УДК 517.957; 532.526.2

В. В. Феоктистов, О. О. Мякинник

СТРУКТУРА РЯДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ 1-ГО ПОРЯДКА

Предложена структура ряда с неопределенными числовыми коэффициентами для представления решения линейной и нелинейной систем уравнений в частных производных 1-го порядка и связанных с этими системами задач. Для линейной системы доказана теорема о разложении аналитического решения задачи Коши по бегущим волнам с матричными коэффициентами.

E-mail: olga.mknk@ipmtel.ru

Ключевые слова: уравнения в частных производных в матричной форме, мультииндекс, некоммутативность умножения матриц, оператор волнового взаимодействия, нелинейность квадратичная.

В 1968 г. Ф.И. Федоров (Институт физики АН БССР) записал в матричной форме и предложил к изучению систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных 1-го порядка, нелинейные члены которой представляют собой квадратичную форму [1]:

$$\sum_{k=1}^{s} A_k \frac{\partial \vec{B}}{\partial x_k} = \vec{C}_0 + C_1 \vec{B} + \vec{B}^{\mathrm{т}} C_2 \vec{B}. \qquad (1)$$

Число уравнений системы (1) равно числу компонент искомой n-мерной вектор-функции $\vec{B}$ независимых переменных x_k, $k = \overline{1, s}$:

$$\vec{B}^{\mathrm{т}} = \left(B_1(x_1, x_2, \ldots, x_s),\ B_2(x_1, x_2, \ldots, x_s),\ \ldots,\ B_n(x_1, x_2, \ldots, x_s)\right).$$

Коэффициенты A_k, $k = \overline{1, s}$, представляют собой квадратные числовые матрицы размера $n \times n$ с элементами $a_k^{\{ij\}}$. Каждый элемент n-мерного столбца в правой части системы представляет собой полином 2-й степени относительно компонент неизвестной вектор-функции $\vec{B}$: числовой вектор $\vec{C}_0$ составлен из свободных членов уравнений системы $c_0^{\{i\}}$, $i = \overline{1, n}$; числовая квадратная матрица C_1 размера $n \times n$ содержит коэффициенты $c_1^{\{ij\}}$ при неизвестных функциях B_j, $i, j = \overline{1, n}$; числовая кубическая матрица C_2 размера $n \times n \times n$ состоит из коэффициентов $c_2^{i\{jl\}}$ при квадратичных членах $B_j B_l$, $i, j, l = \overline{1, n}$. Таким образом, i-е уравнение системы (1) имеет вид

$$\sum_{k=1}^{s} \sum_{j=1}^{n} a_k^{\{ij\}} \frac{\partial B_j}{\partial x_k} = c_0^{\{i\}} + \sum_{j=1}^{n} c_1^{\{ij\}} B_j + \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} c_2^{i\{jl\}} B_j B_l.$$

Поясним структуру матрицы C_2. Кубическую матрицу размера $n \times \times n \times n$ можно представить как книгу из n страниц, каждой из которых соответствует квадратная матрица размера $n \times n$. Умножив вектор-строку $\vec{B}^{\text{т}}$ справа на кубическую матрицу C_2, получим квадратную матрицу. Каждая i-я строка этой матрицы является результатом умножения $\vec{B}^{\text{т}}$ на i-ю "страницу", $i = \overline{1, n}$. Умножив затем квадратную матрицу $\vec{B}^{\text{т}} C_2$ справа на вектор-столбец $\vec{B}$, получим столбец $\vec{B}^{\text{т}} C_2 \vec{B}$, i-й элемент которого имеет вид $\sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} c_2^{i\{jl\}} B_j B_l$.

Свойства системы (1) определяются алгебраическими свойствами задающих систему числовых матриц-коэффициентов [1]. Матрицы могут быть вырожденными, состоять только из нулевых элементов или содержать нулевые строки, что позволяет рассматривать в рамках одной системы как нелинейные, так и линейные дифференциальные и алгебраические уравнения.

Выделим некоторые важные частные случаи системы (1). Это, прежде всего, система

$$\sum_{k=1}^{s} A_k \frac{\partial \vec{B}}{\partial x_k} = \vec{C}_0 + C_1 \vec{B}, \tag{2}$$

которая определяется в работах самого Ф.И. Федорова и В.Я. Скоробогатько (Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР) как универсальная форма линейных дифференциальных уравнений [1, 2]. Действительно, при условии равенства числа неизвестных функций и числа уравнений система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами любого порядка может быть приведена к виду (2) при помощи введения в рассмотрение дополнительных функций.

При $n = 1$ и $s = 1$ система (1) представляет собой дифференциальное уравнение Риккати

$$A \frac{dB}{dx} = c_0 + c_1 B + c_2 B^2, \qquad n = 1, \quad s = 1.$$

Поставив задачу отыскания решений системы (1), которые удовлетворяют условию

$$\frac{\partial B_j}{\partial x_k} = 0, \qquad j = \overline{1, n}, \tag{3}$$

получим систему квадратичных алгебраических уравнений

$$0 = c_0^{\{i\}} + \sum_{j=1}^{n} c_1^{\{ij\}} B_j + \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} c_2^{i\{jl\}} B_j B_l, \quad i = \overline{1, n}, \tag{4}$$

относительно неизвестного числового вектора $\vec{B}$. В работе [3] решения системы (1), удовлетворяющие условию (3), выделены в класс элементарных решений. Система дифференциальных уравнений в частных производных 1-го порядка с квадратичной нелинейностью может иметь конечное или бесконечной число действительных элементарных решений либо не иметь таких решений вовсе.

Система (1) допускает случай, когда все матрицы A_k, $k = \overline{1,s}$, задающие левую (дифференциальную) часть, являются нулевыми (содержат только нулевые элементы). Тогда система (1) является алгебраической системой 2-го порядка (4) и имеет только элементарные решения.

К виду (1) можно привести любую систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, нелинейные члены которой представляют собой произведение неизвестных функций и их производных. Этому требованию удовлетворяют многие уравнения математической физики. Система (1) получила название системы Ф.И. Федорова (доказавшего фундаментальное значение этой системы в теоретической физике) или системы универсальных нелинейных уравнений.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных 1-го порядка с квадратичной нелинейностью (1) в качестве математического объекта. В настоящее время не существует общих методов решения этой системы. Для исследования системы (1) и связанных с ней задач предлагается использовать ряды специального вида.

Задача Коши для системы (1). Предположим, что хотя бы одна из матриц-коэффициентов A_k, $k = \overline{1,s}$, задающих левую часть системы (1), является обратимой. Пусть

$$\det A_k \neq 0 \quad \text{при} \quad k = s.$$

Введем обозначение $x_s = t$ для независимого переменного x_s, связанного с выделенной матрицей A_s. Умножим систему (1) слева на $-A_s^{-1}$ и, вернувшись после выполнения этой операции к прежним обозначениям, получим систему уравнений

$$I\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = A\,\vec{B} + \vec{C}_0 + C_1\vec{B} + \vec{B}^{\mathrm{T}} C_2 \vec{B}, \quad A = \sum_{k=1}^{s-1} A_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \tag{5}$$

где I — единичная матрица размера $n \times n$, A — линейный дифференциалный оператор. Будем рассматривать t как временно́е переменное, а x_k, $k = \overline{1,(s-1)}$, как пространственные переменные. Система (5) представляет собой систему нелинейных нестационарных уравнений в матричной форме и является важным частным случаем системы (1) [2].

Вместе с тем запись (5) представляет собой нормальную форму системы дифференциальных уравнений в частных производных, или систему Ковалевской [4].

Для системы (5) рассмотрим начальное условие по переменному t:

$$\begin{gathered}\vec{B}(t,x)\Big|_{t=0} = \vec{\varphi}(x),\ x = (x_1,\ldots,x_{s-1}),\\ \vec{\varphi}^{\,\text{т}}(x) \equiv (\varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)),\end{gathered} \qquad (6)$$

где вектор-функция $\vec{\varphi}(x)$ — аналитическая функция всех своих аргументов в некоторой области G_0 гиперплоскости $t = 0$, содержащей точку x^0, $x^0 = (x_1^0,\ldots,x_{s-1}^0)$. Таким образом, задача Коши (5)–(6) для системы Ф.И. Федорова (1) в случае ее приведения к нормальной форме (5) удовлетворяет условиям теоремы Коши–Ковалевской, следовательно, задача (5)–(6) имеет единственное аналитическое решение в некоторой достаточно малой области G, $G \supset G_0$, пространства переменных $(t,x_1,\ldots,x_{s-1})$ [5].

При исследовании системы Ф.И. Федорова для сохранения ее матричной формы В.Я. Скоробогатько предложил метод, названный им матричным [2]. В частности, решение задачи (5)–(6) в классе функций C^∞ представлено им как решение нелинейного интегрального уравнения

$$\vec{B} = \exp{(At)}\,\vec{\varphi}(x) - \int\limits_0^t \exp A(t-s)\,(\vec{C}_0 + C_1\vec{B} + \vec{B}^{\text{т}}C_2\vec{B})\,ds. \qquad (7)$$

При этом первое слагаемое интегрального уравнения (7) удовлетворяет как линейному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = A\,\vec{B},$$

которое является частным случаем нелинейного уравнения (5), так и начальному условию (6) [2].

Рассмотрим задачу Коши (5)–(6) при нулевых матрицах C_1, C_2 и нулевом векторе $\vec{C}_0$. Докажем теорему, из которой следует представление выражения $\exp{(At)}\,\vec{\varphi}(x)$, являющегося решением задачи, в виде ряда специального вида.

Теорема 1. *Ряд*

$$\begin{aligned}\vec{B}(t,x) &= \sum_{\alpha,\,\|\alpha\|=0}^{\infty} \left\{X_1^{\alpha_1}X_2^{\alpha_2}\cdots X_{s-1}^{\alpha_{s-1}}\right\}\cdot\vec{\gamma}_\alpha,\ x = (x_1,\ldots,x_{s-1}), \qquad (8)\\ X_k &= Ix_k + tA_k, \quad \alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_{s-1}), \quad \|\alpha\| = \sum_{k=1}^{s-1}\alpha_k,\end{aligned}$$

где $\vec{B}$ *—* n*-мерная вектор-функция*, $\vec{\gamma}_\alpha$ *— числовой* n*-мерный вектор-коэффициент*, A_k, $k = \overline{1,(s-1)}$, *— квадратные числовые матрицы размера* $n\times n$, I *— единичная матрица*, *является частным решением* *системы уравнений в частных производных 1-го порядка*

$$I\,\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \sum_{k=1}^{s-1} A_k \frac{\partial \vec{B}}{\partial x_k}. \tag{9}$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, дадим пояснения, относящиеся к построению ряда (8). Суммирование в (8) проводится по мультииндексу α размерности $(s-1)$. Напомним, что мультииндекс представляет собой числовой вектор заданной размерности, компоненты которого принимают значения из множества $\mathbb{N}_0$. Сумма этих значений называется длиной мультииндекса α и обозначается $\|\alpha\|$. Выпишем, например, все двумерные мультииндексы α, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, длина которых равна трем:

$$(3,\ 0),\quad (2,\ 1),\quad (1,\ 2),\quad (0,\ 3).$$

Рассмотрим отдельные сомножители X_k, $X_k = Ix_k + tA_k$, заключенные в фигурные скобки выражения (8). В скалярном случае ($n = 1$, A_k — числовые коэффициенты) верно утверждение: гладкая функция $B(t,x)$ удовлетворяет уравнению в частных производных 1-го порядка вида (9) тогда и только тогда, когда функция $B(t,x)$ является первым интегралом системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\,x_k}{d\,t} = -A_k, \qquad k = \overline{1, s-1}. \tag{10}$$

Выражения

$$X_k = Ix_k + tA_k, \qquad k = \overline{1,(s-1)}, \tag{11}$$

представляют собой $(s-1)$ независимых первых интегралов системы (10) и являются решениями линейного однородного уравнения (9), имеющими форму плоской бегущей волны [4].

Запишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений (10) в симметричной форме, предположив, что (9) является системой ($n \geq 2$), задаваемой матрицами A_k:

$$\frac{I\,dx_1}{A_1} = \frac{I\,dx_2}{A_2} = \cdots = \frac{I\,dx_{s-1}}{A_{s-1}} = -I\,dt. \tag{12}$$

По аналогии со скалярным случаем рассмотрим выражения (11) для линейной однородной системы уравнений в частных производных 1-го порядка (9) ($n \geq 2$) и связанной с ней системы обыкновенных дифференциальных уравнений с матричными коэффициентами (12). Очевидно, что при формальной замене скалярных коэффициентов на матричные использование бегущих волн (11) для изучения решения системы (9) связано с проблемой некоммутативности умножения матриц.

В качестве возможного подхода к данной проблеме В.Я. Скоробогатько в рамках матричного метода ввел операцию симметризации [2]. В записи (8) при формулировке доказываемой теоремы эта операция обозначена фигурными скобками и означает, что следует взять сумму всех возможных существенных произведений, построенных из заключенных в скобки сомножителей. Пусть, например, α является двумерным мультииндексом длины 3 с компонентами $\alpha_1 = 2$ и $\alpha_2 = 1$. Тогда из двух сомножителей X_1^2 и X_2, стоящих в фигурных скобках соответствующего члена ряда (8), можно составить три различных произведения:

$$\left\{X_1^2 X_2\right\} = (X_1)^2 X_2 + X_1 X_2 X_1 + X_2 (X_1)^2.$$

Таким образом, ряд (8) представляет собой разложение искомой вектор-функции $\vec{B}(t,x)$ по соответствующим мультииндексу α, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1})$, степеням $X_k^{\alpha_k}$, $k = \overline{1, s-1}$, выражений вида (11), к результату некоммутативного умножения которых при каждом α применена операция симметризации.

Описательное определение операции симметризации, данное в работе [2], неудобно при проведении преобразований. Построим алгоритм применения этой операции к произведению p сомножителей, которые имеют вид $X_k^{\alpha_k}$. Представим результат симметризации как сумму p слагаемых, в каждое из которых сгруппированы члены, имеющие первым левым сомножителем элемент X_k, $k = \overline{1, p}$. При этом порядок следования остальных сомножителей X_j, $j \neq k$, является произвольным, что соответствует определению операции симметризации. Тогда, вынося X_k, $k = \overline{1, p}$, за скобки, получаем

$$\left\{X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_p^{\alpha_p}\right\} = \sum_{k=1}^{p} X_k \cdot \left\{X_1^{\alpha_1} \cdots X_k^{\alpha_k - 1} \cdots X_p^{\alpha_p}\right\}, \ \alpha_k \geq 1. \quad (13)$$

Применим алгоритм (13) для понижения порядка заключенных в фигурные скобки сомножителей. На некотором шаге под знаком операции симметризации получим произведение m сомножителей первой степени, где $m \leq p$. Следуя алгоритму далее, будем последовательно уменьшать число сомножителей в фигурных скобках до полного их раскрытия:

$$\begin{aligned}\{X_1 X_2 \cdots X_m\} &= \\ &= \sum_{k_1=1}^{m} X_{k_1} \Big\{ \prod_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq k_1}}^{m} X_{k_2} \Big\} = \sum_{k_1=1}^{m} X_{k_1} \sum_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq k_1}}^{m} X_{k_2} \Big\{ \prod_{\substack{k_3=1 \\ k_3 \neq k_2 \neq k_1}}^{m} X_{k_3} \Big\} = \\ &= \cdots = \sum_{k_1=1}^{m} X_{k_1} \sum_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq k_1}}^{m} X_{k_2} \cdots \sum_{\substack{k_{m-1}=1 \\ k_{m-1} \neq k_{m-2} \neq \cdots \neq k_1}}^{m} X_{k_{m-1}} \cdot X_{k_m}. \quad (14)\end{aligned}$$

Построенный алгоритм (13)–(14) может быть рассмотрен как определение оператора (операторной скобки) на элементах счетного множества, для которых введены операции умножения и сложения.

Поставим в соответствие системе линейных уравнений в частных производных 1-го порядка (9) множество V_{s-1}, элементами которого являются матрицы A_k, задающие эту систему, и построенные на их основе бегущие волны X_k:

$$A_k \in V_{s-1}, \quad X_k \in V_{s-1}, \quad X_k = Ix_k + tA_k, \qquad k = \overline{1, s-1}. \tag{15}$$

Введем на элементах множества V_{s-1} действие оператора W по мультииндексу α, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, размерности $(s-1)$:

$$W(X_k) = X_k, \qquad k = \overline{1,p}, \quad p = \overline{1, s-1}; \tag{16}$$

$$W(X_1^{\alpha_1}, X_2^{\alpha_2}, \ldots, X_p^{\alpha_p}) = \sum_{k=1}^{p} X_k W(X_1^{\alpha_1}, \ldots, X_k^{\alpha_k - 1}, \ldots, X_p^{\alpha_p}); \tag{17}$$

$$W(X_1, X_2, \ldots, X_p) = \sum_{k=1}^{p} X_k W(X_1, \ldots, X_{k-1}, X_{k+1}, \ldots, X_p). \tag{18}$$

Сотношения (16)–(18) определяют некоторый закон взаимодействия бегущих волн. Назовем введенный оператор W оператором (операторной скобкой) волнового взаимодействия или волновой W-скобкой по мультииндексу α размерности p. Длину мультииндекса α назовем порядком волнового взаимодействия (или порядком W-скобки). Соотношение (17) позволяет понижать порядок оператора, соотношение (18) связывает операторы разной размерности. При этом для множеств V_p, $p = \overline{1, s-1}$, на которых рассматривается волновая W-скобка по мультииндексу α размерности p, имеет место соотношение

$$V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_p \subset \cdots \subset V_{s-1}. \tag{19}$$

Таким образом, в теореме утверждается, что решение линейной системы уравнений в частных производных 1-го порядка (9) представляет собой разложение в ряд по функциям, являющимся результатом взаимодействия волн. Члены ряда сгруппированы по порядку волнового взаимодействия.

Для аргументов скобки волнового взаимодейстия W имеют место следующие перестановочные свойства:

$$\begin{aligned} A_k(X_k)^{\alpha_k} &= (X_k)^{\alpha_k} A_k; && (20)\\ A_k X_i + A_i X_k &= X_i A_k + X_k A_i, \qquad k \neq i, \quad k, i = \overline{1, s-1}. && (21) \end{aligned}$$

Свойство (20) является очевидным, поскольку матрица A_k — перестановочная с $(A_k)^p$, единичной матрицей I и скалярными сомножителями t, x_k. Для проверки свойства (21) нужно раскрыть скобки в выражениях X_k и вынести матрицы A_k и A_i правым сомножителем. Свойство (21) означает, что некоммутативные матрицы, задающие систему уравнений (9), коммутируют по сумме с бегущими волнами, построенными на основе этих матриц.

Отметим, что

$$\frac{\partial X_k}{\partial t} = A_k, \qquad \frac{\partial X_k}{\partial x_k} = \frac{\partial X_k}{\partial X_k} = I,$$

и рассмотрим операцию дифференцирования оператора волнового взаимодействия W. Из (18) непосредственно следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t} W(X_1, \ldots, X_k, \ldots, X_p) = \\ = \sum_{k=1}^{p} W(X_1, \ldots, X_{k-1}, A_k, X_{k+1}, \ldots, X_p) = \\ = p \sum_{k=1}^{p} A_k W(X_1, \ldots, X_{k-1}, X_{k+1}, \ldots, X_p), \quad p = \overline{1, s-1}. \quad (22)$$

В результате дифференцирования по t каждая из волн X_k, являющихся аргументом W-скобки, последовательно заменена матрицей, ее образующей. Для вынесения матрицы A_k за знак W использовано свойство коммутативности по сумме (21).

Рассмотрим дифференцирование оператора волнового взаимодействия W по его аргументу. Выполнение этой операции связано с понижением порядка W:

$$\frac{\partial}{\partial X_k} W(X_1^{\alpha_1}, \ldots, X_k^{\alpha_k}, \ldots, X_p^{\alpha_p}) = \\ = \|\alpha\| W(X_1^{\alpha_1}, \ldots, X_k^{\alpha_k - 1}, \ldots, X_p^{\alpha_p}), \qquad p = \overline{1, s-1}. \quad (23)$$

Доказательство правила дифференцирования (23) приведено в ходе доказательства теоремы.

Полученные правила дифференцирования оператора волнового взаимодействия W и перестановочные свойства его аргументов (20)–(21) используются в ходе доказательства теоремы.

Доказательство теоремы. Введем обозначение $\vec{P}_\alpha$ для общего члена ряда (8):

$$\vec{P}_\alpha \equiv W(X_1^{\alpha_1}, \ldots, X_{s-1}^{\alpha_{s-1}}) \cdot \vec{\gamma}_\alpha, \qquad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}). \quad (24)$$

Волновая W-скобка в (24) рассматривается на связанном с системой (9) множестве V_{s-1} (см. (15)), обладающем свойством (19).

Очевидно, что при $\|\alpha\| = 0$ вектор $\vec{P}_\alpha$ представляет собой числовой вектор $\vec{P}_0$, $\vec{P}_0 = I \cdot \vec{\gamma}_0$, и является свободным членом ряда (8). При этом вектор $\vec{P}_0$ является элементарным решением системы (9), содержащей произвольное число $(s-1)$ пространственных переменных x_k.

Пусть $(s-1)$=1. Тогда система (9) содержит одно пространственное переменное x_1 и, соответственно, одну матрицу A_1:

$$I\,\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = A_1 \frac{\partial \vec{B}}{\partial x_1}. \tag{25}$$

В этом случае отсутствует проблема некоммутативности умножения матриц. Действие W-скобки по одномерному мультииндексу α, $\alpha = \alpha_1$, на элементах множества V_1 является, согласно определению, действием единичного оператора. При этом ряд (8) принимает вид

$$\vec{B}(t,x) = \sum_{\alpha_1 \geq 0}^{\infty} \vec{P}_{\alpha_1} = \sum_{\alpha_1 \geq 0}^{\infty} W(X_1^{\alpha_1}) \cdot \vec{\gamma}_{\alpha_1} = \sum_{\alpha_1 \geq 0}^{\infty} (Ix_1 + tA_1)^{\alpha_1} \cdot \vec{\gamma}_{\alpha_1}. \tag{26}$$

Непосредственная подстановка вектор-функции $\vec{P}_{\alpha_1}$ в систему (25) показывает, что каждый отдельный член ряда (26) является решением этой системы. В силу линейности системы и аналитичности рассматриваемых функций ряд (26) и любая его частичная сумма также являются решением системы (25).

Рассмотрим случай $(s-1) = 2$. Тогда система (9) принимает вид

$$I\,\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = A_1 \frac{\partial \vec{B}}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial \vec{B}}{\partial x_2}. \tag{27}$$

Для построении решения системы (27) в качестве аргументов W-скобки по двумерному мультииндексу используются элементы множества V_2, $V_2 \supset V_1$.

Выделим сначала те члены ряда (8), которые содержат только одно пространственное переменное:

$$\vec{P}_{(\alpha_1,\,0)} = W(X_1^{\alpha_1}) \cdot \vec{\gamma}_{(\alpha_1,\,0)}, \qquad \vec{P}_{(0,\alpha_2)} = W(X_2^{\alpha_2}) \cdot \vec{\gamma}_{(0,\alpha_2)}, \qquad \alpha_1,\, \alpha_2 > 0.$$

Проверка того, что векторы $\vec{P}_{(\alpha_1,\,0)}$ и $\vec{P}_{(0,\alpha_2)}$, зависящие от одного пространственного переменного, являются решением (27), совпадает с соответствующей проверкой при $(s-1) = 1$ для элементов множества V_1.

Рассмотрим теперь те члены ряда (8), которые содержат оба пространственных переменных. Тогда (24) принимает вид

$$\vec{P}_\alpha \equiv \vec{P}_{(\alpha_1,\alpha_2)} = W(X_1^{\alpha_1}, X_2^{\alpha_2}) \cdot \vec{\gamma}_{(\alpha_1,\alpha_2)}, \qquad \alpha_i \neq 0,\ i = 1, 2, \tag{28}$$

где действие оператора W-скобка по двумерному мультииндексу не является тривиальным.

Методом математической индукции докажем, что вектор $\vec{P}_\alpha$ с любыми ненулевыми значениями компонент двумерного мультииндекса α является решением системы (27). В качестве параметра индукции выберем порядок волнового взаимодействия $\|\alpha\|$, соответствующего вектору $\vec{P}_{(\alpha_1,\alpha_2)}$. Выполним первый шаг математической индукции для $\|\alpha\| = 2$, т.е. для случая, когда в (28) порядок оператора W равен его размерности:

$$\|\alpha\| = 2, \qquad \vec{P}_{(1,1)} = W(X_1, X_2) \cdot \vec{\gamma}_{(1,1)}.$$

Вычислив производные вектор-функции $\vec{P}_{(1,1)}$ по правилам (22) и (23):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{P}_{(1,1)}}{\partial t} &= 2A_1X_2\vec{\gamma}_{(1,1)} + 2A_2X_1\vec{\gamma}_{(1,1)}, \\ \frac{\partial \vec{P}_{(1,1)}}{\partial x_1} &= 2X_2\vec{\gamma}_{(1,1)}, \qquad \frac{\partial \vec{P}_{(1,1)}}{\partial x_2} = 2X_1\vec{\gamma}_{(1,1)}, \end{aligned}$$

убеждаемся, что $\vec{P}_{(1,1)}$ является решением системы (27).

Пусть утверждение математической индукции верно, когда параметр индукции $\|\alpha\|$ равен m, где $m > 2$. Это означает, что вектор-функция, имеющая вид (28), где $\alpha_1 + \alpha_2 = m$, также является решением системы (27). Шаг индукции от m к $(m+1)$ соответствует переходу к оператору волнового взаимодействия большего порядка и осуществляется увеличением на единицу степени α_k, $k = \overline{1,2}$, одного из двух его аргументов. Пусть это аргумент X_1:

$$\begin{gathered} \vec{P}_{(\alpha_1+1,\alpha_2)} = W(X_1^{\alpha_1+1}, X_2^{\alpha_2}) \cdot \vec{\gamma}_{(\alpha_1+1,\alpha_2)}, \\ \|\alpha\| = (\alpha_1+1) + \alpha_2 = m+1. \end{gathered} \tag{29}$$

Покажем, что из утверждения “вектор-функция $\vec{P}_{(\alpha_1,\alpha_2)}$ является решением системы (27)” следует утверждение “вектор-функция $\vec{P}_{(\alpha_1+1,\alpha_2)}$ является решением системы (27)”.

В соответствии с введенным определением рассмотрим результат действия W-скобки порядка $(m+1)$ по двумерному мультииндексу как сумму двух слагаемых, содержащих W-скобки порядка m по мультииндексу такой же размерности:

$$\begin{aligned} \vec{P}_{(\alpha_1+1,\alpha_2)} = X_1W(X_1^{\alpha_1}, X_2^{\alpha_2}) \cdot \vec{\gamma}_{(\alpha_1+1,\alpha_2)} + \\ + X_2W(X_1^{\alpha_1+1}, X_2^{\alpha_2-1}) \cdot \vec{\gamma}_{(\alpha_1+1,\alpha_2)}. \end{aligned} \tag{30}$$

Введем обозначение

$$\vec{U}_m \equiv W(X_1^{\alpha_1}, X_2^{\alpha_2}) \cdot \vec{\gamma}_{(\alpha_1+1,\alpha_2)}, \quad \vec{V}_m \equiv W(X_1^{\alpha_1+1}, X_2^{\alpha_2-1}) \cdot \vec{\gamma}_{(\alpha_1+1,\alpha_2)}. \tag{31}$$

Следовательно, вектор (29) имеет вид

$$\vec{P}_{(\alpha_1+1,\alpha_2)} = X_1\vec{U}_m + X_2\vec{V}_m, \tag{32}$$

где для вектор-функций $\vec{U}_m$ и $\vec{V}_m$ утверждение математической индукции выполнено. Вычислим для построенной вектор-функции $\vec{P}_{(\alpha_1+1,\alpha_2)}$ составляющие системы (27):

$$\begin{aligned}
A_1\,\frac{\partial \vec{P}_{(\alpha_1+1,\alpha_2)}}{\partial x_1} &= A_1\vec{U}_m + A_1X_1\frac{\partial \vec{U}_m}{\partial x_1} + A_1X_2\frac{\partial \vec{V}_m}{\partial x_1};\\
A_2\,\frac{\partial \vec{P}_{(\alpha_1+1,\alpha_2)}}{\partial x_2} &= A_2X_1\frac{\partial \vec{U}_m}{\partial x_2} + A_2\vec{V}_m + A_2X_2\frac{\partial \vec{V}_m}{\partial x_2};\\
\frac{\partial \vec{P}_{(\alpha_1+1,\alpha_2)}}{\partial t} &= A_1\vec{U}_m + X_1\frac{\partial \vec{U}_m}{\partial t} + A_2\vec{V}_m + X_2\frac{\partial \vec{V}_m}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Воспользуемся в полученных выражениях свойством (20) для перестановки матрицы A_i и одноименной волны X_i и свойством коммутативности по сумме (21) для того, чтобы выразить произведения A_iX_j через X_jA_i ($i \neq j,\ i,j = \overline{1,2}$). Подставим полученный результат в систему (27):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \vec{P}_{(\alpha_1+1,\alpha_2)}}{\partial t} - A_1\,\frac{\partial \vec{P}_{(\alpha_1+1,\alpha_2)}}{\partial x_1} - A_2\,\frac{\partial \vec{P}_{(\alpha_1+1,\alpha_2)}}{\partial x_2} =\\
&= X_1\left[\frac{\partial \vec{U}_m}{\partial t} - A_1\,\frac{\partial \vec{U}_m}{\partial x_1} - A_2\,\frac{\partial \vec{U}_m}{\partial x_2}\right] +\\
&+ X_2\left[\frac{\partial \vec{V}_m}{\partial t} - A_1\,\frac{\partial \vec{V}_m}{\partial x_1} - A_2\,\frac{\partial \vec{V}_m}{\partial x_2}\right] +\\
&+ t\,(A_1A_2 - A_2A_1)\left[\frac{\partial \vec{V}_m}{\partial x_1} - \frac{\partial \vec{U}_m}{\partial x_2}\right].
\end{aligned} \tag{33}$$

Применив правило дифференцирования (23) к вектор-функциям $\vec{U}_m$ и $\vec{V}_m$, заданным выражениями (31), получим

$$\frac{\partial \vec{V}_m}{\partial x_1} = \frac{\partial \vec{U}_m}{\partial x_2} = (\alpha_1+\alpha_2)W(X_1^{\alpha_1}, X_2^{\alpha_2-1}). \tag{34}$$

Тогда из выражения (33) следует утверждение: если вектор-функции $\vec{U}_m$ и $\vec{V}_m$ являются решением системы (27), то вектор-функция $\vec{P}_{(\alpha_1+1,\alpha_2)}$ также является решением системы (27). Утверждение математической индукции для случая $(s-1) = 2$ доказано.

По построению рассмотренные вектор-функции $\vec{P}_{(0,0)}$, $\vec{P}_{(\alpha_1,0)}$, $\vec{P}_{(0,\alpha_2)}$ и $\vec{P}_{(\alpha_1,\alpha_2)}$ исчерпывают все возможные члены ряда (8) при $(s-1) = 2$. Таким образом, для случая $(s-1) = 2$ доказано, что каждый член ряда (8), представляющий собой результат взаимодействия волн, является решением системы (27). В силу линейности системы и аналитичности рассматриваемых функций ряд

$$\vec{B} = \sum_{\|\alpha\| \geq 0}^{\infty} \vec{P}_{(\alpha_1, \alpha_2)} = \sum_{\|\alpha\| \geq 0}^{\infty} W(X_1^{\alpha_1}, X_2^{\alpha_2}) \cdot \vec{\gamma}_{\alpha} \tag{35}$$

и любая его частичная сумма также являются решением системы (27). Утверждение теоремы для $(s-1) = 2$ доказано.

Доказательство утверждения теоремы для системы (9), содержащей произвольное фиксированное число $(s-1)$, $(s-1) \geq 3$, пространственных переменных, проводится аналогично. Убедимся, что каждый член ряда (8), имеющий вид (24), является решением системы (9). Пусть в (24) мультииндекс α размерности $(s-1)$ таков, что содержит p ненулевых компонент. Перенумеруем ненулевые компоненты мультииндекса в порядке их следования при произвольном положении $(s-1-p)$ нулевых компонент:

$$\alpha = (0, \ldots, \alpha_1, 0, \ldots, 0, \alpha_2, 0, \ldots, 0, \alpha_p, 0, \ldots, 0), \qquad p \leq (s-1).$$

Тогда вектор (24) принимает вид

$$\vec{P}_{\alpha} = W(X_1^{\alpha_1}, \ldots, X_p^{\alpha_p}) \cdot \vec{\gamma}_{\alpha}, \qquad p = \overline{1, s-1}. \tag{36}$$

Пусть $p < (s-1)$, т.е. число ненулевых компонент мультииндекса меньше размерности соответствующего этому мультииндексу оператора волнового взаимодействия W. Тогда проверка того, что вектор (36) является решением системы (9), повторяет рассуждение, проведенное для вектора, построенного при помощи W-скобки по мультииндексу меньшей размерности.

Рассмотрим, например, для системы (9), содержащей три пространственные переменные, член ряда (8), соответствующий мультииндексу $(\alpha_1, \alpha_2, 0)$. Это означает, что $p = 2$, а волна $(Ix_3 + tA_3)$ не входит в число аргументов W-скобки по трехмерному мультииндексу. Тогда производные вектора (36) по x_3 обращаются в нуль и случай сводится к рассмотренным ранее случаям действия W-скобки на элементах множеств V_2 и V_1 и соответствующих им систем (25) и (27).

Пусть $p = (s-1)$, т.е. при построении вектора (36) используются волны X_k, содержащие все пространственные переменные системы (9). Доказательство, как и в случае $(s-1) = 2$, проведем методом математической индукции с параметром индукции, равным порядку волнового взаимодействия. Первый шаг индукции выполним при $\|\alpha\| = p$ (все компоненты мультииндекса α равны единице), применив к вектор-функции (36) правила дифференцирования (22) и (23). Пусть $\vec{P}_{\alpha}$ является решением системы (9) при $\|\alpha\| = m$, $m > p$. Пусть далее (как и в (29)) шаг индукции от m к $(m+1)$ осуществляется увеличением на единицу значения α_1. Мультииндекс с измененной первой компонентой обозначим через α':

$$\alpha'_1 = \alpha_1 + 1, \qquad \alpha'_k = \alpha_k, \quad k = \overline{2,p}.$$

Рекуррентное соотношение, аналогичное соотношению (32), получим в соответствии с (17), последовательно группируя в одно слагаемое все члены ряда, имеющие первым левым сомножителем волну X_k по каждому x_k, $k = \overline{1,p}$:

$$\begin{aligned} \vec{P}_{\alpha'} &= \sum_{k=1}^{p} X_k \vec{U}^k, \quad \vec{U}^1 = W(X_1^{\alpha_1}, \ldots, X_p^{\alpha_p})\vec{\gamma}_{\alpha'}, \\ \vec{U}^k &= W(X_1^{\alpha_1+1}, \ldots, X_k^{\alpha_k-1} \ldots X_p^{\alpha_p})\vec{\gamma}_{\alpha'}, \quad k = \overline{2,p}. \end{aligned} \tag{37}$$

При этом для функций $\vec{U}^k$, $k = \overline{1,p}$, связанных по построению с мультииндексом длины m, утверждение индукции выполнено.

Рассмотрим систему (9) при $\vec{B} = \vec{P}_{\alpha'}$. Воспользовавшись после вычисления $A_k \cdot \partial\vec{P}_{\alpha'}/\partial x_k$, $k = \overline{1,p}$, свойствами (20) и (21), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{P}_{\alpha'}}{\partial t} - \sum_{k=1}^{s-1} A_k \frac{\partial \vec{P}_{\alpha'}}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{p} X_k \left[\frac{\partial \vec{U}^k}{\partial t} - \sum_{k=1}^{p} A_k \frac{\partial \vec{U}^k}{\partial x_k} \right] + \\ + t \sum_{k,j=1}^{p} (A_k A_j - A_j A_k) \left[\frac{\partial \vec{U}^j}{\partial x_k} - \frac{\partial \vec{U}^k}{\partial x_j} \right], \quad p \leq (s-1). \end{aligned} \tag{38}$$

Применив правило дифференцирования (23) к функциям $\vec{U}^k$, заданным формулой (37), получим

$$\frac{\partial \vec{U}^j}{\partial x_k} = \frac{\partial \vec{U}^k}{\partial x_j}, \qquad k, j = \overline{1,p}, \quad k \neq j.$$

Из (38) следует утверждение: если функции $\vec{U}^k$ являются решением системы (9), то и функция $\vec{P}_{\alpha'}$ является решением системы (9). Утверждение индукции доказано для произвольного $(s-1)$, $s > 3$.

Таким образом, для произвольного s, $s > 3$, рассмотрены все возможные мультииндексы α, по которым выполняется суммирование в ряде (8), и соответствующие им члены ряда, каждый из которых является решением системы (27). В силу линейности системы и аналитичности рассматриваемых функций ряд (8) и любая его частичная сумма, которая представляет собой нелинейную комбинацию бегущих волн, также являются решением системы (27). ■

Замечание. Выведем для двумерного мультииндекса правило дифференцирования W-скобки волнового взаимодействия (23), которое было использовано в ходе доказательства теоремы. Применим метод математической индукции с параметром индукции, равным порядку волнового взаимодействия. Для случая $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ утверждение индукции принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial X_1} W(X_1,\, X_2) = 2X_2.$$

Выполним шаг индукции от $(\alpha_1 + \alpha_2)$ к $(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)$, воспользовавшись свойством (17) для вынесения (внесения) аргументов за (под) знак W-скобки:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial X_1} W(X_1^{\alpha_1+1}, X_2^{\alpha_2}) = \\
&\qquad = \frac{\partial}{\partial X_1} \left[X_1 W(X_1^{\alpha_1}, X_2^{\alpha_2}) + X_2 W(X_1^{\alpha_1+1}, X_2^{\alpha_2-1})\right] = \\
&= W(X_1^{\alpha_1}, X_2^{\alpha_2}) + X_1 \frac{\partial}{\partial X_1} W(X_1^{\alpha_1}, X_2^{\alpha_2}) + X_2 \frac{\partial}{\partial X_1} W(X_1^{\alpha_1+1}, X_2^{\alpha_2-1}) = \\
&= W(X_1^{\alpha_1}, X_2^{\alpha_2}) + (\alpha_1 + \alpha_2)\left[X_1 W(X_1^{\alpha_1-1}, X_2^{\alpha_2}) + X_2 W(X_1^{\alpha_1}, X_2^{\alpha_2-1})\right] = \\
&= W(X_1^{\alpha_1}, X_2^{\alpha_2}) + (\alpha_1 + \alpha_2) W(X_1^{\alpha_1}, X_2^{\alpha_2}) = (\alpha_1 + \alpha_2 + 1) W(X_1^{\alpha_1}, X_2^{\alpha_2}).
\end{aligned}$$

Полученное соотношение доказывает правило дифференцирования (23) для двумерного мультииндекса α.

Следствие 1. Поскольку общий член ряда (8) представляет собой результат действия W-скобки, заданной произвольным мультииндексом α произвольной фиксированной размерности $(s-1)$, и удовлетворяет матричному уравнению (9), это уравнение можно рассматривать как правило дифференцирования по t оператора W-скобка, который задан мультииндексом α размерности $(s-1)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} W(X_1^{\alpha_1}, \ldots, X_k^{\alpha_k}, \ldots, X_{s-1}^{\alpha_{s-1}}) = \\
&\quad = \|\alpha\| \sum_{k=1}^{s-1} A_k W(X_1^{\alpha_1}, \ldots, X_k^{\alpha_k - 1}, \ldots, X_{s-1}^{\alpha_{s-1}}), \quad \|\alpha\| = \sum_{k=1}^{s-1} \alpha_k. \qquad (39)
\end{aligned}$$

Правая часть формулы (39) получена в результате применения в правой части уравнения (9) формулы (23), которая задает правило дифференцирования W-скобки по пространственному переменному. Использованная при доказательстве теоремы формула (22) является частным случаем (39) для $\alpha_k = 1$, $k = \overline{1, s-1}$.

Следствие 2. Пусть $1 \le p < q \le (s-1)$. Рассмотрим системы дифференциальных уравнений в частных производных 1-го порядка

$$I\,\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} = \sum_{k=1}^{p} A_k \frac{\partial \vec{F}}{\partial x_k} \qquad (40)$$

и

$$I\,\frac{\partial \vec{G}}{\partial t} = \sum_{k=1}^{q} A_k \frac{\partial \vec{G}}{\partial x_k}. \tag{41}$$

Тогда каждый член ряда (8), построенного для системы (40), и любая частичная сумма этого ряда представляют собой и соответствующие элементы ряда (8), построенного для системы (41), являясь при этом решениями обеих систем.

Следствие 3. Из доказанной теоремы непосредственно следует, что ряд (8) с коэффициентами $\vec{\gamma}_\alpha$ есть решение поставленной задачи Коши, если

$$\vec{\gamma}_\alpha = \frac{1}{\|\alpha\|!}\,\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{s-1}}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_{s-1}^{s-1}}\,\vec{\varphi}(x)\bigg|_{x=x^0}. \tag{42}$$

Следовательно, ряд (8) с коэффициентами (42) является сходящимся в некоторой достаточно малой области G, содержащей точку x^0, и представляет собой иную форму записи ряда, фигурирующего в теореме Коши–Ковалевской.

Общий случай. Пусть система дифференциальных уравнений в частных производных 1-го порядка (1) с произвольными коэффициентами получена в результате рассмотрения некоторой линейной или нелинейной модели математической физики. К таким моделям можно отнести, например, систему уравнений Максвелла, системы уравнений газовой динамики и гидродинамики.

Некоторыми исследователями ряды различной структуры предлагаются в качестве асимптотического метода аналитического исследования не только линейных, но и нелинейных задач. В качестве примера приведем серию работ А.Ф. Сидорова (Институт математики и механики УО РАН) [14, 15]. Вместе с тем общие методы построения рядов сразу для широкого класса нелинейных уравнений и связанных с ними краевых задач отсутствуют.

Укажем на две взаимосвязанные проблемы, относящиеся к представлению решения нелинейного уравнения в виде ряда. Это, во-первых, определение принципа выделения из бесконечной системы уравнений конечной подсистемы, которая в достаточной степени описывает нелинейные эффекты, и, во-вторых, отыскание способа разрешения нелинейности, содержащейся в полученной конечной системе. Для нахождения искомых коэффициентов разложения, которые могут быть числовыми или функциональными в зависимости от используемой структуры ряда, получают соответственно систему нелинейных алгебраических или обыкновенных дифференциальных уравнений. Чтобы получить часть уравнений рекуррентной цепочки линейными либо иметь возможность разрешить нелинейность в отдельных ее уравнениях, обычно накладывают ограничения на первые коэффициенты разложения решения и (или) краевых условий.

Представление в виде ряда с числовыми коэффициентами решения нелинейной системы (1) и являющейся ее частным случаем линейной системы (2) приводит к системам алгебраических уравнений соответственно 2-го и 1-го порядка. Поскольку система (2) получена из (1) при условии равенства нулю всех элементов кубической матрицы C_2, то отличие системы уравнений 2-го порядка от системы 1-го порядка определяется отличием матрицы C_2 от нулевой. Отметим при этом, что заполненность кубической матрицы ненулевыми элементами характеризуется наличием в исходных нелинейных уравнениях модели произведений неизвестных функций и их производных, а также порядком этих произведений.

В работе [6] предложена структура ряда с неопределенными числовыми коэффициентами, задающего решение системы уравнений (1):

$$\vec{B}(x) = \sum_{\alpha,\, \|\alpha\|=0}^{\infty} \vec{\gamma}_\alpha \cdot x^\alpha, \;\; x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_s^{\alpha_s}, \;\; \vec{\gamma_\alpha}^{\,\text{т}} = \left(\gamma_\alpha^1, \, \ldots, \, \gamma_\alpha^n\right). \quad (43)$$

Суммирование в ряде (43), записанном относительно произведения s независимых переменных системы, проводится по мультииндексу α размерности s (ср. с рядом (8)). Коэффициент $\vec{\gamma}_\alpha$ представляет собой неопределенный числовой вектор, верхний индекс при компонентах которого указывает на соответствующую компоненту вектора $\vec{B}$:

$$\vec{B}(x)^{\text{т}} = (B_1(x), \ldots, B_n(x)) = \left(\sum_{\alpha,\, \|\alpha\|=0}^{\infty} \gamma_\alpha^1 \cdot x^\alpha, \, \ldots, \, \sum_{\alpha,\, \|\alpha\|=0}^{\infty} \gamma_\alpha^n \cdot x^\alpha \right).$$

Подставим (43) в систему (1). Приравняв векторные коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях, получим бесконечную систему алгебраических уравнений 2-го порядка. Укажем на связь мультииндексов коэффициентов разложения (43), входящих в левые и правые части алгебраических уравнений.

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{k=1}^{s} A_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{\|\alpha\|=1} \vec{\gamma}_\alpha \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_s^{\alpha_s} \right) = \vec{C}_0 + C_1 \vec{\gamma}_0 + \vec{\gamma}_0^{\text{т}} C_2 \vec{\gamma}_0, \quad (44)$$

получающееся в результате сравнения коэффициентов при x^α для $\|\alpha\| = 0$. Левая часть уравнения (44) представляет собой полином 1-й степени относительно $\vec{\gamma}_\alpha$, где $\|\alpha\| = 1$, правая часть этого уравнения — полином 2-й степени относительно $\vec{\gamma}_0$. Запишем уравнение (44) в виде соотношения

$$ {}^1R(\vec{\gamma}_\alpha,\, \alpha : \|\alpha\| = 1) = {}^2R(\vec{\gamma}_\alpha,\, \alpha : \|\alpha\| = 0), \tag{45} $$

где полиномы 1-й и 2-й степени обозначены соответственно символами ${}^1R$ и ${}^2R$. В круглых скобках указана длина мультииндекса векторных коэффициентов $\vec{\gamma}_\alpha$, относительно которых эти полиномы записаны.

Используя введенные обозначения, выпишем соотношения, выражающие связь между длинами мультииндексов искомых $\vec{\gamma}_\alpha$ в линейной левой части уравнений алгебраической системы и нелинейной правой:

$$ {}^1R(\vec{\gamma}_\alpha,\, \alpha : \|\alpha\| = 2) = {}^2R(\vec{\gamma}_\alpha,\, \alpha : \|\alpha\| = \overline{0,1}); \tag{46} $$

$$ {}^1R(\vec{\gamma}_\alpha,\, \alpha : \|\alpha\| = 3) = {}^2R(\vec{\gamma}_\alpha,\, \alpha : \|\alpha\| = \overline{0,2}); $$

$$ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots $$

$$ {}^1R(\vec{\gamma}_\alpha,\, \alpha : \|\alpha\| = N-1) = {}^2R(\vec{\gamma}_\alpha,\, \alpha : \|\alpha\| = \overline{0,N-2}); \tag{47} $$

$$ {}^1R(\vec{\gamma}_\alpha,\, \alpha : \|\alpha\| = N) = {}^2R(\vec{\gamma}_\alpha,\, \alpha : \|\alpha\| = \overline{0,N-1}); \tag{48} $$

$$ {}^1R(\vec{\gamma}_\alpha,\, \alpha : \|\alpha\| = N+1) = {}^2R(\vec{\gamma}_\alpha,\, \alpha : \|\alpha\| = \overline{0,N}); \tag{49} $$

$$ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{50} $$

В линейной части каждого уравнения системы все коэффициенты отвечают мультииндексам одной длины l, где $l \geq 1$. В нелинейной правой части содержится коэффициент с мультииндексом длины $(l-1)$ и произведения коэффициентов, сумма индексов которых не превышает $(l-1)$.

Отметим, что если в виде ряда (43) представить решение системы (2), то алгебраическая система для определения коэффициентов разложения имеет вид

$$ {}^1R(\vec{\gamma}_\alpha,\, \alpha : \|\alpha\| = l+1) = {}^1R(\vec{\gamma}_\alpha,\, \alpha : \|\alpha\| = l), \quad l = 0, 1, \ldots, \infty. \tag{51} $$

Таким образом, если для линейного случая первый коэффициент разложения $\vec{\gamma}_\alpha$, $\|\alpha\| = 0$, содержится в качестве неизвестного только в первом уравнении бесконечной линейной алгебраической системы (51), то в нелинейном случае — во всех уравнениях бесконечной алгебраической системы 2-го порядка (45)–(50).

В результате представления решения системы дифференциальных уравнений в частных производных 1-го порядка с квадратичной нелинейностью (1) в виде ряда (43) с неопределенными числовыми коэффициентами получена бесконечная алгебраическая система 2-го порядка (45)–(50) для нахождения векторных коэффициентов $\vec{\gamma}_\alpha$. В отличие от линейного случая при увеличении числа рассматриваемых уравнений от N до $(N+1)$ появляются не только коэффициенты $\vec{\gamma}_\alpha$,

$\|\alpha\| = N+1$, но и меняются значения коэффициентов $\vec{\gamma}_\alpha$, $\|\alpha\| = \overline{0, N}$. Это означает, что последовательное рекуррентно точное [14] нахождение коэффициентов ряда становится невозможным, поскольку уравнения для их определения являются взаимозависимыми.

Допустим, что, начиная с мультииндекса α определенной длины, все векторы $\vec{\gamma}_\alpha$ нулевые. Тогда верно следующее утверждение.

Утверждение 1. *Пусть для коэффициентов ряда* (43)*, задающего решение системы дифференциальных уравнений в частных производных 1-го порядка с квадратичной нелинейностью* (1)*, выполнено условие*

$$\vec{\gamma}_\alpha = 0, \qquad \forall\alpha \quad \|\alpha\| \geq N. \tag{52}$$

Тогда в системе алгебраических уравнений 2-го порядка относительно коэффициентов этого ряда, получаемой при подстановке (43) *в* (1)*, число уравнений равно числу неизвестных.*

Действительно, для каждого искомого коэффициента $\vec{\gamma}_\alpha$ с фиксированным мультииндексом α, $0 \leq \|\alpha\| \leq N-1$, существует уравнение, которое содержит этот коэффициент в правой части в следующей форме: во-первых, линейно — как результат умножения на матрицу C_1; во-вторых, в виде произведений $\vec{\gamma}_0^{\,\mathrm{т}} \cdot \vec{\gamma}_\alpha$ и $\vec{\gamma}_\alpha^{\,\mathrm{т}} \cdot \vec{\gamma}_0$ — как результат построения квадратичной формы $\vec{B}^{\mathrm{т}} C_2 \vec{B}$. Все другие искомые коэффициенты в правой части этого уравнения отвечают мультииндексам меньшей длины, а все искомые коэффициенты в левой части — мультииндексам большей длины. В предположении $\vec{\gamma}_\alpha = 0$ при $\|\alpha\| \geq N$ в уравнениях вида (49) и левая, и правая часть обращаются в нуль. В уравнениях вида (48) правая часть обладает описанным свойством относительно $\vec{\gamma}_\alpha$, $\|\alpha\| = N-1$. При этом, поскольку левая часть таких уравнений обращается в нуль, число искомых коэффициентов не увеличивается. Следовательно, в системе уравнений (45)–(48), выделенной из бесконечной системы (45)–(50) при помощи условия (52), число уравнений равно числу неизвестных $\vec{\gamma}_\alpha$, $\|\alpha\| = N-1$.

Допустим, что при ограничении (52) на коэффициенты разложения ряда (43) алгебраическая система 2-го порядка решена тем или иным методом. Тогда известны коэфффициенты разложения $\vec{\gamma}_\alpha$, $\|\alpha\| < N$. Построенная частичная сумма ряда (43) может быть рассмотрена как представление частного решения системы (1).

В качестве одного из способов разрешения нелинейности в системе уравнений (1) и связанной с ней алгебраической системе 2-го порядка (45)–(48) предлагаем использовать постановку нелинейных краевых условий. Такой подход реализован в работах авторов [8–11] на модели уравнений пограничного слоя [12, 13]. Для полученной системы уравнений в частных производных 1-го порядка с квадратичной нелинейностью поставлены краевые задачи, содержащие условие на границе обтекаемого тела в квадратичной форме. Коэффициенты разложения решения задачи в ряд (43) найдены при совместном решении полученных с использованием условия (52) алгебраических систем 2-го порядка, отвечающих уравнениям пограничного слоя и краевым условиям.

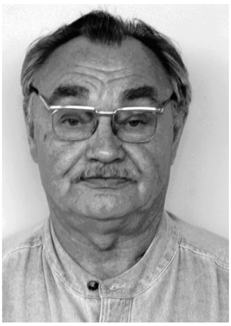
Таким образом, для нелинейной системы (1) и ее частного случая — линейной системы (9) построены ряды (8) и (43) с числовыми векторными коэффициентами. Ряды предложенной структуры можно использовать для аналитического исследования моделей математической физики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федоров Ф. И. Уравнения первого порядка для гравитационного поля // ДАН СССР. – 1968. – Т. 179, № 4. – С. 802–805.
2. Скоробогатько В. Я. Решение системы дифференциальных уравнений матричным методом // ДАН УССР. – 1988. Т. 3. – С. 28–31.
3. Мякинник О. О. Нахождение элементарных решений системы уравнений типа Ф.И. Федорова // Докл. Акад. наук Украины. – 1994. Т. 11. – С. 45–50.
4. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 829 с.
5. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Физматлит, 1961. – 400 с.
6. Skorobogat'ko V., Myakinnik O. On a Power Series Representation of the General Solution of Fedorov's Set of Equations // Gravitation and Cosmology. – 1995. – Vol. 1. – No. 4. – P. 315–318.
7. Скоробогатько В. Я., Мякинник О. О. О решении задачи Коши для системы уравнений Ф.И. Федорова // Тез. докл. конф. Современные методы нелинейного анализа. 25–29 апреля 1995, Воронеж.
8. Феоктистов В. В., Мякинник О. О. Решение краевой задачи для нелинейной системы, сводящейся к системе с квадратичной нелинейностью // Вестник МГТУ. Сер. "Естественные науки". – 2000. – № 2 (5). – С. 3–9.
9. Феоктистов В. В., Мякинник О. О. Реализация квадратичной нелинейности в уравнениях с частными производными // Материалы конф. Современные методы теории функций и смежные проблемы. 26 января – 2 февраля 2003. – Воронеж, 2003. – С. 267–268.
10. Феоктистов В. В., Мякинник О. О. О решении задач пограничного слоя, преобразованных к системе уравнений в частных производных первого порядка с квадратичной нелинейностью // Вестник МГТУ. Сер. "Естественные науки". – 2004. – № 1 (12). – С. 54–71.
11. Феоктистов В. В., Мякинник О. О. Специальные ряды для решения систем уравнений в частных производных 1-го порядка // Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования: Материалы 3-й Междун. научн. конф., Воронеж, 2–7 февраля 2009 г. – Воронеж: ВГУ, 2009.
12. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1969. – 744 с.
13. Олейник О. А., Самохин В. Н. Математические методы в теории пограничного слоя. – М.: Наука. Физматлит, 1997. – 512 с.
14. Сидоров А. Ф. О некоторых аналитических представлениях решений нелинейного уравнения нестационарной фильтрации // В сб. Сидоров А.Ф. Избранные труды: Математика. Механика. – М.: Физматлит, 2001. – С. 281–288.

15. С и д о р о в А. Ф. Специальные конструкции рядов для решения нелинейных уравнений с частными производными // В сб. Сидоров А.Ф. Избранные труды: Математика. Механика. – М.: Физматлит, 2001. – С. 217–225.

Статья поступила в редакцию 20.03.2009



Владимир Васильевич Феоктистов родился в 1944 г., окончил в 1967 г. МГУ им. М.В. Ломоносова. Д-р техн. наук, профессор кафедры “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Академик Российской академии космонавтики им. К.Э. Циолковского, лауреат премии им. Н.Е. Жуковского РАН. Автор более 70 научных работ в области прикладной математики.

V.V. Feoktistov (b. 1944) graduated from the Lomonosov Moscow State University in 1967. D. Sc. (Eng), professor of “Mathematical Modeling” Department of the Bauman Moscow State Technical University. Academician of the Russian Academy of Cosmonautics named after K.E. Tsiolkovsky, winner of N.Ye. Zhukovsky prize of Russian Academy of Sciences. Author of more then 70 publications in the field of applied mathematics.

Ольга Олеговна Мякинник окончила в 1984 г. Львовский государственный университет. В 1997–2000 гг. проходила стажировку на кафедре “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Соискатель кафедры “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 15 научных работ в области нелинейных уравнений математической физики.

O.O. Miakinnik graduated in 1984 from Lvov State University. Trainee of “Mathematical Simulation” Department of the Bauman Moscow State Technical University (1997–2000). Applicant for academic degree of “Mathematical Simulation” Department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 15 publications in the field of non-linear equations of mathematical physics.