УДК 539.3:536.2

Н. Н. Головин, В. С. Зарубин,
Г. Н. Кувыркин

СМЕСЕВЫЕ МОДЕЛИ МЕХАНИКИ КОМПОЗИТОВ. Ч. 1. ТЕРМОМЕХАНИКА И ТЕРМОУПРУГОСТЬ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СМЕСИ

Рассмотрены математические модели механики гетерогенной смеси, используемые при изучении поведения композитов в условиях нестационарных внешних термомеханических воздействий.

Ключевые слова: гетерогенная многокомпонентная смесь, термомеханика, термоупругость, нестационарные воздействия, математические модели среды.

Введение. При создании различных технических объектов широкое применение находят композиты, для описании поведения которых в условиях высокоинтенсивного термомеханического воздействия можно использовать математическую модель сплошной среды, основанную на соотношениях теории гетерогенной смеси.

Будем полагать, что выполняются два главных допущения [1]: размеры включений или неоднородностей в смеси во много раз больше молекулярно-кинетических (таким образом, указанные неоднородности содержат большое число молекул); размеры неоднородностей во много раз меньше расстояний, на которых осредненные или макроскопические параметры смеси или компонента смеси меняются существенно.

Первое допущение позволяет использовать классические представления и уравнения механики сплошной однокомпонентной среды для описания процессов в масштабах самих неоднородностей. Тогда для описания физических свойств компонентов можно использовать параметры, полученные из экспериментов с соответствующими веществами. Второе допущение позволяет описывать макроскопические процессы в гетерогенной смеси методами механики сплошной среды с помощью осредненных или макроскопических параметров.

При исследовании смеси, компоненты которой различаются по теплофизическим и механическим свойствам, необходимо учитывать, что изменение всех интересующих нас полей (температуры, деформации, напряжений и т.д.) в пространстве можно характеризовать двумя масштабами: макромасштабом задачи L и масштабом неоднородности l [1, 2]. Неоднородная смесь может быть представлена в виде однородной сплошной среды, если в ней удается выделить элементарный объем V_d с характерным размером d ($l \ll d \ll L$), в котором поля температуры, деформации, напряжений и т.д. однородны. Выделенный элементарный объем рассматривают как материальную точку сплошной среды с соответствующими осредненными эффективными физическими свойствами и называют его макроточкой [1, 2] (частицей смеси).

1. Термомеханика многокомпонентной смеси. Будем рассматривать многокомпонентную смесь как многоскоростную сплошную среду, представляющую собой N химически не взаимодействующих между собой континуумов, каждый из которых относится к своему компоненту смеси и заполняет один и тот же объем, занятый смесью [3, 4]. Для каждого компонента смеси в окрестности любой произвольной точки определяем плотность ρ_α — массу α-го компонента в единице объема среды, вектор скорости $\overset{\alpha}{\boldsymbol{v}}$ и другие параметры, относящиеся к этому компоненту смеси. Таким образом, в окрестности любой точки объема, занятого смесью, будут определены N значений плотности ρ_α, N векторов скорости $\overset{\alpha}{\boldsymbol{v}}$ и т.д.

Исходя из этих величин, можно определить параметры, характеризующие смесь в целом: плотность смеси ρ и вектор среднемассовой скорости $\boldsymbol{v}$ смеси:

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^{N} \rho_\alpha; \quad \boldsymbol{v} = \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha=1}^{N} \rho_\alpha \overset{\alpha}{\boldsymbol{v}}.$$

При описании движения смеси иногда используют понятие диффузионной скорости [1] — скорости движения компонентов относительно центра масс смеси или среды в целом:

$$\overset{\alpha}{\tilde{\boldsymbol{v}}} = \overset{\alpha}{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{v}; \quad \sum_{\alpha=1}^{N} \rho_\alpha \overset{\alpha}{\tilde{\boldsymbol{v}}} = \mathbf{0}.$$

Для многоскоростной смеси вводят также понятие полной (материальной, субстанциональной) производной $\overset{\alpha}{D}(\cdot)/Dt$, связанной с движением α-го компонента:

$$\frac{\overset{\alpha}{D}(\cdot)}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \overset{\alpha}{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t} + \overset{\alpha}{v}_k \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, 3, \tag{1}$$

где ∇ — оператор Гамильтона; $\overset{\alpha}{v}_k$ – составляющие вектора скорости α –го компонета смеси; x_k — декартовы координаты частицы смеси, t — время. Здесь и далее принято соглашение о суммировании по повторяющимся латинским индексам.

Пусть в начальной конфигурации смесь занимает объем V_0, ограниченный поверхностью S_0. Тогда в актуальной конфигурации объем смеси будет V, а граничная поверхность — S. При переходе от начальной конфигурации к актуальной плотность изменяется от $\rho_{\alpha 0}$ до ρ_α, происходит также переход массы от ν-го компонента к α-му. В таком случае закон сохранения массы принимает следующий вид:

$$\frac{\overset{\alpha}{D}}{Dt}\int\limits_{V_0}\rho_{\alpha 0}dV_0=\frac{\overset{\alpha}{D}}{Dt}\int\limits_{V}\rho_\alpha dV-\int\limits_{V}\sum_{\nu=1}^{N}J_{\nu\alpha}\,dV,\quad \alpha=\overline{1,N}, \tag{2}$$

где $J_{\nu\alpha}$ характеризует интенсивность перехода массы от ν-го компонента к α-му в единице объема смеси в единицу времени. Отметим, что $J_{\nu\alpha}=-J_{\alpha\nu}$ и $J_{\alpha\alpha}=0$.

Из (2) следует локальная форма записи закона сохранения массы α-го компонента смеси (уравнения неразрывности)

$$\frac{\overset{\alpha}{D}\rho_\alpha}{Dt}+\rho_\alpha\frac{\partial\overset{\alpha}{v}_k}{\partial x_k}-\sum_{\nu=1}^{N}J_{\nu\alpha}=0. \tag{3}$$

Очевидно, что уравнение (3) можно записать иначе:

$$\frac{\partial\rho_\alpha}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}\bigl(\rho_\alpha\overset{\alpha}{v}_k\bigr)-\sum_{\nu=1}^{N}J_{\nu\alpha}=0. \tag{4}$$

В соответствии с законом сохранения количества движения для объема V, ограниченного поверхностью S, скорость изменения количества движения α-го компонента смеси равна сумме всех действующих на этот компонент поверхностных и массовых сил:

$$\frac{\overset{\alpha}{D}}{Dt}\int\limits_{V}\rho_\alpha\overset{\alpha}{v}_k\,dV=\int\limits_{V}\overset{\alpha}{b}_k+\int\limits_{S}\overset{\alpha}{p}_k\,dS+\int\limits_{V}\sum_{\nu=1}^{N}\overset{\nu\alpha}{P}_k\,dV\ ,\ \alpha=\overline{1,N}, \tag{5}$$

где $\overset{\alpha}{b}_k$ — составляющие вектора плотности объемных сил, действующих на α-й компонент смеси, $\overset{\alpha}{p}_k$ — составляющие вектора интенсивности поверхностных сил, действующих на α-й компонент смеси; $\overset{\nu\alpha}{P}_k$ определяют интенсивность обмена количеством движения между α-м и ν-м компонентами смеси. При этом имеют место следующие равенства:

$$\overset{\nu\alpha}{P}_k=-\overset{\alpha\nu}{P}_k,\quad \overset{\alpha\alpha}{P}_k=0. \tag{6}$$

Преобразуя уравнение (5) с учетом (3), получаем

$$\rho_\alpha\frac{\overset{\alpha}{D}\overset{\alpha}{v}_i}{Dt}=\frac{\partial\overset{\alpha}{\sigma}_{ji}}{\partial x_j}+\overset{\alpha}{b}_i+\sum_{\nu=1}^{N}\Bigl(\overset{\nu\alpha}{P}_i-J_{\nu\alpha}\overset{\alpha}{v}_i\Bigr),\quad i,j=1,2,3. \tag{7}$$

Скорость изменения момента количества движения относительно начала выбранной системы координат равна сумме моментов действующих на рассматриваемое тело массовых и поверхностных сил, вызванных внешними по отношению к телу материальными объектами. Для получения локальной формулировки закона сохранения момента количества движения воспользуемся интегральной формой записи этого закона для α-го компонента смеси:

$$\frac{\overset{\alpha}{D}}{Dt}\int\limits_V e_{ijk}x_j\overset{\alpha}{v}_k\rho_\alpha\,dV = \int\limits_V e_{ijk}x_j\overset{\alpha}{b}_k\,dV + \int\limits_S e_{ijk}x_j\overset{\alpha}{p}_k\,dS + \\ + \int\limits_V \sum_{\nu=1}^{N} \overset{\nu\alpha}{M}_i\,dV, \quad \alpha=\overline{1,N}, \tag{8}$$

где e_{ijk} — символ Леви-Чивиты; $\overset{\nu\alpha}{M}_i$ определяет интенсивность обмена моментом количества движения между α-м и ν-м компонентами смеси, при этом

$$\overset{\nu\alpha}{M}_i = -\overset{\alpha\nu}{M}_i, \quad \overset{\alpha\alpha}{M}_i = 0. \tag{9}$$

Преобразуем отдельно левую часть и второе слагаемое в правой части равенства (8) и окончательно получим локальную формулировку закона сохранения момента количества движения:

$$e_{ijk}\left(x_j\sum_{\nu=1}^{N}\overset{\nu\alpha}{P}_k - \overset{\alpha}{\sigma}_{jk}\right) - \sum_{\nu=1}^{N}\overset{\nu\alpha}{M}_i = 0, \quad \alpha=\overline{1,N}. \tag{10}$$

Из равенства (10) следует, что тензор напряжений Коши для каждого компонента смеси несимметричен ($\overset{\alpha}{\sigma}_{jk} \neq \overset{\alpha}{\sigma}_{kj}$) только вследствие имеющего место межкомпонентного обмена моментом количества движения. Очевидно, что если в равенстве (10) провести суммирование по α от 1 до N, то получим

$$\sigma_{jk} = \sigma_{kj},$$

т.е. для всей смеси тензор напряжений Коши симметричен.

При формулировании закона сохранения энергии (первого закона термодинамики), в соответствии с которым скорость изменения во времени полной энергии произвольного объема сплошной среды равна сумме мощности действующих на термодинамическую систему механических сил и скорости изменения поступающей в рассматриваемую термодинамическую систему тепловой энергии, будем полагать, что объемная плотность полной энергии ρE^* рассматриваемой термодинамической системы есть сумма внутренней и кинетической энергий, т.е.

$$\rho E^* = \sum_{\alpha=1}^{N} \rho_\alpha E^*_\alpha = \int\limits_V \sum_{\alpha=1}^{N} \Big(\rho_\alpha u_\alpha + k_\alpha\Big)\, dV,$$

где $\rho_\alpha E^*_\alpha$ — объемная плотность полной энергии α-го компонента смеси; u_α — массовая плотность внутренней энергии α-го компонента смеси; $k_\alpha = \rho_\alpha \overset{\alpha}{v}_i \overset{\alpha}{v}_i/2$ — объемная плотность кинетической энергии α-го компонента в рассматриваемой материальной макроточке. Для α-го компонента смеси закон сохранения энергии имеет вид

$$\frac{\overset{\alpha}{D}}{Dt} \int\limits_V \left(\rho_\alpha u_\alpha + \frac{1}{2}\rho_\alpha \overset{\alpha}{v}_i \overset{\alpha}{v}_i\right)\, dV = \int\limits_S \overset{\alpha}{p}_i \overset{\alpha}{v}_i\, dS +$$

$$+ \int\limits_V \overset{\alpha}{b}_i \overset{\alpha}{v}_i\, dV + \int\limits_V \overset{\alpha}{q}_V\, dV - \int\limits_S \overset{\alpha}{q}_i n_i\, dS + \int\limits_V \sum_{\nu=1}^{N} E_{\nu\alpha}\, dV, \qquad (11)$$

где $\overset{\alpha}{q}_V$ — объемная плотность мощности внутренних источников (или стоков) теплоты в α-м компоненте смеси; $\overset{\alpha}{q}_i$ — составляющие вектора плотности теплового потока $q_i = \sum\limits_{\alpha=1}^{N} \overset{\alpha}{q}_i$; $E_{\nu\alpha}$ определяет интенсивность энергообмена между α-м и ν-м компонентами смеси, $E_{\nu\alpha} = -E_{\alpha\nu}$, $E_{\alpha\alpha} = 0$.

Локальная формулировка закона сохранения энергии очевидна:

$$\rho_\alpha \frac{\overset{\alpha}{D} u_\alpha}{Dt} = \overset{\alpha}{\sigma}_{(ji)} \overset{\alpha}{V}_{ij} + \overset{\alpha}{\sigma}_{<ji>} \overset{\alpha}{W}_{ij} - \frac{\partial \overset{\alpha}{q}_i}{\partial x_i} + \overset{\alpha}{q}_V +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{N} \left(E_{\nu\alpha} - \overset{\nu\alpha}{P}_i \overset{\alpha}{v}_i - J_{\nu\alpha}\Big(u_\alpha - \frac{1}{2}\overset{\alpha}{v}_i \overset{\alpha}{v}_i\Big)\right) = 0, \qquad (12)$$

где $\overset{\alpha}{\sigma}_{(ji)}$, $\overset{\alpha}{\sigma}_{<ji>}$ — компоненты симметричной и антисимметричной частей тензора напряжений α-го компонента, $\overset{\alpha}{\sigma}_{ji} = \overset{\alpha}{\sigma}_{(ji)} + \overset{\alpha}{\sigma}_{<ji>}$; $\dfrac{\partial \overset{\alpha}{v}_i}{\partial x_j} = \overset{\alpha}{V}_{ij} + \overset{\alpha}{W}_{ij}$; $\overset{\alpha}{V}_{ij} = (\partial \overset{\alpha}{v}_i/\partial x_j + \partial \overset{\alpha}{v}_j/\partial x_i)/2$ — компоненты тензора скоростей; $\overset{\alpha}{W}_{ij} = (\partial \overset{\alpha}{v}_i/\partial x_j - \partial \overset{\alpha}{v}_j/\partial x_i)$ — компоненты тензора завихренности.

Второй закон термодинамики в виде неравенства Клаузиуса–Дюгема для α-го компонента смеси можно записать в виде

$$\rho_\alpha \frac{\overset{\alpha}{D} h_\alpha}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\overset{\alpha}{q}_i}{T_\alpha}\right) - \frac{\overset{\alpha}{q}_V}{T_\alpha} - \rho_\alpha \sum_{\nu=1}^{N} h_{\nu\alpha} \geqslant 0,$$

где h_α, T_α — массовая плотность энтропии и абсолютная температура α-го компонента смеси; $h_{\nu\alpha}$ — массовая плотность энтропии, получаемая в единицу времени α-м компонентом при взаимодействии с ν-м компонентом смеси, $h_{\nu\alpha} = -h_{\alpha\nu}$, $h_{\alpha\alpha} = 0$. Однако справедливость записанного неравенства вызывает сомнения, так как заранее неясно, выполняется ли второй закон термодинамики для отдельных компонентов смеси. Поэтому целесообразно использовать глобальную формулировку этого закона для всей смеси в целом, получаемую суммированием в левой части последнего неравенства по α от 1 до N:

$$\sum_{\alpha=1}^{N}\left(\rho_\alpha \frac{\overset{\alpha}{D} h_\alpha}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\overset{\alpha}{q}_i}{T_\alpha}\Big) - \frac{\overset{\alpha}{q}_V}{T_\alpha}\right) \geqslant 0, \tag{13}$$

где учтено, что $\sum\limits_{\alpha=1}^{N}\rho_\alpha\sum\limits_{\nu=1}^{N} h_{\nu\alpha} \equiv 0$.

Если ввести в рассмотрение массовую плотность свободной энергии α-го компонента A_α с помощью преобразования Лежандра [5]

$$u_\alpha = A_\alpha + T_\alpha h_\alpha,$$

то закон сохранения энергии (12) можно записать иначе:

$$\rho_\alpha T_\alpha \frac{\overset{\alpha}{D} h_\alpha}{Dt} = -\frac{\partial \overset{\alpha}{q}_i}{\partial x_i} + \overset{\alpha}{q}_V + \delta_\alpha, \tag{14}$$

где

$$\delta_\alpha = \overset{\alpha}{\sigma}_{(ji)}\overset{\alpha}{V}_{ij} + \overset{\alpha}{\sigma}_{<ji>}\overset{\alpha}{W}_{ij} - \rho_\alpha\left(\frac{\overset{\alpha}{D} A_\alpha}{Dt} + h_\alpha \frac{\overset{\alpha}{D} T_\alpha}{Dt}\right) +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{N}\left(E_{\nu\alpha} - \overset{\nu\alpha}{P}_i \overset{\alpha}{v}_i - J_{\nu\alpha}\Big(A_\alpha + T_\alpha h_\alpha - \frac{1}{2}\overset{\alpha}{v}_i\overset{\alpha}{v}_i\Big)\right)$$

— диссипативная функция для α-го компонента.

Отметим, что при изучении движения и деформации многокомпонентной смеси основная трудность связана с определением условий межкомпонентного взаимодействия, т.е. с определением $J_{\nu\alpha}$, $\overset{\nu\alpha}{P}_i$, $\overset{\nu\alpha}{M}_i$ и $E_{\nu\alpha}$. Результаты математического моделирования происходящих в смеси процессов могут существенным образом зависеть от указанных условий.

2. Линейная двухкомпонентная термоупругая среда. При изучении поведения двухкомпонентной смеси будем полагать, что $\left|\partial\overset{\alpha}{u}_i/\partial x_j\right| \ll 1$ и $\left|\overset{\alpha(T)}{\varepsilon}_{ij}\right| \ll 1$, где $\overset{\alpha}{u}_i$ — составляющие вектора перемещения; $\overset{\alpha(T)}{\varepsilon}_{ij}$ — компоненты тензора температурной деформации α-го компонента смеси, причем в данном случае $\alpha = 1, 2$. Так как деформация мала, то примем, что $\overset{\alpha}{D}(\cdot)/Dt \equiv \partial(\cdot)/\partial t$ [5]. Массообмен между компонентами отсутствует: $J_{\nu\alpha} = 0$.

Положим, что состояние каждого компонента смеси определяется четырьмя термодинамическими функциями:

— массовой плотностью свободной энергии

$$A_\alpha = A_\alpha(\overset{\alpha}{\varepsilon}_{kl}, \overset{\nu}{\varepsilon}_{kl}, T_\alpha, T_\nu, \overset{\alpha}{\vartheta}_k, \overset{\nu}{\vartheta}_k, \partial\overset{\nu}{u}_k/\partial t - \partial\overset{\alpha}{u}_k/\partial t, \overset{\nu}{u}_k - \overset{\alpha}{u}_k),$$

$$\rho A = \sum_{\alpha=1}^{2} \rho_\alpha A_\alpha;$$

— массовой плотностью энтропии

$$h_\alpha = h_\alpha(\overset{\alpha}{\varepsilon}_{kl}, \overset{\nu}{\varepsilon}_{kl}, \ldots, \overset{\nu}{u}_k - \overset{\alpha}{u}_k), \;\; \rho h = \sum_{\alpha=1}^{2} \rho_\alpha h_\alpha; \tag{15}$$

— тензором напряжений с компонентами

$$\overset{\alpha}{\sigma}_{ij} = \overset{\alpha}{\sigma}_{ij}(\overset{\alpha}{\varepsilon}_{kl}, \overset{\nu}{\varepsilon}_{kl}, \ldots, \overset{\nu}{u}_k - \overset{\alpha}{u}_k), \;\; \sigma_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{2} \overset{\alpha}{\sigma}_{ij};$$

— вектором плотности теплового потока с компонентами

$$\overset{\alpha}{q}_i = \overset{\alpha}{q}_i(\overset{\alpha}{\varepsilon}_{kl}, \overset{\nu}{\varepsilon}_{kl}, \ldots, \overset{\nu}{u}_k - \overset{\alpha}{u}_k), \quad q_i = \sum_{\alpha=1}^{2} \overset{\alpha}{q}_i,$$

где $\overset{\alpha}{\varepsilon}_{kl} = (\partial\overset{\alpha}{u}_k/\partial x_l + \partial\overset{\alpha}{u}_l/\partial x_k)/2$, $\overset{\nu}{\varepsilon}_{kl} = (\partial\overset{\nu}{u}_k/\partial x_l + \partial\overset{\nu}{u}_l/\partial x_k)/2$ — компоненты тензоров малой деформации α-го и ν-го компонентов смеси соответственно; T_α, T_ν — абсолютные температуры компонентов; $\overset{\alpha}{\vartheta}_k = \partial T_\alpha/\partial x_k$, $\overset{\nu}{\vartheta}_k = \partial T_\nu/\partial x_k$; $\alpha, \nu = 1, 2$ и $\alpha \neq \nu$. Аргументами определяющих функций в силу принципа равноприсутствия [5] могут быть, в общем случае, одни и те же переменные.

Для замыкания системы определяющих уравнений необходимо задать выражения для $\overset{\nu\alpha}{P}_i$, $\overset{\nu\alpha}{M}_i$ и $E_{\nu\alpha}$. Аргументами этих функций могут быть приняты те же переменные, что и для соотношений из (15), т.е.

$$\begin{gathered}
\overset{\nu\alpha}{P}_i = \overset{\nu\alpha}{P}_i(\overset{\alpha}{\varepsilon}_{kl}, \overset{\nu}{\varepsilon}_{kl}, \ldots, \overset{\nu}{u}_k - \overset{\alpha}{u}_k); \\
\overset{\nu\alpha}{M}_i = \overset{\nu\alpha}{M}_i(\overset{\alpha}{\varepsilon}_{kl}, \overset{\nu}{\varepsilon}_{kl}, \ldots, \overset{\nu}{u}_k - \overset{\alpha}{u}_k); \\
E_{\nu\alpha} = E_{\nu\alpha}(\overset{\alpha}{\varepsilon}_{kl}, \overset{\nu}{\varepsilon}_{kl}, \ldots, \overset{\nu}{u}_k - \overset{\alpha}{u}_k).
\end{gathered} \tag{16}$$

Если подставим первое выражение из (15) в (12) с учетом принятых допущений и связи между u_α и A_α, то получим

$$\rho_\alpha \frac{\partial A_\alpha}{\partial \overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij}} \frac{\partial \overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij}}{\partial t} + \rho_\alpha \frac{\partial A_\alpha}{\partial \overset{\nu}{\varepsilon}_{ij}} \frac{\partial \overset{\nu}{\varepsilon}_{ij}}{\partial t} + \rho_\alpha \frac{\partial A_\alpha}{\partial T_\alpha} \frac{\partial T_\alpha}{\partial t} + \rho_\alpha \frac{\partial A_\alpha}{\partial T_\nu} \frac{\partial T_\nu}{\partial t} + \rho_\alpha \frac{\partial A_\alpha}{\partial \overset{\alpha}{\vartheta}_i} \frac{\partial \overset{\alpha}{\vartheta}_i}{\partial t} +$$

$$+\rho_\alpha \frac{\partial A_\alpha}{\partial \overset{\nu}{\vartheta}_i} \frac{\partial \overset{\nu}{\vartheta}_i}{\partial t} + \rho_\alpha \frac{\partial A_\alpha}{\partial (\partial \overset{\nu}{u}_i/\partial t - \partial \overset{\alpha}{u}_i/\partial t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \overset{\nu}{u}_i}{\partial t} - \frac{\partial \overset{\alpha}{u}_i}{\partial t} \right) +$$

$$+\rho_\alpha \frac{\partial A_\alpha}{\partial (\overset{\nu}{u}_i - \overset{\alpha}{u}_i)} \frac{\partial}{\partial t} (\overset{\nu}{u}_i - \overset{\alpha}{u}_i) - \overset{\alpha}{\sigma}_{(ji)} \frac{\partial \overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij}}{\partial t} - \overset{\alpha}{\sigma}_{<ji>} \frac{\partial \overset{\alpha}{w}_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial \overset{\alpha}{q}_i}{\partial x_i} -$$

$$-\overset{\alpha}{q}_V - \sum_{\nu=1}^{2} \left(E_{\nu\alpha} - \overset{\nu\alpha}{P}_i \frac{\partial \overset{\alpha}{u}_i}{\partial t} \right) = 0, \tag{17}$$

где $\overset{\alpha}{w}_{ij} = (\partial \overset{\alpha}{u}_i/\partial x_j - \partial \overset{\alpha}{u}_j/\partial x_i)/2$ — компоненты тензора линейного поворота.

Разделив все слагаемые в левой части (17) на T_α ($T_\alpha \neq 0$), просуммируем результат по α от 1 до 2, вычтем его из левой части неравенства (13) и получим

$$-\sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\rho_\alpha}{T_\alpha} \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial T_\alpha} + h_\alpha \right) \frac{\partial T_\alpha}{\partial t} + \right.$$

$$\frac{\rho_\alpha}{T_\alpha} \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial T_\nu} \frac{\partial T_\nu}{\partial t} + \frac{\partial A_\alpha}{\partial \overset{\nu}{\vartheta}_i} \frac{\partial \overset{\nu}{\vartheta}_i}{\partial t} \right) + \frac{\rho_\alpha}{T_\alpha} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \overset{\alpha}{\vartheta}_i} \frac{\partial \overset{\alpha}{\vartheta}_i}{\partial t} +$$

$$+\frac{1}{T_\alpha} \left(\rho_\alpha \frac{\partial A_\alpha}{\partial \overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij}} - \overset{\alpha}{\sigma}_{(ji)} \right) \frac{\partial \overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij}}{\partial t} - \frac{1}{T_\alpha} \overset{\alpha}{\sigma}_{<ji>} \frac{\partial \overset{(\alpha)}{w}_{ij}}{\partial t} + \frac{\rho_\alpha}{T_\alpha} \frac{\partial A_\alpha}{\partial \overset{\nu}{\varepsilon}_{ij}} \frac{\partial \overset{\nu}{\varepsilon}_{ij}}{\partial t} +$$

$$+\frac{\rho_\alpha}{T_\alpha} \frac{\partial A_\alpha}{\partial (\partial \overset{\nu}{u}_i/\partial t - \partial \overset{\alpha}{u}_i/\partial t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \overset{\nu}{u}_i}{\partial t} - \frac{\partial \overset{\alpha}{u}_i}{\partial t} \right) + \frac{\rho_\alpha}{T_\alpha} \frac{\partial A_\alpha}{\partial (\overset{\nu}{u}_i - \overset{\alpha}{u}_i)} \frac{\partial}{\partial t} (\overset{\nu}{u}_i - \overset{\alpha}{u}_i) +$$

$$\left. + \frac{1}{T_\alpha^2} \overset{\alpha}{q}_i \frac{\partial T_\alpha}{\partial x_i} + \frac{1}{T_\alpha} \sum_{\nu=1}^{2} \left(E_{\nu\alpha} - \overset{\nu\alpha}{P}_i \frac{\partial \overset{\alpha}{u}_i}{\partial t} \right) \right) \geqslant 0. \tag{18}$$

Из неравенства (18) в силу произвольности $\partial T_\alpha/\partial t$, $\partial \overset{\alpha}{\vartheta}_i/\partial t$, $\partial \overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij}/\partial t$, $\partial(\partial \overset{\nu}{u}_i/\partial t - \partial \overset{\alpha}{u}_i/\partial t)/\partial t$ и $\partial(\overset{\nu}{u}_i - \overset{\alpha}{u}_i)/\partial t$ следует, что

$$\begin{gathered} h_\alpha = -\frac{\partial A_\alpha}{\partial T_\alpha}, \quad \frac{\partial A_\alpha}{\partial \overset{\alpha}{\vartheta}_i} = 0, \quad \overset{\alpha}{\sigma}_{(ji)} = \rho_\alpha \frac{\partial A_\alpha}{\partial \overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij}}, \\ \frac{\partial A_\alpha}{\partial (\partial \overset{\nu}{u}_i/\partial t - \partial \overset{\alpha}{u}_i/\partial t)} = 0, \quad \frac{\partial A_\alpha}{\partial (\overset{\nu}{u}_i - \overset{\alpha}{u}_i)} = 0. \end{gathered} \tag{19}$$

Кроме того, полагая, что влияние изменения реактивных переменных ν-го компонента $(T_\nu, \overset{\nu}{\vartheta}_i, \overset{\nu}{\varepsilon}_{ij})$ на изменение энтропии α-го компонента смеси равно по абсолютной величине, но противоположно по знаку влиянию изменения реактивных переменных α-го компонента на изменение энтропии ν-го компонента смеси, можем записать следующее равенство:

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\rho_\alpha}{T_\alpha} \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial T_\nu} \frac{\partial T_\nu}{\partial t} + \frac{\partial A_\alpha}{\partial \overset{\nu}{\vartheta}_i} \frac{\partial \overset{\nu}{\vartheta}_i}{\partial t} + \frac{\partial A_\alpha}{\partial \overset{\nu}{\varepsilon}_{ij}} \frac{\partial \overset{\nu}{\varepsilon}_{ij}}{\partial t} \right) = 0, \quad \alpha \neq \nu. \tag{20}$$

Отметим, что в неравенстве (18) несимметрия тензора напряжений Коши α-го компонента ($\overset{\alpha}{\sigma}_{<ji>} \neq 0$) обусловлена только наличием момента $\overset{\nu\alpha}{M}_i \neq 0$ и силы межкомпонентного взаимодействия $\overset{\nu\alpha}{P}_k \neq 0$ $(e_{ijk} x_j \overset{\nu\alpha}{P}_k \neq 0)$ в выражении закона сохранения момента количества движения для каждого компонента. Далее, поскольку всегда выполняется второе равенство из (19), то положим, что $\partial A_\alpha / \partial \overset{\nu}{\vartheta}_i \equiv 0$. Тогда соотношение (20) принимает более простой вид:

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\rho_\alpha}{T_\alpha} \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial T_\nu} \frac{\partial T_\nu}{\partial t} + \frac{\partial A_\alpha}{\partial \overset{\nu}{\varepsilon}_{ij}} \frac{\partial \overset{\nu}{\varepsilon}_{ij}}{\partial t} \right) = 0, \quad \alpha \neq \nu. \tag{21}$$

С учетом равенств (19) и (21) второй закон термодинамики (18) примет более простую форму $(\alpha \neq \nu)$:

$$-\sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{1}{T_\alpha} \left(\sum_{\nu=1}^{2} \left(E_{\nu\alpha} - \overset{\nu\alpha}{P}_i \frac{\partial \overset{\alpha}{u}_i}{\partial t} \right) \right) - \frac{1}{T_\alpha} \overset{\alpha}{\sigma}_{<ji>} \frac{\partial \overset{\alpha}{w}_{ij}}{\partial t} + \frac{1}{T_\alpha^2} \overset{\alpha}{q}_i \frac{\partial T_\alpha}{\partial x_i} \right) \geqslant 0. \tag{22}$$

Из неравенства (22) следует, что энергообмен между компонентами для двухкомпонентной смеси с различающимися температурами компонентов всегда приводит к возрастанию энтропии смеси. Если $T_\alpha = T_\nu = T$ $(\alpha \neq \nu)$, то неравенство (22) несколько упрощается и принимает вид

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \left(\sum_{\nu=1}^{2} \overset{\nu\alpha}{P}_i \frac{\partial \overset{\alpha}{u}_i}{\partial t} + \overset{\alpha}{\sigma}_{<ji>} \frac{\partial \overset{\alpha}{w}_{ij}}{\partial t} - \frac{1}{T} \overset{\alpha}{q}_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \geqslant 0,$$

т.е. вклад в изменение энтропии системы обусловлен рассеянием энергии только вследствие обмена количеством движения между компонентами и процессом теплопроводности.

Для получения линеаризованных уравнений термоупругости двухкомпонентной смеси представим объемную плотность свободной энергии α-го компонента в виде суммы

$$\rho_\alpha A_\alpha(\overset{\alpha}{\varepsilon}_{kl}, \overset{\nu}{\varepsilon}_{kl}, T_\alpha, T_\nu) = \rho_\alpha A^*_\alpha(\overset{\alpha}{\varepsilon}_{kl} - \overset{\alpha(T)}{\varepsilon_{kl}}, \overset{\nu}{\varepsilon}_{kl} - \overset{\nu(T)}{\varepsilon_{kl}}) + \rho_\alpha B_\alpha(T_\alpha, T_\nu) -$$
$$-\rho_\alpha A^*_\alpha(-\overset{\alpha(T)}{\varepsilon_{kl}}, -\overset{\nu(T)}{\varepsilon_{kl}}), \tag{23}$$

учитывающей второе, четвертое и пятое равенства из (19). Здесь $\rho_\alpha A^*_\alpha(\,\cdot\,)$ — часть объемной плотности свободной энергии, зависящая только от $\overset{\alpha}{\varepsilon}_{kl} - \overset{\alpha(T)}{\varepsilon_{kl}}$ и $\overset{\nu}{\varepsilon}_{kl} - \overset{\nu(T)}{\varepsilon_{kl}}$ или $\overset{\alpha(T)}{\varepsilon_{kl}}$ и $\overset{\nu(T)}{\varepsilon_{kl}}$. Если $\overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij} = 0$ и $\overset{\nu}{\varepsilon}_{ij} = 0$, то $\rho_\alpha A_\alpha(\overset{\alpha}{\varepsilon}_{kl}, \overset{\nu}{\varepsilon}_{kl}, T_\alpha, T_\nu) = \rho_\alpha B_\alpha(T_\alpha, T_\nu)$, а при $\overset{\alpha}{\varepsilon}_{kl} = \overset{\alpha(T)}{\varepsilon_{kl}}$ и $\overset{\nu}{\varepsilon}_{kl} = \overset{\nu(T)}{\varepsilon_{kl}}$ объемная плотность свободной энергии зависит только от температур T_α и T_ν, $\rho_\alpha A_\alpha(\overset{\alpha}{\varepsilon}_{kl}, \overset{\nu}{\varepsilon}_{kl}, T_\alpha, T_\nu) = \rho_\alpha B_\alpha(T_\alpha, T_\nu) - \rho_\alpha A^*_\alpha(-\overset{\alpha(T)}{\varepsilon_{kl}}, -\overset{\nu(T)}{\varepsilon_{kl}})$. Такое выражение объемной плотности свободной энергии дает возможность рассматривать не только малые отклонения абсолютной температуры от температуры $T_0 = \mathrm{const}$ естественного состояния, но и достаточно большие, однако при сохранении малости $\overset{\alpha(T)}{\varepsilon_{ij}}$ и $\overset{\nu(T)}{\varepsilon_{ij}}$. Функция $B_\alpha(T_\alpha, T_\nu)$ равна нулю при $T_\alpha = T_\nu = T_0$, она определяет изменение свободной энергии только вследствие изменения абсолютной температуры α-го компонента.

Предположение о малости компонент полных ($\overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij}, \overset{\nu}{\varepsilon}_{ij}$) и температурных ($\overset{\alpha(T)}{\varepsilon_{ij}}, \overset{\nu(T)}{\varepsilon_{ij}}$) деформаций компонентов смеси позволяет представить первое и третье слагаемые в выражении (23) в виде ряда Тейлора по соответствующим аргументам и ограничиться при разложении квадратичными слагаемыми:

$$\rho_\alpha A_\alpha(\overset{\alpha}{\varepsilon}_{kl}, \overset{\nu}{\varepsilon}_{kl}\, T_\alpha, T_\nu) = \rho_\alpha A^*_\alpha(\overset{\alpha}{\varepsilon}_{kl} - \overset{\alpha(T)}{\varepsilon_{kl}}, \overset{\nu}{\varepsilon}_{kl} - \overset{\nu(T)}{\varepsilon_{kl}}) + \rho_\alpha B_\alpha(T_\alpha, T_\nu) -$$
$$-\rho_\alpha A^*_\alpha(-\overset{\alpha(T)}{\varepsilon_{kl}}, -\overset{\nu(T)}{\varepsilon_{kl}}) = \overset{\alpha}{G}_{ij}\overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij} + \overset{\nu\alpha}{F}_{ij}\overset{\nu}{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2}\overset{\alpha}{C}_{ijkl}(\overset{\alpha}{\varepsilon}_{kl} - \overset{\alpha(T)}{\varepsilon_{kl}})(\overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij} - \overset{\alpha(T)}{\varepsilon_{ij}}) -$$
$$-\overset{\nu\alpha}{D}_{ijkl}(\overset{\nu}{\varepsilon}_{kl} - \overset{\nu(T)}{\varepsilon_{kl}})(\overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij} - \overset{\alpha(T)}{\varepsilon_{ij}}) + \frac{1}{2}\overset{\nu\alpha}{H}_{ijkl}(\overset{\nu}{\varepsilon}_{kl} - \overset{\nu(T)}{\varepsilon_{kl}})(\overset{\nu}{\varepsilon}_{ij} - \overset{\nu(T)}{\varepsilon_{ij}}) +$$
$$+\rho_\alpha B_\alpha(T_\alpha, T_\nu) - \frac{1}{2}\overset{\alpha}{C}_{ijkl}(-\overset{\alpha(T)}{\varepsilon_{kl}})(-\overset{\alpha(T)}{\varepsilon_{ij}}) + \overset{\nu\alpha}{D}_{ijkl}(-\overset{\nu(T)}{\varepsilon_{kl}})(-\overset{\alpha(T)}{\varepsilon_{ij}}) -$$
$$-\frac{1}{2}\overset{\nu\alpha}{H}_{ijkl}(-\overset{\nu(T)}{\varepsilon_{kl}})(-\overset{\nu(T)}{\varepsilon_{ij}}), \tag{24}$$

где $\overset{\alpha}{C}_{ijkl}$ — компоненты тензора коэффициентов упругости; $\overset{\nu\alpha}{D}_{ijkl}$ — компоненты тензора межкомпонентного взаимодействия, $\nu \neq \alpha$, $\overset{\alpha\alpha}{D}_{ijkl} = 0$; $\overset{\nu\alpha}{H}_{ijkl}$ — компоненты тензора механического влияния ν-го компонента смеси на объемную плотность свободной энергии α-го компонента.

Поскольку компоненты тензора напряжений Коши $\overset{\alpha}{\sigma}_{(ji)}$ связаны с компонентами тензоров деформации $\overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij}$ и $\overset{\nu}{\varepsilon}_{ij}$ третьим равенством из (19), то из (24) следует выражение

$$\overset{\alpha}{\sigma}_{(ji)} = \overset{\alpha}{G}_{ij} + \overset{\alpha}{C}_{ijkl}(\overset{\alpha}{\varepsilon}_{kl} - \overset{\alpha(T)}{\varepsilon_{kl}}) - \overset{\nu\alpha}{D}_{ijkl}(\overset{\nu}{\varepsilon}_{kl} - \overset{\nu(T)}{\varepsilon_{kl}}),$$

в правой части которого первое слагаемое отлично от нуля только при наличии остаточных (технологических) напряжений. В большинстве практически важных случаев эти напряжения невелики и можно принять в (24) $\overset{\alpha}{G}_{ij} \equiv 0$ и $\overset{\nu\alpha}{F}_{ij} \equiv 0$. Тогда

$$\overset{\alpha}{\sigma}_{(ji)} = \overset{\alpha}{C}_{ijkl}(\overset{\alpha}{\varepsilon}_{kl} - \overset{\alpha(T)}{\varepsilon_{kl}}) - \overset{\nu\alpha}{D}_{ijkl}(\overset{\nu}{\varepsilon}_{kl} - \overset{\nu(T)}{\varepsilon_{kl}}). \qquad (25)$$

Соотношение (25) по аналогии с классической термоупругостью можно назвать законом Дюамеля–Неймана для смеси анизотропных компонентов.

Каждый из тензоров коэффициентов упругости и межкомпонентного взаимодействия содержит 81 компоненту. Однако поскольку $\overset{\alpha}{\sigma}_{(ji)} = \overset{\alpha}{\sigma}_{(ij)}$, $\overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij} = \overset{\alpha}{\varepsilon}_{ji}$ и $\overset{\nu}{\varepsilon}_{ij} = \overset{\nu}{\varepsilon}_{ji}$, то число независимых компонент этих тензоров сокращается до 36. Если далее учесть равенства $\partial^2 A_\alpha/(\partial\overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij}\partial\overset{\alpha}{\varepsilon}_{kl}){=}\partial^2 A_\alpha/(\partial\overset{\alpha}{\varepsilon}_{kl}\partial\overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij})$ и $\partial^2 A_\alpha/(\partial^2\overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij}\partial\overset{\nu}{\varepsilon}_{kl}){=}\partial^2 A_\alpha/(\partial\overset{\nu}{\varepsilon}_{kl}\partial\overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij})$, то $\overset{\alpha}{C}_{ijkl} = \overset{\alpha}{C}_{jikl} = \overset{\alpha}{C}_{ijlk} = \overset{\alpha}{C}_{klij}$, $\overset{\nu\alpha}{D}_{ijkl} = \overset{\nu\alpha}{D}_{jikl} = \overset{\nu\alpha}{D}_{ijlk} = \overset{\nu\alpha}{D}_{klij}$ и число независимых компонент каждого из этих тензоров составит 21.

Антисимметричная часть тензора напряжений с компонентами $\overset{\alpha}{\sigma}_{<ij>}$ может быть представлена с использованием символов Леви-Чивиты e_{ijk} и Кронекера δ_{ij} следующим образом:

$$\overset{\alpha}{\sigma}_{<ij>} = -e_{ijk}(e_{kmn}x_m\overset{\nu\alpha}{P}_n + \overset{\nu\alpha}{M}_k) = (\delta_{in}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jn})x_m\overset{\nu\alpha}{P}_n - e_{ijk}\overset{\nu\alpha}{M}_k. \qquad (26)$$

Зачастую при построении модели двухкомпонентной упругой смеси полагают $\overset{\nu\alpha}{P}_n = 0$ и $\overset{\nu\alpha}{M}_k = 0$. В этом случае $\overset{\alpha}{\sigma}_{<ij>} = 0$ и $\overset{\alpha}{\sigma}_{ij} = \overset{\alpha}{\sigma}_{(ij)}$.

Выражение для h_α — массовой плотности энтропии α-го компонента смеси — получим из первого равенства (19) с учетом представления (24) объемной плотности свободной энергии:

$$h_\alpha = -\frac{\partial A_\alpha}{\partial T_\alpha} = \frac{1}{\rho_\alpha}\left(\overset{\alpha}{C}_{ijkl}\overset{\alpha}{\varepsilon}_{kl} - \overset{\nu\alpha}{D}_{ijkl}\overset{\nu}{\varepsilon}_{kl}\right)\frac{\partial\overset{\alpha(T)}{\varepsilon_{ij}}}{\partial T_\alpha} - \frac{\partial B_\alpha}{\partial T_\alpha}. \qquad (27)$$

При температуре T_0 естественного состояния и отсутствии деформации ($\overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij}{=}0$, $\overset{\nu}{\varepsilon}_{ij}{=}0$) массовая плотность энтропии $h_\alpha(0,0,T_0,T_0) = 0$ и, следовательно, $\partial B_\alpha/\partial T_\alpha = 0$ при $T_\alpha = T_\nu = T_0$.

С учетом (24) и (26) диссипативная функция из (14) для рассматриваемой среды примет вид

$$\delta_\alpha = \overset{\alpha}{\sigma}_{(ji)} \frac{\partial \overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij}}{\partial t} +$$

$$+\overset{\alpha}{\sigma}_{<ji>} \frac{\partial \overset{\alpha}{w}_{ij}}{\partial t} - \rho_\alpha \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial t} + h_\alpha \frac{\partial T_\alpha}{\partial t} \right) + \sum_{\nu=1}^{N} \left(E_{\nu\alpha} - \overset{\nu\alpha}{P}_i \frac{\partial \overset{\alpha}{u}_i}{\partial t} \right) =$$

$$= \overset{\alpha}{\sigma}_{<ji>} \frac{\partial \overset{\alpha}{w}_{ij}}{\partial t} - \rho_\alpha \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial \overset{\nu}{\varepsilon}_{ij}} \frac{\partial \overset{\nu}{\varepsilon}_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial A_\alpha}{\partial T_\nu} \frac{\partial T_\nu}{\partial t} \right) + \sum_{\nu=1}^{N} \left(E_{\nu\alpha} - \overset{\nu\alpha}{P}_i \frac{\partial \overset{\alpha}{u}_i}{\partial t} \right) =$$

$$=\left(\left(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{jm}\delta_{in}\right) x_m \overset{\nu\alpha}{P}_n + e_{ijk} \overset{\nu\alpha}{M}_k\right) \frac{\partial \overset{\alpha}{w}_{ij}}{\partial t} + \overset{\nu\alpha}{D}_{ijkl} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left(\overset{\nu}{\varepsilon}_{kl} - \overset{\nu(T)}{\varepsilon}_{kl}\right)\left(\overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij} - \overset{\alpha(T)}{\varepsilon}_{ij}\right)\right) -$$

$$-\overset{\nu\alpha}{H}_{ijkl}\left(\overset{\nu}{\varepsilon}_{ij} - \overset{\nu(T)}{\varepsilon}_{ij}\right) \frac{\partial\left(\overset{\nu}{\varepsilon}_{kl} - \overset{\nu(T)}{\varepsilon}_{kl}\right)}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^{N} \left(E_{\nu\alpha} - \overset{\nu\alpha}{P}_i \frac{\partial \overset{\alpha}{u}_i}{\partial t} \right). \qquad (28)$$

Закон сохранения энергии в форме уравнения теплопроводности легко получить из соотношений (12), (27), приняв для компонент вектора плотности теплового потока выражение согласно закону Био–Фурье [5]:

$$\overset{\alpha}{q}_i = -\overset{\alpha(T)}{\lambda}_{ij} \frac{\partial T_\alpha}{\partial x_j}, \qquad (29)$$

где $\overset{\alpha(T)}{\lambda}_{ij} = \overset{\alpha(T)}{\lambda}_{ji}$ — компоненты тензора теплопроводности.

Подставляя последовательно (27) и (28) в (14) и пренебрегая слагаемыми, линейно зависящими от $\overset{\alpha}{\varepsilon}_{ij}$ и $\overset{\nu}{\varepsilon}_{ij}$, получаем уравнение теплопроводности α-го компонента смеси

$$\rho_\alpha \overset{\alpha}{c}_\varepsilon \frac{\partial T_\alpha}{\partial t} + \rho_\alpha \overset{\nu\alpha}{c}_\varepsilon \frac{\partial T_\nu}{\partial t} + \left(\overset{\alpha}{C}_{ijkl} \frac{\partial \overset{\alpha}{\varepsilon}_{kl}}{\partial t} - \overset{\nu\alpha}{D}_{ijkl} \frac{\partial \overset{\nu}{\varepsilon}_{kl}}{\partial t} \right) \frac{\partial \overset{\alpha(T)}{\varepsilon}_{ij}}{\partial T_\alpha} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overset{\alpha(T)}{\lambda}_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \overset{\alpha}{q}_V + \delta_\alpha, \qquad (30)$$

в котором учтены эффекты термоупругой связанности полей температуры и деформации, а также диссипация энергии; $\overset{\alpha}{c}_\varepsilon = -T_\alpha \partial^2 B_\alpha / \partial T_\alpha^2$ — удельная массовая теплоемкость α-го компонента смеси при постоянной деформации, $\overset{\nu\alpha}{c}_\varepsilon = -T_\alpha \partial^2 B_\alpha / (\partial T_\alpha \partial T_\nu)$ — "присоединенная" удельная массовая теплоемкость ($\alpha \neq \nu$).

Если подставим в уравнения (7) закона сохранения количества движения α-го компонента смеси соотношения (25) и (26), то получим уравнения движения в перемещениях

$$
\rho_\alpha \frac{\partial^2 \overset{\alpha}{u}_i}{\partial t^2} - \overset{\alpha}{C}_{jikl} \frac{\partial^2 \overset{\alpha}{u}_k}{\partial x_j \partial x_l} + \overset{\nu\alpha}{D}_{jikl} \frac{\partial^2 \overset{\nu}{u}_k}{\partial x_j \partial x_l} - (\delta_{in}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jn})\, x_m \frac{\partial \overset{\nu\alpha}{P}_n}{\partial x_j} +
$$

$$
+ e_{ijk} \frac{\partial \overset{\nu\alpha}{M}_k}{\partial x_j} + \overset{\alpha}{C}_{jikl} \frac{\partial \overset{\alpha(T)}{\varepsilon}_{kl}}{\partial x_j} - \overset{\nu\alpha}{D}_{jikl} \frac{\partial \overset{\nu(T)}{\varepsilon}_{kl}}{\partial x_j} - \overset{\nu\alpha}{P}_i = \overset{\alpha}{b}_i, \tag{31}
$$

в которых учтены равенства $\partial x_m/\partial x_j = \delta_{mj}$, $(\delta_{in}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jn})\delta_{mj} = $ $= 3\delta_{in} - \delta_{in} = 2\delta_{in}$, $2\delta_{ij}\overset{\nu\alpha}{P}_j - \overset{\nu\alpha}{P}_i = \overset{\nu\alpha}{P}_i$.

Для замыкания математической модели двухкомпонентной термоупругой смеси необходимо конкретизировать выражения для усилия межкомпонентного взаимодействия $\overset{\nu\alpha}{P}_i$ и интенсивности межкомпонентного энергообмена $E_{\nu\alpha}$, приняв их, например, в виде

$$
\overset{\nu\alpha}{P}_i = \beta_{ij}\,(\overset{\nu}{u}_j - \overset{\alpha}{u}_j), \quad E_{\nu\alpha} = g(T_\nu - T_\alpha), \tag{32}
$$

где $\beta_{ij} = \beta_{ji}$ — элементы неотрицательно определенной матрицы, $\det(\beta_{ij}) \geqslant 0$, $g \geqslant 0$. Момент межкомпонентного взаимодействия, как правило, не учитывают: $\overset{\nu\alpha}{M}_i = 0$.

Для получения однозначного решения системы уравнений (30) и (31) с учетом соотношений (32) необходимо задать соответствующие начальные и граничные условия, которые существенным образом могут зависеть от структуры смеси. Решение такой краевой задачи представляет собой достаточно сложную самостоятельную проблему.

Заключение. Предложенные термомеханические модели смеси предоставляют широкие возможности для дальнейшего их развития и конкретизации применительно к разнообразным композитным материалам. Это относится в первую очередь к термостабильным композитам на основе углерода и композитам, в которых могут происходить фазовые превращения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты №№ 08-08-00615а, 09-08-00699а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н и г м а т у л и н Р. И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. – М.: Наука, 1987. – 464 с.
2. Х о р о ш у н А. П., С о л т а н о в Н. С. Термоупругость двухкомпонентных смесей. – Киев: Наук. думка, 1984. – 112 с.
3. З а р у б и н В. С., К у в ы р к и н Г. Н. О поведении двухкомпонентной среды при импульсном нагружении // Прикладная механика. – 1990. – Т. 26, № 1. – С. 91–98.
4. З а р у б и н В. С., К у в ы р к и н Г. Н. О поведении двухкомпонентной среды при высокоинтенсивном нагружении // Прикладная механика. – 1990. – Т. 26, № 11. – С. 76–83.

5. З а р у б и н В. С., К у в ы р к и н Г. Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – 512 с.

Статья поступила в редакцию 25.05.2009

Николай Николаевич Головин родился в 1958 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1982 г. Канд. техн. наук, старший научный сотрудник. Начальник отдела прочности, нагрузок и нагрева ФГУП “Московский институт теплотехники”. Автор более 60 научных работ в области математического моделирования термомеханических процессов.

N.N. Golovin (b. 1958) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1982. Ph. D. (Eng.), senior researcher. Head of department of strength, loads and heating of Federal State Unitary Enterprise “Moscow Institute of Thermal Technology”. Author of more than 60 publications in the field of mathematical simulation of thermomechanical processes.

Владимир Степанович Зарубин родился в 1933 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1957 г. Д-р техн. наук, профессор кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Заслуженный деятель науки и техники РФ, лауреат премии Правительства РФ в области науки и техники. Автор более 250 научных работ в области математического моделирования термомеханических процессов в материалах и элементах конструкций.

V.S. Zarubin (b. 1933) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1957. D. Sc. (Eng.), professor of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Honored Science and Technology Worker of the Russian Federation, Laureate of RF Government Prize in Science and Technology. Author of more than 250 publications in the field of mathematical simulation of thermomechanical processes in materials and construction members.

Георгий Николаевич Кувыркин родился в 1946 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1970 г. Д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Лауреат премии Правительства РФ в области науки и техники. Автор более 160 научных работ в области прикладной математики и математического моделирования термомеханических процессов в материалах и элементах конструкций.

G.N. Kuvyrkin (b. 1946) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1970. D. Sc. (Eng.), professor, head of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Laureate of RF Government Prize in Science and Technology. Author of more than 160 publications in the field of applied mathematics and mathematical simulation of thermomechanical processes in materials and construction members.