-2q} = 1\} = \\ = \mathsf{P}\{S_{ij}S_{i-p,j-q} = 1\}\mathsf{P}\{S_{i-p,j-q}S_{i-2p,j-2q} = 1\}.$$

Это соотношение следует из того, что, с одной стороны,

$$\mathsf{P}\{S_{ij}S_{i-p,j-q}=1,S_{i-p,j-q}S_{i-2p,j-2q}=1\}=$$
$$=\mathsf{P}\{S_{ij}=S_{i-p,j-q}=S_{i-2p,j-2q}=1\}+$$
$$+\mathsf{P}\{S_{ij}=S_{i-p,j-q}=S_{i-2p,j-2q}=-1\}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4},$$

а с другой стороны,

$$\mathsf{P}\{S_{ij}S_{i-p,j-q}=1\}=\mathsf{P}\{S_{ij}=S_{i-p,j-q}=1\}+$$
$$+\mathsf{P}\{S_{ij}=S_{i-p,j-q}=-1\}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

и аналогично

$$\mathsf{P}\{S_{i-p,j-q}S_{i-2p,j-2q}=1\}=\frac{1}{2}.$$

Из этих же выкладок вытекает, что для любых $(p,q)\in B$

$$\mathsf{E}(S_{ij}S_{i-p,j-q})=0,\qquad \mathsf{D}(S_{ij}S_{i-p,j-q})=1,\qquad i,j=0,\pm1,\ldots,$$

а следовательно, в соответствии с центральной предельной теоремой распределение Z_{pq} асимптотически нормально с $\mathsf{E}Z_{pq}=0$, $\mathsf{D}Z_{pq}=(m-p)(n-q)$, $(p,q)\in B$.

Далее, поскольку

$$\mathsf{P}\{S_{ij}S_{i-p,j-q}=1\}=\mathsf{P}\{S_{ij}S_{i-p,j-q}=-1\}=\frac{1}{2},$$

то $\dfrac{1+S_{ij}S_{i-p,j-q}}{2}$ имеет распределение Бернулли с параметром $\dfrac{1}{2}$, а

$$\xi=\sum_{i=p+1}^{m}\sum_{j=q+1}^{n}\frac{1+S_{ij}S_{i-p,j-q}}{2}=\frac{(m-p)(n-q)}{2}+\frac{1}{2}Z_{pq}$$

— биномиальное распределение с параметрами $(m-p)(n-q)$ и $\dfrac{1}{2}$.

Приложение. Доказательство теоремы 1. Чтобы избежать громоздких обозначений, докажем теорему для альтернативы $a=(a_{10},0,0)$, $a_{10}\neq 0$; для остальных альтернатив $a_{pq}\neq 0$, $(p,q)\in B$, доказательство аналогично.

Обозначим $I(A)$ — индикатор подмножества A в пространстве элементарных событий Ω, $I_{ij}=I(S_{ij}=s_{ij})$. Отметим, что при альтернативе $(a_{10},0,0)$

$$I_{ij}=\frac{1+s_{ij}}{2}-s_{ij}I(\varepsilon_{ij}<-a_{10}X_{i-1,j}).$$

Определим случайные величины $g(p,q)$ по формуле

$$g(p,q)=\begin{cases}\left(\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{q-1} I_{ij}\right)\left(\prod_{i=1}^{p} I_{iq}\right), & \text{если } q>1,\\ \prod_{i=1}^{p} I_{iq}, & \text{если } q=1.\end{cases}$$

Обозначим $\mathfrak{A}_{pq}$ σ-алгебру, порожденную при $q>1$ случайными величинами

$$\{\varepsilon_{ij}, 0\le i\le m, 0\le j\le q-1\}\cup\{\varepsilon_{iq}, 0\le i\le p-1\},$$

а при $q=1$ случайными величинами

$$\{\varepsilon_{iq}, 1\le i\le p-1\}.$$

Так как $g(p-1,q)$ измерима относительно $\mathfrak{A}_{pq}$, а ε_{pq} и $\mathfrak{A}_{pq}$ независимы, по формуле полного математического ожидания

$$\begin{aligned}\mathsf{E}g(p,q)&=\mathsf{E}[g(p-1,q)I_{pq}]=\\&=\mathsf{E}\left[g(p-1,q)\left(\frac{1+s_{pq}}{2}-s_{pq}I(\varepsilon_{pq}<-a_{10}X_{p-1,q})\right)\right]=\\&=\mathsf{E}\left[g(p-1,q)\mathsf{E}\left(\frac{1+s_{pq}}{2}-s_{pq}I(\varepsilon_{pq}<-a_{10}X_{p-1,q})\middle|\,\mathfrak{A}_{pq}\right)\right]=\\&=\mathsf{E}\left[g(p-1,q)\left(\frac{1+s_{pq}}{2}-s_{pq}F(-a_{10}X_{p-1,q})\right)\right],\end{aligned}$$

где при $p=1$ по определению $g(p-1,q)=g(m,q-1)$. Дальнейшее изложение доказательства теоремы 1 опирается на две леммы.

Лемма 1. Пусть для функции $F(t)$ и случайной величины X_{11} выполнены условия (2)–(4). Тогда для любых $m,n\ge 1$ и для любой ограниченной случайной величины η

$$\mathsf{E}[\eta F(uX_{11})]=\frac{1}{2}\mathsf{E}\eta+uF'(0)\mathsf{E}[\eta X_{11}]+o(u),\qquad u\to 0,$$

в частности,

$$\mathsf{E}[\eta F(uX_{11})]=\frac{1}{2}\mathsf{E}\eta+o(1),\qquad u\to 0.$$

Доказательство. Из формулы Тейлора следует, что

$$F(t)-F(0)-F'(0)t=(F'(\theta t)-F'(0))t,\qquad 0\le\theta\le 1.$$

Поэтому из (4) вытекает, что

$$\begin{aligned}&\mathsf{E}|\eta F(uX_{11})-\eta F(0)-\eta F'(0)(uX_{11})|\le\\&\qquad\le\mathsf{E}[|F'(uX_{11}\theta)-F'(0)||uX_{11}|]=o(u)\qquad\text{при } u\to 0,\end{aligned}$$

откуда с учетом (2) следует утверждение леммы.

Продолжим доказательство теоремы. Применяя лемму 1 к $\eta = g(p-1,q)$, $u = -a_{10}$ и $X_{11} = X_{p-1,q}$, получаем

$$\mathsf{E}g(p,q) = \frac{1}{2}\mathsf{E}g(p-1,q) + a_{10}s_{pq}F'(0)\mathsf{E}[g(p-1,q)X_{p-1,q}] + o(a_{10}).$$

В частности,

$$\mathsf{E}g(p,q) = \frac{1}{2}\mathsf{E}g(p-1,q) + o(1), \qquad a_{10} \to 0.$$

Поскольку

$$\mathsf{E}g(1,1) = \mathsf{E}\left[\frac{1+s_{11}}{2} - s_{11}I(\varepsilon_{11} < -a_{10}X_{01})\right] =$$

$$= \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left[\frac{1+s_{11}}{2} - s_{11}I(\varepsilon_{11} < -a_{10}X_{01})\middle|\mathfrak{A}_{11}\right]\right] =$$

$$= \frac{1+s_{11}}{2} - s_{11}\mathsf{E}F(-a_{10}X_{01}) =$$

$$= \frac{1+s_{11}}{2} - s_{11}\left(\frac{1}{2} - F'(0)a_{10}\mathsf{E}X_{01} + o(a_{10})\right) =$$

$$= \frac{1+s_{11}}{2} - \frac{1}{2}s_{11} + o(a_{10}) = \frac{1}{2} + o(a_{10}), \quad (5)$$

то, рассуждая по индукции (где элемент $\mathsf{E}g(p,q)$ имеет номер $m(q-1)+p$), получаем, что

$$\mathsf{E}g(p,q) = 2^{-m(q-1)-p} + o(1), \qquad a_{10} \to 0.$$

Лемма 2. В условиях теоремы 1

$$\mathsf{E}[g(p,q)X_{pq}] = s_{pq}E2^{-m(q-1)-p+1} + o(1), \qquad a_{10} \to 0.$$

Доказательство. Поскольку ε_{pq} не зависит от $\mathfrak{A}_{pq}$, то

$$E(\varepsilon_{pq}|\mathfrak{A}_{pq}) = \mathsf{E}\varepsilon_{pq} = 0.$$

Отсюда и из измеримости $X_{p-1,q}$ и $g(p-1,q)$ относительно $\mathfrak{A}_{pq}$, а также из (2) и (6) следует, что

$$\mathsf{E}[g(p,q)X_{pq}] = \mathsf{E}[g(p,q)(a_{10}X_{p-1,q} + \varepsilon_{pq})] = \mathsf{E}[g(p,q)\varepsilon_{pq})] + o(1) =$$

$$= \mathsf{E}[\mathsf{E}[g(p-1,q)I_{pq}\varepsilon_{pq}|\mathfrak{A}_{pq}]] + o(1) = \mathsf{E}[g(p-1,q)\mathsf{E}[I_{pq}\varepsilon_{pq}|\mathfrak{A}_{pq}]] + o(1) =$$

$$= \mathsf{E}\left[g(p-1,q)\mathsf{E}\left[\frac{1+s_{pq}}{2}\varepsilon_{pq} - s_{pq}\varepsilon_{pq}I(\varepsilon_{pq} < -a_{10}X_{p-1,q})\middle|\mathfrak{A}_{pq}\right]\right] + o(1) =$$

$$= \frac{1+s_{pq}}{2}\mathsf{E}[g(p-1,q)\mathsf{E}(\varepsilon_{pq}) - s_{pq}\mathsf{E}[g(p-1,q)\mathsf{E}[\varepsilon_{pq} I(\varepsilon_{pq} <$$

$$< -a_{10}X_{p-1,q})|\mathfrak{A}_{pq}]] + o(1) =$$

$$= -s_{pq}\mathsf{E}\left[g(p-1,q)\int\limits_{-\infty}^{-a_{10}X_{p-1,q}} tF'(t)\,dt\right] + o(1) =$$

$$= -s_{pq}\mathsf{E}\left[g(p-1,q)\int\limits_{-\infty}^{0} tF'(t)\,dt\right] + o(1) =$$

$$= s_{pq}E\mathsf{E}[g(p-1,q)] + o(1) = s_{pq}E2^{-m(q-1)-p+1} + o(1), \qquad a_{10} \to 0.$$

Лемма 2 доказана.

Из лемм 1 и 2 следует, что

$$\mathsf{E}g(p,q) =$$

$$= \frac{1}{2}\mathsf{E}g(p-1,q) + a_{10}s_{pq}F'(0)\mathsf{E}\left[s_{p-1,q}E2^{-m(q-1)-p+2} + o(1)\right] + o(a_{10}) =$$

$$= \frac{1}{2}\mathsf{E}g(p-1,q) = a_{10}s_{pq}s_{p-1,q}F'(0)E2^{-m(q-1)-p+2} + o(a_{10}).$$

Полученная рекуррентная формула для $\mathsf{E}g(p,q)$ с начальным условием (5) дает

$$\mathsf{E}g(p,q) = 2^{-m(q-1)-p}\left[1 + a_{10}4F'(0)E\sum_{i=2}^{p}\sum_{j=1}^{q} s_{ij}s_{i-1,j}\right] + o(a_{10}).$$

Так как $\mathsf{P}\{S = s|a\} = \mathsf{E}g(m,n)$, теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bruce A. Blonigen, Ronald B. Davies, Glen R. Waddell, Helen T. Naughton. FDI in space: Spatial autoregressive relationships in foreign direct investment // European Economic Review. – Vol. 51, issue 5, July 2007. – P. 1303–1325.
2. Dongping Zhu A. A. (Louis) Beex. Robust Spatial Autoregressive Modeling for Hardwood Log Inspection. Journal of Visual Communication and Image Representation. – Vol. 5, issue 1, March 1994. – P. 41–51.
3. Chellappa R., Sharma G. Two-dimensional spectral estimation using spatial autoregressive models // Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE International Conference on ICASSP’83. – V. 8, Apr. 1983. – P. 855–858.
4. Tjostheim D. Statistical spatial series modeling // Adv. in Appl. Probab., 1978. – V. 10. – P. 130–154.
5. Tjostheim D. Statistical spatial series modelling II: Some futher results on unilateral processes // Adv. in Appl. Probab., 1983. – V. 10. – P. 562–584.

6. I l l i g A., T r u o n g - V a n B. Asymptotic results for spatial ARMA models // Commun. Stat., Theory Methods, 2006. – V. 35, no. 4. – P. 671–688.
7. Т ю р и н Ю. Н. Непараметрические методы для линейных моделей временных рядов // Системные иследования в области компьютеризации и статистики. – М.: ИСА РАН, 1992. – С. 54–61.
8. G o r y a i n o v a E. R. Locally optimal sign test in the moving average model // Advances in modelling & analysis, B., 1993. – V. 27, no 4. – P. 43–56.

Статья поступила в редакцию 10.09.08

Елена Рудольфовна Горяинова родилась в 1960 г., окончила в 1983 г. МГУ им. М.В. Ломоносова. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Теория вероятностей” Московского авиационного института (технического университета). Автор 17 научных работ в области непараметрической статистики и анализа временных рядов.

Ye.R. Goryainova (b. 1960) graduated from the Lomonosov Moscow State University in 1983. Ph. D. (Phys.-Math.), assoc. professor of "Theory of Probabilities" department of the Moscow Aviation Institute (Technical University). Author of 17 publications in the field of non-parametric statistics and analysis of time series.

Владимир Борисович Горяинов родился в 1961 г., окончил в 1983 г. МГУ им. М.В. Ломоносова. Канд. техн. наук, доцент кафедры “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 23 научных работ в области стохастических дифференциальных уравнений, статистических методов в биологии и медицине.

V.B. Goryainov (b. 1961) graduated from the Lomonosov Moscow State University in 1983. Ph. D. (Eng.), assoc. professor of “Mathematical Simulation” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 23 publications in the field of stochastic differential equations, stochastic methods in biology and medicine.