УДК 519.87

В. Н. Орлов

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ В ОКРЕСТНОСТИ ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ

Предложено приближенное решение дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки. Исследовано влияние возмущения подвижной особой точки на приближенное решение.

E-mail: orlowvn@rambler.ru

Ключевые слова: дифференциальное уравнение Абеля, приближенное решение, подвижная особая точка, погрешность приближенного решения, возмущение подвижной особой точки.

К уравнению Абеля приводят задачи нелинейной оптики при описании сверхизлучательной лавины [1–3], теории конечной упругости [4], нелинейной диффузии [5], задачи оптимизации стержня реактора [6], нелинейной теплопроводности установившегося режима [7–9], нелинейной волновой теории [10].

В связи с тем, что дифференциальное уравнение Абеля в общем случае не разрешимо в квадратурах, а наличие подвижных особых точек (критических полюсов) не позволяет применять к этому уравнению существующие приближенные методы, задача приближенного решения уравнения Абеля является актуальной. Она разбивается на: 1) приближенное решение дифференциального уравнения в области аналитичности; 2) нахождение подвижных особых точек решения дифференциального уравнения Абеля с заданной точностью; 3) приближенное решение дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки.

В настоящей работе представлено исследование приближенного решения рассматриваемого уравнения в окрестности подвижной особой точки.

Теорема существования решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки. Рассмотрим задачу Коши для уравнения Абеля в нормальной форме

$$w'(x) = w^3(x) + \Phi(x); \tag{1}$$

$$w(x_0) = w_0, \tag{2}$$

к которому приводится с помощью определенной замены переменных дифференциальное уравнение Абеля 1-го рода

$$w'(x) = f_0(x) + f_1(x)w(x) + f_2(x)w^2(x) + f_3(x)w^3(x).$$

В свою очередь к уравнению Абеля 1-го рода с помощью некоторой замены переменных приводится уравнение Абеля 2-го рода [11]

$$[g_0(x)+g_1(x)w(x)]w'(x) = f_0(x)+f_1(x)w(x)+f_2(x)w^2(x)+f_3(x)w^3(x).$$

Теорема 1. *Пусть*

1) *функция* $\Phi(x) \in C^\infty$ *в области*

$$(x^* - x) < \rho_1, \tag{3}$$

где $0 < \rho_1 = \text{const}$, x^* *— подвижная особая точка решения задачи* (1)–(2);

2) $\left|\dfrac{\Phi^{(n)}(x)}{n\,!}\right| \leqslant M_1$, $\forall\, x$ *из* (3), *где* $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ M_1 = \text{const}$.

Тогда существует единственное решение уравнения (1) *в виде*

$$w(x) = (x^* - x)^\rho \sum_0^\infty C_n (x^* - x)^{n/2}, \tag{4}$$

где $\rho = -\dfrac{1}{2}$; $C_0 \neq 0$, *правильная часть которого сходится в области*

$$x^* - x < R_1 \tag{5}$$

$\forall\, x < x^*$, *где*

$$R_1 = \min\{\rho_1, \rho_2\}, \quad \rho_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2^4(1+M)^2}},$$

$$M = \sup_{n,G}\left|\frac{\Phi^{(n)}(x)}{n\,!}\right|,\ n = 0, 1, 2, \ldots, \quad G = \{x:\ x^* - \rho_1 < x < x^*\}.$$

Доказательство. Находим формальное решение уравнения (1) в окрестности подвижной особой точки x^* в виде (4). Для этого представим $\Phi(x)$ в окрестности точки x^* в виде

$$\Phi(x) = \sum_0^\infty A_n (x^* - x)^n \tag{6}$$

в силу того, что для $\Phi(x)$ точка x^* — регулярная. Подставляя (4) и (6) в (1), получаем

$$-\sum_0^\infty C_n \left(\rho + \frac{n}{2}\right)(x^* - x)^{\frac{n}{2}+\rho-1} =$$

$$= \left(\sum_0^\infty C_n (x^* - x)^{\frac{n}{2}+\rho}\right)^3 + \sum_0^\infty A_n (x^* - x)^n$$

или, после преобразования,

$$-\sum_{0}^{\infty} C_n \left(\frac{n}{2}+\rho\right)(x^*-x)^{\frac{n}{2}+\rho-1} = \sum_{0}^{\infty} D_n (x^*-x)^{\frac{n}{2}+3\rho}, \qquad (7)$$

где $D_n = C_n^{**}$ для $n = 2k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; $D_n = C_n^{**}$ для $n = 1$; $D_n = C_n^{**} + A_{n_1}$ для $n = 2k+1$, $k = 1, 2, \ldots, n_1 = 0, 1, \ldots$;

$$C_n^{**} = \sum_{0}^{n} C_i C_{n-i}^*, \quad C_n^* = \sum_{0}^{n} C_i C_{n-i}.$$

Равенство (7) обратится в тождество при условиях

$$\frac{n}{2}+\rho-1 = \frac{n}{2}+3\rho; \qquad (8)$$

$$-C_n\left(\frac{n}{2}+\rho\right) = D_n. \qquad (9)$$

Из (8) получаем $\rho = -\dfrac{1}{2}$, а соотношение (9) позволяет однозначно определить все C_n. Таким образом, получаем формальное представление решения уравнения (1) в виде (4) в окрестности подвижной особой точки x^*. В силу однозначности определения коэффициентов C_n из (9) следует единственность полученного формального решения.

Покажем сходимость правильной части ряда в правой части равенства (4) в области (5). Из условия 2 теоремы 1 следует существование

$$M = \sup_{n,G}\left|\frac{\Phi^{(n)}(x)}{n\,!}\right|, \qquad (10)$$

где $M = \text{const}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $G = \{x\colon x^* - \rho_1 < x < x^*\}$. Следовательно,

$$|A_n| \leq M, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (11)$$

Из (9) имеем $C_0 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = -\dfrac{2}{5}A_0$, $C_4 = 0$, $C_5 = -\dfrac{2}{5}A_1$, $\ldots$. С учетом (11) методом математической индукции доказана справедливость оценок

$$|C_{3n}| \leqslant \frac{2^{2n-4}}{3n+2}(1+M)^n = \vartheta_{3n}; \qquad (12)$$

$$|C_{3n+1}| \leqslant \frac{2^{2n-4}}{3n+3}(1+M)^n = \vartheta_{3n+1}; \qquad (13)$$

$$|C_{3n+2}| \leqslant \frac{2^{2n-4}}{3n+4}(1+M)^n = \vartheta_{3n+2}. \qquad (14)$$

Ограничимся случаем оценки (12). Предположим для определенности, что $3n + 3 = 2k + 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда из (9) с учетом (12)–(14)

имеем

$$\frac{3n+5}{2}|C_{3n+3}| \leq \left|\sum_0^{3n+1} C_{i+1}C_{3n+2-i} + \sum_1^{3n+2} C_i C^*_{3n+3-i} + A_{k-1}\right| =$$
$$= \left|\sum_0^{3n+1} C_{i+1}C_{3n+2-i} + \sum_1^{3n+2} C_i \sum_1^{3n+3-i} C_j C_{3n+3-j} + A_{k-1}\right| \leqslant$$
$$\leqslant (1+M)^{n+1}\cdot 2^{2n-6} + 2^{2n-5}(1+M)^{n+1} + M \leqslant 2^{2n-3}(1+M)^{n+1}.$$

Окончательно

$$|C_{3n+3}| \leqslant \frac{2^{2n-2}(1+M)^{n+1}}{3n+5}.$$

Аналогично подтверждаются оценки (13) и (14).

Рассмотрим ряд

$$\sum_1^{\infty} \vartheta_n (x^* - x)^{\frac{n-1}{2}}, \tag{15}$$

в силу условий (12)–(14) мажорирующий для ряда

$$\sum_1^{\infty} C_n (x^* - x)^{\frac{n-1}{2}}. \tag{16}$$

В силу закономерности для коэффициентов C_n представим ряд (15) в виде

$$\sum_1^{\infty} \vartheta_n (x^* - x)^{\frac{n-1}{2}} = \sum_1^{\infty} \vartheta_{3n} (x^* - x)^{\frac{3n-3}{2}} +$$
$$+ \sum_1^{\infty} \vartheta_{3n+1} (x^* - x)^{\frac{3n-2}{2}} + \sum_1^{\infty} \vartheta_{3n+2} (x^* - x)^{\frac{3n-1}{2}}.$$

Для каждого ряда в правой части последнего равенства с учетом оценок (12)–(14) имеем область сходимости

$$x^* - x < \frac{1}{\sqrt[3]{2^4(1+M)^2}} = \rho_2.$$

Положим $R_1 = \min\{\rho_1, \rho_2\}$. Так как ряд (15) — мажорирующий для ряда (16), то получаем сходимость ряда (16) в области (5).

Построение приближенного решения в окрестности подвижной особой точки. Исследование влияния возмущения подвижной особой точки на приближенное решение.

Теорема 2. *Для приближенного решения*

$$w_N(x) = \sum_0^{N} C_n (x^* - x)^{\frac{n-1}{2}} \tag{17}$$

задачи (1)–(2) *в окрестности подвижной особой точки* x^* : $x^*-\rho_2 < < x < x^*$ *справедлива оценка погрешности*

$$|w(x) - w_N(x)| = \Delta w_N(x) \leqslant \Delta,$$

где

$$\Delta = \frac{2^{2n-4}(1+M)^n (x^*-x)^{\frac{3n-3}{2}}}{1-2^2(1+M)(x^*-x)^{3/2}} \left(\frac{1}{3n+2} + \frac{(x^*-x)^{1/2}}{3n+3} + \frac{x^*-x}{3n+4} \right)$$

в случае $N+1=3n$,

$$\Delta = \frac{2^{2n-4}(1+M)^n (x^*-x)^{\frac{3n-2}{2}}}{1-2^2(1+M)(x^*-x)^{3/2}} \times \\ \times \left(\frac{1}{3n+3} + \frac{(x^*-x)^{1/2}}{3n+4} + \frac{4(1+M)(x^*-x)}{3n+5} \right)$$

для $N+1=3n+1$ *и*

$$\Delta = \frac{2^{2n-4}(1+M)^n (x^*-x)^{\frac{3n-1}{2}}}{1-2^2(1+M)(x^*-x)^{3/2}} \left(\frac{1}{3n+4} + \frac{4(1+M)(x^*-x)^{1/2}}{3n+5} + \right. \\ \left. + \frac{4(1+M)(x^*-x)}{3n+6} \right)$$

в случае варианта $N+1=3n+1$, *где* M *и* R_1 *взяты из теоремы 1.*

Доказательство теоремы основано на оценке выражения

$$|w(x) - w_N(x)| = \Delta w_N(x) = \left| \sum_{N+1}^{\infty} C_n (x^*-x)^{\frac{n-1}{2}} \right|$$

с учетом оценок для C_n из теоремы 1.

В связи с тем, что существующие методы позволяют получить подвижные особые точки лишь приближенно, с заданной точностью, то вместо приближенного решения (17) имеем

$$\widetilde{w}_N(x) = (\widetilde{x}^* - x)^{-\frac{1}{2}} \sum_{0}^{N} \widetilde{C}_n (\widetilde{x}^* - x)^{n/2}, \tag{18}$$

где $\widetilde{C}_n$, $\widetilde{x}^*$ — приближенные значения. Следующая теорема позволяет исследовать влияние возмущения подвижной особой точки на приближенное решение уравнения (1) в окрестности указанной особой точки.

Теорема 3. *Пусть*

1) $\Phi(x) \in C^\infty$ *в области* (5);

2)

$$\left| \frac{\Phi^{(n)}(x)}{n\,!} \right| \leqslant M_1 \tag{19}$$

$\forall\, x$ *из* (5); $M_1 =$ const, $n = 0, 1, 2, \ldots$;

3) $\widetilde{x}^* \leqslant x^*$;

4) *известна оценка погрешности значения* $\widetilde{x}^*$: $\quad x^* - \widetilde{x}^* \leqslant \Delta\widetilde{x}^*$;

5) $\Delta\widetilde{x}^* < 1/\sqrt[3]{2^{10}(1+M)^2}$, *где*

$$M = \sup_n \left|\frac{\Phi^{(n)}(\widetilde{x}^*)}{n\,!}\right|, \quad \Delta M = \left(\sup_{n,G}\left|\frac{\Phi^{(n+1)}(x)}{n\,!}\right|\right)\Delta\widetilde{x}^*,$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, \quad G = \{x\colon \widetilde{x}^* - \Delta\widetilde{x}^* \leqslant x \leqslant \widetilde{x}^*\}.$$

Тогда для приближенного решения (18) *задачи* (1)–(2) *для любого* x *из областей*

$$(\widetilde{x}^* - R_2, \widetilde{x}^* - \Delta\widetilde{x}^*], \tag{20}$$

$$(\widetilde{x}^* - \Delta\widetilde{x}^*, \widetilde{x}^*] \tag{21}$$

справедлива оценка погрешности

$$\Delta\widetilde{w}_N(x) \leqslant \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3,$$

где

$$\Delta_0 \leqslant \frac{\Delta\widetilde{x}^*}{2\sqrt{2}\alpha^{3/2}};$$

$$\Delta_1 \leqslant \frac{2^\beta\Delta\widetilde{x}^*(1+M)\alpha^{1/2}(1+16(1+M)\alpha+64(1+M)\alpha^2)}{1-2^{10}(1+M)^2\alpha^3} +$$

$$+\frac{\Delta\widetilde{x}^*(1+M)(1+2\alpha+16(1+M)\alpha^2)}{2(1-2^7(1+M)^2\alpha^3)};$$

$$\Delta_2 \leqslant \frac{\Delta M\alpha(1+(1+M+\Delta M)\alpha^{3/2})}{1-2^7(1+M+\Delta M)^2\alpha^3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{8}{9}\alpha^{1/2}+\frac{4\sqrt{2}}{5}\alpha\right);$$

$$\Delta_3 \leqslant \frac{2^{2n-4}(1+M)^n\alpha^{\frac{3n-3}{2}}}{1-4(1+M)\alpha^{3/2}}\left(\frac{1}{3n+2}+\frac{\alpha^{1/2}}{3n+3}+\frac{\alpha}{3n+4}\right)$$

в случае $N+1 = 3n$,

$$\Delta_3 \leqslant \frac{2^{2n-4}(1+M)^n\alpha^{\frac{3n-2}{2}}}{1-4(1+M)\alpha^{3/2}}\left(\frac{1}{3n+3}+\frac{\alpha^{1/2}}{3n+4}+\frac{4(1+M)\alpha}{3n+5}\right)$$

для $N+1 = 3n+1$ *и в случае* $N+1 = 3n+2$

$$\Delta_3 \leqslant \frac{2^{2n-4}(1+M)^n\alpha^{\frac{3n-1}{2}}}{1-4(1+M)\alpha^{3/2}}\left(\frac{1}{3n+4}+\frac{4(1+M)\alpha^{1/2}}{3n+5}+\frac{4(1+M)\alpha}{3n+6}\right),$$

где

$$\alpha = \begin{cases} \widetilde{x}^* - x & \text{для } x \text{ из области } (20), \\ \widetilde{x}^* & \text{для } x \text{ из области } (21); \end{cases}$$

$$R_2 = \min\left\{R_1, \frac{1}{(2^{10}(1+M)^2)^{1/3}}\right\};\ R_1 - \text{из теоремы 1};$$

$$\beta = \begin{cases} 1 & \text{для } x \text{ из области } (20), \\ 2 & \text{для } x \text{ из области } (21). \end{cases}$$

Доказательство.

$$|w(x) - \widetilde{w}_N(x)| \leqslant |w - \widetilde{w}| + |\widetilde{w} - \widetilde{w}_N| =$$

$$= \left| \sum_0^\infty C_n (x^* - x)^{\frac{n-1}{2}} - \sum_0^\infty \widetilde{C}_n (\widetilde{x}^* - x)^{\frac{n-1}{2}} \right| +$$

$$+ \left| \sum_0^\infty \widetilde{C}_n (x^* - x)^{\frac{n-1}{2}} - \sum_0^N \widetilde{C}_n (\widetilde{x}^* - x)^{\frac{n-1}{2}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant |\widetilde{C}_0| \left| \frac{1}{(x^* - x)^{1/2}} - \frac{1}{(\widetilde{x}^* - x)^{1/2}} \right| + \sum_0^\infty |\widetilde{C}_n| \left((x^* - x)^{\frac{n-1}{2}} - (\widetilde{x}^* - x)^{\frac{n-1}{2}} \right) +$$

$$+ \sum_0^\infty \Delta \widetilde{C}_n (\widetilde{x}^* - x + \Delta \widetilde{x}^*)^{\frac{n-1}{2}} + \sum_{N+1}^\infty \widetilde{C}_n (\widetilde{x}^* - x)^{\frac{n-1}{2}} = \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3.$$

Учитывая, что $C_0 = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $C_1 = C_2 = 0$, а следовательно, $\Delta \widetilde{C}_0 = = \Delta \widetilde{C}_1 = \Delta \widetilde{C}_2 = 0$, получаем

$$\Delta_0 \leqslant |C_0| \cdot \left| \frac{1}{(x^* - x)^{1/2}} - \frac{1}{(\widetilde{x}^* - x)^{1/2}} \right| \leqslant \frac{\Delta \widetilde{x}^*}{2\sqrt{2} (\widetilde{x}^* - x)^{3/2}}.$$

При оценке Δ_1 суммирование проводим отдельно по целым и дробным степеням:

$$\Delta_1 \leqslant \sum_1^\infty |\widetilde{C}_n| \left((\widetilde{x}^* - x + \Delta \widetilde{x}^*)^{\frac{n-1}{2}} - (\widetilde{x}^* - x)^{\frac{n-1}{2}} \right) =$$

$$= \sum_1^\infty |\widetilde{C}_{2n}| \left((\widetilde{x}^* - x + \Delta \widetilde{x}^*)^{\frac{2n-1}{2}} - (\widetilde{x}^* - x)^{\frac{2n-1}{2}} \right) +$$

$$+ \sum_1^\infty |\widetilde{C}_{2n-1}| \left((\widetilde{x}^* - x + \Delta \widetilde{x}^*)^{n-1} - (\widetilde{x}^* - x)^{n-1} \right) = \Delta_{11} + \Delta_{12}.$$

Принимая во внимание структуру оценок C_n, для Δ_{11} в области $\Delta \widetilde{x}^* \leqslant \widetilde{x}^* - x$ получаем

$$\Delta_{11} = \sum_2^\infty |\widetilde{C}_{2n}| \left((\widetilde{x}^* - x + \Delta \widetilde{x}^*)^{\frac{2n-1}{2}} - (\widetilde{x}^* - x)^{\frac{2n-1}{2}} \right) =$$

$$= \sum_1^\infty |\widetilde{C}_{6n-2}| \left((\widetilde{x}^* - x + \Delta \widetilde{x}^*)^{\frac{6n-3}{2}} - (\widetilde{x}^* - x)^{\frac{6n-3}{2}} \right) +$$

$$+\sum_{1}^{\infty}|\widetilde{C}_{6n}|\left((\widetilde{x}^*-x+\Delta\widetilde{x}^*)^{\frac{6n-1}{2}}-(\widetilde{x}^*-x)^{\frac{6n-1}{2}}\right)+$$

$$+\sum_{1}^{\infty}|\widetilde{C}_{6n-2}|\left((\widetilde{x}^*-x+\Delta\widetilde{x}^*)^{\frac{6n+1}{2}}-(\widetilde{x}^*-x)^{\frac{6n+1}{2}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2\Delta\widetilde{x}^*(1+M)(\widetilde{x}^*-x)^{1/2}(1+2^4(1+M)(\widetilde{x}^*-x)+2^6(1+M)(\widetilde{x}^*-x)^2)}{1-2^{10}(1+M)^2(\widetilde{x}^*-x)^3}$$

при условии $\widetilde{x}^*-x<1/\sqrt[3]{2^{10}(1+M)^2}$. В случае $\widetilde{x}^*-x<\Delta\widetilde{x}^*$ для Δ_{11} имеем

$$\Delta_{11}\leqslant\frac{2^2(1+M)(\Delta\widetilde{x}^*)^{3/2}(1+2^4(1+M)\Delta\widetilde{x}^*+2^6(1+M)(\Delta\widetilde{x}^*)^2)}{1-2^{10}(1+M)^2(\Delta\widetilde{x}^*)^3};$$

при этом $\Delta\widetilde{x}^*<1/\sqrt[3]{2^{10}(1+M)^2}$.

Аналогичным образом получаем оценки и для Δ_{12}:

$$\Delta_{12}\leqslant\frac{\Delta\widetilde{x}^*(1+M)(1+2(\widetilde{x}^*-x)+2^4(1+M)(\widetilde{x}^*-x)^2)}{2(1-2^7(1+M)^2(\widetilde{x}^*-x)^3)}$$

в области $\Delta\widetilde{x}^*\leqslant\widetilde{x}^*-x$ при условии $\widetilde{x}^*-x<1/\sqrt[3]{2^7(1+M)^2}$.

В случае $\widetilde{x}^*-x<\Delta\widetilde{x}^*$

$$\Delta_{12}\leqslant\frac{\Delta\widetilde{x}^*(1+M)(1+2\Delta\widetilde{x}^*+2^4(1+M)(\Delta\widetilde{x}^*)^2)}{2(1-2^7(1+M)^2(\Delta\widetilde{x}^*)^3)};$$

при этом $\Delta\widetilde{x}^*<1/\sqrt[3]{2^7(1+M)^2}$.

Переходим к оценке Δ_2. Принимая во внимание оценки для $\Delta\widetilde{C}_n$

$$\Delta\widetilde{C}_{3n}\leqslant\frac{2^{2n-4}\Delta M}{3n+2}(1+M+\Delta M)^{n-1};$$

$$\Delta\widetilde{C}_{3n+1}\leqslant\frac{2^{2n-4}\Delta M}{3n+3}(1+M+\Delta M)^{n-1};$$

$$\Delta\widetilde{C}_{3n+2}\leqslant\frac{2^{2n-4}\Delta M}{3n+4}(1+M+\Delta M)^{n-1},$$

где

$$M=\sup_n\left|\frac{\Phi^{(n)}(\widetilde{x}^*)}{n\,!}\right|;\quad \Delta M=\left(\sup_{n,G}\left|\frac{\Phi^{(n+1)}(x)}{n\,!}\right|\Delta\widetilde{x}^*\right);$$

$$G=\{x\colon x^*-\Delta\widetilde{x}^*\leqslant x\leqslant\widetilde{x}^*\},$$

полученные методом математической индукции, и разделяя целые и дробные степени в выражении Δ_2, получаем

$$\Delta_2=\sum_{0}^{\infty}\Delta\widetilde{C}_n(\widetilde{x}^*-x+\Delta\widetilde{x}^*)^{\frac{n-1}{2}}=\sum_{0}^{\infty}\Delta\widetilde{C}_{2n}(\widetilde{x}^*-x+\Delta\widetilde{x}^*)^{\frac{2n-1}{2}}+$$

$$+\sum_1^\infty \Delta\widetilde{C}_{2n-1}(\widetilde{x}^*-x+\Delta\widetilde{x}^*)^{n-1}=\sum_1^\infty \Delta\widetilde{C}_{6n-2}(\widetilde{x}^*-x+\Delta\widetilde{x}^*)^{\frac{6n-3}{2}}+$$

$$+\sum_1^\infty \Delta\widetilde{C}_{6n}(\widetilde{x}^*-x+\Delta\widetilde{x}^*)^{\frac{6n-1}{2}}+\sum_1^\infty \Delta\widetilde{C}_{6n+2}(\widetilde{x}^*-x+\Delta\widetilde{x}^*)^{\frac{6n+1}{2}}+$$

$$+\sum_1^\infty \Delta\widetilde{C}_{6n-3}(\widetilde{x}^*-x+\Delta\widetilde{x}^*)^{3n-2}+\sum_1^\infty \Delta\widetilde{C}_{6n-1}(\widetilde{x}^*-x+\Delta\widetilde{x}^*)^{3n-1}+$$

$$+\sum_1^\infty \Delta\widetilde{C}_{6n+1}(\widetilde{x}^*-x+\Delta\widetilde{x}^*)^{3n}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\Delta M(\widetilde{x}^*-x)(1+(1+M+\Delta M)(\widetilde{x}^*-x)^{3/2})}{1-2^7(1+M+\Delta M)^2(\widetilde{x}^*-x)^3}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{8}{9}(\widetilde{x}^*-x)^{1/2}+\frac{4\sqrt{2}}{5}(\widetilde{x}^*-x)\right).$$

Выражения оценки для Δ_2 получены для области

$$\widetilde{x}^*-\frac{1}{\sqrt[3]{2^7(1+M+\Delta M)^2}}\leqslant x\leqslant\widetilde{x}^*-\Delta\widetilde{x}^*.$$

Для области $\widetilde{x}^*-\Delta\widetilde{x}^*<x\leqslant\widetilde{x}^*$ в выражении оценки Δ_2 нужно $(\widetilde{x}^*-x)$ заменить величиной $\Delta\widetilde{x}^*$.

Оценка для Δ_3 следует из теоремы 2, при этом связь между индексами N и n осуществляется исходя из выбора одного из трех соотношений: 1) $N+1=3n$; 2) $N+1=3n+1$; 3) $N+1=3n+2$.

Вводя обозначения

$$\alpha=\begin{cases}\widetilde{x}^*-x & \text{для } x \text{ из области (20)},\\ \widetilde{\Delta}x^* & \text{для } x \text{ из области (21)};\end{cases}$$

$$\beta=\begin{cases}1 & \text{для } x \text{ из области (20)},\\ 2 & \text{для } x \text{ из области (21)};\end{cases}$$

$$R_2=\min\left\{R_1,\frac{1}{\sqrt[3]{2^{10}(1+M)^2}}\right\},$$

получаем возможность в одном варианте оценок для Δ_0, Δ_1, Δ_2, Δ_3 охватить две области их существования.

Рассмотрим задачу Коши

$$y'=y^3,\quad y(1)=1,$$

которая имеет точное решение $y=1/\sqrt{3-2x}$; точное значение подвижной особой точки $x^*=1{,}5$. Для расчетов взяты следующие параметры: $\widetilde{x}^*=1{,}49$; $\Delta\widetilde{x}^*=0{,}01$; $x_1=1{,}4$; $x_2=1{,}45$; $N=6$. Результаты расчетов приведены в таблице.

x	$w(x)$	$\widetilde{w}_6(x)$	Δ	$\widetilde{\Delta}$	$\lvert\Delta - \widetilde{\Delta}\rvert$
$1,4$	$2,236$	$2,357$	$0,121$	$0,209$	$0,088$
$1,45$	$3,162$	$3,535$	$0,37$	$0,45$	$0,08$

Здесь x — значение аргумента; $w(x)$ — точное значение решения; $\widetilde{w}_6(x)$ — приближенное решение; Δ — абсолютная величина погрешности; $\widetilde{\Delta}$ — оценка величины погрешности, полученная по теореме 3; $|\Delta - \widetilde{\Delta}|$ — абсолютная величина разности абсолютной величины погрешности и оценки, полученной по теореме 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чудновский В. М., Холодкевич Е. Д. Теория сверхизлучательных лавин радиоволнового диапазона // ФТТ. – 1982. – Т. 24, № 4. –С. 1118–1123.
2. Чудновский В. М. Лавинный распад инвертированного состояния квантовой системы: Автореф. дис. . . . канд. физ.-мат. наук. – Минск, 1983. – 16 с.
3. Самодуров А. А., Чудновский В. М. Простой способ определения времени задержки сверхизлучательной бозонной лавины // Докл. АН БССР. – 1985. – Т. 29, № 1. – С. 910.
4. Hill J. M. Radial deflections of thin precompressed cylindrical rubber bush mountings // Internat. J. Solids Structures. – 1977. – No. 13. – P. 93–104.
5. Ockendon J. R. Numerical and analytical solutions of moving boundary problems // Proc. Symp. Moving Boundary Problems / Ed. D.G. Wilson, A.D. Solomon and P.T. Boggs. – New York, 1978. – P. 129–145.
6. Axford R. A. The exact solution of singular arc problems in vector core optimization // Proc. Nuclear Utilities Planning Methods Symp. Tennessee, 1974. – P. 1–14.
7. Axford R. A. Differential equations invariant urber two-parameter Lie groups with applications to non-linear diffusion // Los Alamos Report. 1970. (LA-4517, UC-34).
8. Axford R. A. Group invariance properties of the Poisson–Boltzmann and other non-linear field equations // Los Alamos Report. 1972. (LA-4864. UC-34).
9. Axford R. A. Non-linear thermal instability phenomena in plates and rods // A.S.M.E. Nuclear Eng. Div., Winter Annual Meeting. Michigan, 1973. – P. 1–12.
10. Hill J. M. Abel's differential equation // J. Math/ Scientist. – 1982. – V. 7, No. 2. – P. 115–125.
11. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 576 с.

Статья поступила в редакцию 9.02.2009

Виктор Николаевич Орлов родился в 1950 г., в 1973 г. окончил Чувашский государственный университет. Канд. физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой "Математика, информатика и моделирование" Российского государственного социального университета (филиал в г. Чебоксары). Автор 84 научных работ и 4 патентов на изобретение в области аналитической теории дифференциальных уравнений, вычислительной математики, математического моделирования .

V.N. Orlov (b. 1950) graduated from the Chuvashia State University in 1973. Ph. D. (Phys.-Math.), assoc. professor, head of "Mathematics, Information Technology and Simulation" department of the Russian State Social University (Branch in Cheboksary). Author of 84 publications and 4 patents for invention in the field of analytical theory of differential equations, computing mathematics, mathematical simulation.