УДК 539.3:536.2

Н. Н. Головин, В. С. Зарубин,
Г. Н. Кувыркин

СМЕСЕВЫЕ МОДЕЛИ МЕХАНИКИ КОМПОЗИТОВ. Ч. 2. МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ КОМПОЗИТОВ НА ОСНОВЕ УГЛЕРОДА

Рассмотрены математические модели нелинейноупругого и вязкопластического деформирования двухкомпонентной смеси, используемые при изучении поведения композитов на основе углерода в условиях внешних нестационарных термомеханических воздействий.

E-mail: fn2@bmstu.ru

Ключевые слова: композит, нелинейная упругость, вязкопластичность, термомеханика.

В конструкциях, работающих в условиях интенсивных силовых и тепловых воздействий, широко применяют пространственно армированные композиты на основе углерода. При исследовании термонапряженного состояния конструкций из таких композитов эти материалы можно рассматривать как двухкомпонентные, состоящие из матрицы и упругих армирующих элементов, ориентированных в нескольких направлениях. Такие материалы принято называть углерод-углеродными композитами (УУК).

При анализе напряженно-деформированного состояния конструкций из УУК наиболее широкое распространение получил подход, описывающий эти материалы как сплошную неупругую анизотропную среду с эффективными характеристиками. Вместе с тем использование модели гомогенного материала при высокоинтенсивном нагружении композитных деталей и узлов не позволяет учитывать процессы, обусловленные различием механических свойств и температур компонентов УУК. Однако практическое использование микромеханических моделей композитных материалов ограничено сложностью достоверного определения требуемого набора свойств матрицы и армирующих элементов. Для УУК положение усугубляется еще и тем, что углеродная матрица вне композита просто не существует.

Модель нелинейной двухкомпонентной термоупругой среды. В общем случае при построении математической модели среды в виде гетерогенной смеси необходимо учитывать процессы межкомпонентного обмена массой, энергией, количеством движения и моментом количества движения [1]. В данном случае двухкомпонентной среды ограничимся учетом обмена между компонентами с номерами α и ν ($\alpha,\,\nu\,=\,1,\,2,\alpha\neq\nu$) лишь количеством движения, предполагая возможность взаимного относительного смещения компонентов композита. Тогда для компонента с номером α можно записать

$$\overset{\alpha}{\sigma}_{ij}=\overset{\alpha}{C}_{ijkl}(\overset{\alpha}{\varepsilon}_{kl}-\overset{\alpha(T)}{\varepsilon}_{kl}),\quad \overset{\nu\alpha}{P}_i=\beta_{ij}(u^\nu_j-u^\alpha_j),\quad i,\,j,\,k,\,l=1,\,2,\,3,\quad (1)$$

где $\overset{\alpha}{\sigma}_{ij}$, $\overset{\alpha}{\varepsilon}_{kl}$, $\overset{\alpha(\mathrm{T})}{\varepsilon}_{kl}$ — компоненты тензоров напряжений, полной и температурной деформаций соответственно; $\overset{\alpha}{C}_{ijkl}$ — компоненты тензора коэффициентов упругости, в случае нелинейного деформирования изменяющиеся в процессе деформирования; β_{ij} — элементы симметрической неотрицательно определенной матрицы, связывающей разность $u^\nu_j-u^\alpha_j$ составляющих векторов перемещений компонентов композита с составляющими $\overset{\nu\alpha}{P}_i$ вектора, характеризующего интенсивность переноса количества движения от компонента с номером ν к компоненту с номером α. В соотношниях (1) и далее использовано правило суммирования по повторяющимся латинским индексам.

В случае, когда матрица композита и наполнитель в виде армирующих элементов деформируются совместно, т.е. $\overset{\alpha}{\varepsilon}_{kl}=\overset{\nu}{\varepsilon}_{kl}=\varepsilon_{kl}$, где ε_{kl} — компоненты тензора малой деформации композита, выражение для компонент тензора напряжений можно получить путем сложения первого равенства в (1) с аналогичным для компонента с номером ν:

$$\sigma_{ij}=\overset{\alpha}{C}_{ijkl}\big(\varepsilon_{kl}-\overset{\alpha(T)}{\alpha}_{ij}(T_\alpha-T_0)\big)+\overset{\nu}{C}_{ijkl})\big(\varepsilon_{kl}-\overset{\nu(T)}{\alpha}_{ij}(T_\nu-T_0)\big)\,,\ \alpha\neq\nu\,,\quad (2)$$

где $\overset{\alpha(T)}{\alpha}_{ij}$, $\overset{\nu(T)}{\alpha}_{ij}$ — компоненты тензоров коэффициентов температурной деформации; T_α, T_ν и T_0 — температуры компонентов с номерами α, ν и естественного состояния композита. В этом случае $\overset{\nu\alpha}{P}_i=\overset{\alpha\nu}{P}_i=0$.

Если считать матрицу композита изотропной, то вместо (2) можно записать

$$\sigma_{ij}=\left(\lambda_\alpha\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu_\alpha(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})+\sum_{n=1}^{N}\overset{\nu_n}{C}_{pqrs}\,l^{\nu_n}_{ip}\,l^{\nu_n}_{jq}\,l^{\nu_n}_{kr}\,l^{\nu_n}_{ls}\right)\varepsilon_{kl}-$$
$$-\,3\varkappa_\alpha\overset{\alpha(T)}{\alpha}\delta_{ij}(T_\alpha-T_0)-\sum_{n=1}^{N}\overset{\nu_n}{C}_{pqrs}\overset{\nu_n(T)}{\alpha}_{rs}\,l^{\nu_n}_{ip}\,l^{\nu_n}_{jq}(T_\nu-T_0),$$
$$\alpha\neq\nu,\quad p,\,q,\,r,\,s=1,\,2,\,3\,,$$

где λ_α, μ_α, $\varkappa_\alpha$, $\overset{\alpha(T)}{\alpha}$ — соответственно константы Ламе, модуль объемной упругости и температурный коэффициент линейного расширения для изотропной матрицы; δ_{ij} — символ Кронекера; N — число армирующих элементов; $\overset{\nu_n}{C}_{ijkl}$ и $\overset{\nu_n(T)}{\alpha}_{pq}$ — соответственно компоненты тензоров коэффициентов упругости и температурной деформации n-го армирующего элемента; $l_{ij}^{\nu_n}$ — направляющие косинусы, задающие ориентацию осей n-го армирующего элемента в базовой системе координат.

В случае стержневых армирующих элементов вместо последнего равенства получим

$$\sigma_{ij} = \left(\lambda_\alpha \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu_\alpha(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \sum_{n=1}^{N} \overset{\nu_n}{G} l_i^{\nu_n} l_j^{\nu_n} l_k^{\nu_n} l_l^{\nu_n}\right)\varepsilon_{kl} -$$

$$-3\varkappa_\alpha \overset{\alpha(T)}{\alpha} \delta_{ij}(T_\alpha - T_0) - \sum_{n=1}^{N} \overset{\nu_n}{G}\overset{\nu_n(T)}{\alpha} l_i^{\nu_n} l_j^{\nu_n}(T_\nu - T_0), \quad \alpha \neq \nu, \qquad (3)$$

где $\overset{\nu_n}{G}$ и $\overset{\nu_n(T)}{\alpha}$ — жесткость и температурный коэффициент линейного расширения n-го армирующего элемента в направлении его продольной оси; $l_i^{\nu_n}$ — направляющие косинусы, задающие ориентацию продольной оси n-го армирующего элемента в базовой системе координат. Если стержневой армирующий элемент по-разному сопротивляется растяжению и сжатию, то $\overset{\nu_n}{G} = (\overset{\nu_n+}{G} + \overset{\nu_n-}{G})/2 + \mathrm{sign}\,(\overset{\nu_n}{\varepsilon})(\overset{\nu_n+}{G} - \overset{\nu_n-}{G})/2$, где $\overset{\nu_n+}{G}$ и $\overset{\nu_n-}{G}$ — жесткости армирующего элемента при растяжении и сжатии соответственно; $\overset{\nu_n}{\varepsilon}$ — продольная деформация в направлении оси n–го армирующего элемента.

При нарушении совместности деформирования матрицы и наполнителя композита соотношение, связывающее напряжения и деформации, распадается на два уравнения

$$\overset{\alpha}{\sigma}_{ij} = \big(\lambda_\alpha \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu_\alpha(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\big)\overset{\alpha}{\varepsilon}_{kl} - 3\varkappa_\alpha \overset{\alpha(T)}{\alpha} \delta_{ij}(T_\alpha - T_0),$$

$$\overset{\nu}{\sigma}_{ij} = \sum_{n=1}^{N} \overset{\nu_n}{G} l_i^{\nu_n} l_j^{\nu_n} l_k^{\nu_n} l_l^{\nu_n} \overset{\nu_n}{\varepsilon}_{kl} - \left(\sum_{n=1}^{N} \overset{\nu_n}{G}\ \overset{\nu_n(T)}{\alpha} l_i^{\nu_n} l_j^{\nu_n}\right)(T_\nu - T_0), \quad \alpha \neq \nu.$$

Для нахождения параметров микромеханической модели композита (характеристик матрицы и наполнителя) целесообразно определять механические “псевдохарактеристики” компонентов композита в рамках модели (3) на основе информации, получаемой из испытаний макрообразцов композита в так или иначе выбранных характерных направлениях, которыми для ортотропных материалов будут главные направления ортотропии. При этом каждую из экспериментальных диаграмм разбивают на два участка — участок линейного деформирования и нелинейный участок. Для первого участка имеем зависимость

$\sigma_{ij} = C^{\text{э}}_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}$, где $C^{\text{э}}_{ijkl}$ — экспериментально определяемые компоненты тензора коэффициентов упругости композита, которые следует сопоставить с соответствующими компонентами

$$C_{ijkl} = \lambda_\alpha \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu_\alpha(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \sum_{n=1}^{N} \overset{\nu_n}{G}\, l_i^{\nu_n} l_j^{\nu_n}\, l_k^{\nu_n} l_l^{\nu_n}$$

модели (3). Для этого будем искать минимальное значение функции ошибок, задаваемой выражением

$$V(\{x\}) = \sqrt{\sum_{M_\text{э}} (C_{ijkl}/C^{\text{э}}_{ijkl} - 1)^2}, \tag{4}$$

где $\{x\} = \{E_\alpha,\, \nu_\alpha,\, \overset{\nu_1}{G},\, \ldots\, \overset{\nu_N}{G}\}^{\text{т}}$, причем E_α и ν_α — модуль продольной упругости и коэффициент Пуассона матрицы соответственно, через которые можно однозначно выразить константы Ламе λ_α и u_α; $M_\text{э}$ — число известных значений $C^{\text{э}}_{ijkl}$.

На аргументы функции ошибок (4) наложены естественные ограничения $E_\alpha > 0$, $|\nu_\alpha| \leqslant 0{,}5$ и $\overset{\nu_n}{G} > 0$, для учета которых введем штрафную функцию

$$P(\{x\}) = r(f_{E_\alpha} + f_{\nu_\alpha}) + r\sum_{n=1}^{N} f_n,$$

где r — весовой коэффициент, $0 \leqslant r \leqslant 1$;

$$f_{E_\alpha} = \begin{cases} 1/E_\alpha & \text{при} \;\; E_\alpha > \xi, \\ 2/\xi - E_\alpha/\xi^2 & \text{при} \;\; E_\alpha \leqslant \xi, \end{cases}$$

$$f_{\nu_\alpha} = \begin{cases} 1/(0{,}5 - |\,\nu_\alpha\,|) & \text{при} \;\; 0{,}5 - |\,\nu_\alpha\,| > \xi', \\ 1/\xi' - 0{,}5 + |\,\nu_\alpha\,| & \text{при} \;\; 0{,}5 - |\,\nu_\alpha\,| \leqslant \xi', \end{cases}$$

$$f_n = \begin{cases} 1/\overset{\nu_n}{G} & \text{при} \;\; \overset{\nu_n}{G} > \xi, \\ 2/\xi - \overset{\nu_n}{G}/\xi^2 & \text{при} \;\; \overset{\nu_n}{G} \leqslant \xi, \end{cases}$$

где ξ и ξ' — малые параметры.

Целевую функцию задаем выражением $\bar{V}(\{x\}) = V(\{x\}) + P(\{x\})$, а задачу идентификации упругих характеристик компонентов композита формулируем так: задана целевая функция $\bar{V}(\{x\})$, нужно найти такое $\{x^*\}$, для которого $\bar{V}(\{x^*\}) \leqslant \bar{V}(\{x\})$ при всех значениях $\{x\}$. Необходимым и достаточным условиями в точке минимума будут равенство нулю градиента целевой функции: $\nabla\bar{V}(\{x^*\}) = 0$, и положительная определенность ее гессиана: $\nabla^2\bar{V}(\{x^*\}) \geqslant 0$. Решение будем искать с помощью модифицированного метода Ньютона [2]

$$\Big[H(\{x_c\})\Big]\,\{s\} = -\nabla\bar{V}(\{x_c\})\,, \tag{5}$$

предусматривающего выполнение ньютоновского шага $\{s\}$ только в случае надежной положительной определенности гессиана целевой функции. Для этого последний модифицируем с помощью алгоритма [2] $\Big[H(\{x_c\})\Big] = \nabla^2 \bar{V}(\{x_c\}) + \kappa_c[I]$, где $[I]$ — единичная матрица; κ_c — коэффициент, который равен нулю при положительной определенности гессиана, а в противном случае выбирается таким, чтобы обеспечить положительную определенность матрицы системы уравнений (5).

При решении целесообразно воспользоваться стратегией мультистарта, которая состоит в повторении процесса поиска локального минимума для нескольких точек начального приближения, расположенных в данном случае равномерно в физически достоверной области определения функции ошибок. При этом в качестве глобального минимума принимают наименьший из найденных локальных минимумов.

Второй участок каждой из одноосных диаграмм деформирования характерен нарастанием пластических деформаций в изотропной матрице и необратимыми процессами в системе армирующих элементов, связанными с проскальзыванием и частичным разрушением этих элементов. В этом случае напряжения на одноосной диаграмме деформирования в направлении $\omega = 1, 2, 3$ можно представить в виде $\sigma^0_\omega = s_\omega + \sigma_{\omega\text{п}}(1 - z_\omega)$, где s_ω — напряжения, связанные с неупругим деформированием матрицы; $\sigma_{\omega\text{п}}$ — предел пропорциональности; z_ω — параметр, характеризующий необратимые дефекты системы армирующих элементов, причем

$$z_\omega = (E_\omega/\sigma^0_\omega)(\varepsilon^0_\omega - \varepsilon^{(p)}_\omega) - 1, \tag{6}$$

E_ω — модуль упругости композита в направлении ω; ε^0_ω — значение деформации, соответствующее на одноосной диаграмме деформирования напряжению σ^0_ω, а неупругие деформации, обусловленные пластическим деформированием матрицы, определяются соотношением

$$\varepsilon^{(p)}_\omega = 2(\psi-1)(1+\nu_\alpha)\overset{\alpha}{\sigma}_\omega/(3E_\alpha) = 2(\psi-1)(1+\nu_\alpha)(\sigma^0_\omega - \overset{\nu}{\sigma}_\omega)/(3E_\alpha); \tag{7}$$

здесь $\psi = E_\alpha/E^c_\alpha$ — параметр пластичности; E^c_α — секущий модуль упругости матрицы. В рассматриваемом случае напряжение в системе армирующих элементов можно представить в виде

$$\overset{\nu}{\sigma}_\omega = z_\omega \overset{\nu}{\bar{G}}_{\omega j}\varepsilon^0_j, \tag{8}$$

где $\overset{\nu}{\bar{G}}_{\omega j}$ — элементы матрицы упругости этой системы. Подставляя (7) с учетом (8) в (6), получаем

$$\sigma^0_\omega = E_\omega \frac{\varepsilon^0_\omega + 2(\psi-1)(1+\nu_\alpha)z_\omega \overset{\nu}{\bar{G}}_{\omega j}\,\varepsilon^0_j/(3E_\alpha)}{1 + z_\omega + 2(\psi-1)(1+\nu_\alpha)E_\omega/(3E_\alpha)}.$$

Это соотношение, связывающее экспериментальную информацию с параметрами модели (4), может быть использовано для нахождения значений ψ и z_ω. Задаваясь какими-либо значениями ψ и параметров разупрочнения системы армирующих элементов, можно получить приближенные значения $\sigma_\omega^{(p)}$ напряжений на одноосных диаграммах деформирования и вычислить погрешность с использованием функции ошибок

$$V_1(\{x\}) = \sqrt{\sum_{M_э} (\sigma_\omega^{(p)}/\sigma_\omega^0 - 1)^2},$$

где $\{x\} = \{\psi, z_1, z_2, z_3\}^{\text{т}}$. На аргументы этой функции налагают ограничения $\psi > \psi_{\text{пр}}$, $z_\omega > 0$, где $\psi_{\text{пр}}$ — значение параметра пластичности на предыдущем шаге нагружения. Эти ограничения вызывают необходимость введения штрафной функции $P_1(\{x\}) = g_\psi + g_1 + g_2 + g_3$, где

$$g_\psi = \begin{cases} 1/(\psi - \psi_{\text{пр}}) & \text{при} \;\; \psi - \psi_{\text{пр}} > \xi' \\ 2\xi - (\psi - \psi_{\text{пр}})/(\xi')^2 & \text{при} \;\; \psi - \psi_{\text{пр}} \leqslant \xi', \end{cases}$$

$$g_\omega = \begin{cases} 1/z_\omega & \text{при} \;\; z_\omega > \xi', \\ 2\xi - z_\omega/(\xi')^2 & \text{при} \;\; z_\omega \leqslant \xi'. \end{cases}$$

В этом случае целевую функцию задаем выражением $\bar{V}_1(\{x\}) = V(\{x\})_1 + P_1(\{x\})$, а задачу идентификации параметров неупругого деформирования сводим к задаче поиска минимального значения этой целевой функции.

Особо следует остановиться на вопросе определения коэффициентов поперечной деформации композита в процессе деформирования. Хотя в выражение (8) и входят деформации образца в поперечном направлении, обычно получить их в процессе эксперимента не представляется возможным. В этом случае на каждом шаге деформирования целесообразно организовать итерационный процесс, предусматривающий вычисления параметров неупругого деформирования в соответствии с изложенным алгоритмом на базе приближенных значений коэффициентов поперечной деформации с последующей их коррекцией путем выделения технических констант материала из расчетной секущей матрицы упругости композита.

Модель вязкопластического деформирования углерод-углеродных композитов. Для построения модели вязкопластического поведения УУК представляется целесообразным развитие предложенного в [3] микромеханического подхода к описанию деформирования таких материалов путем введения внутреннего времени [4], связанного с теми или иными механизмами накопления повреждений. В предположении совместного деформирования матрицы и ориентированных в нескольких направлениях армирующих элементов компоненты тензора напряжений композита можно представить в виде [4, 5]

$$\sigma_{ij}=\overset{\alpha}{C}_{ijkl}\big(\varepsilon_{kl}-\overset{\alpha}{\chi}_{kl}-\overset{\alpha}{\alpha}{}^{(T)}_{ij}(T_\alpha-T_0)\big)+\overset{\nu}{C}_{ijkl}\big(\varepsilon_{kl}-\overset{\nu}{\chi}_{kl}-\overset{\nu}{\alpha}{}^{(T)}_{kl}(T_\nu-T_0)\big), \quad (9)$$

причем изменение тензорных внутренних параметров $\overset{\alpha}{\chi}_{kl}$ и $\overset{\nu}{\chi}_{kl}$ компонентов композита определено кинетическими уравнениями [3]

$$t_\alpha\frac{d\overset{\alpha}{\chi}_{ij}}{dz_\alpha}+\overset{\alpha}{\chi}_{ij}=\overset{\alpha}{\bar{\chi}}_{ij},\quad t_\nu\frac{d\overset{\nu}{\chi}_{ij}}{dz_\nu}+\overset{\nu}{\chi}_{ij}=\overset{\nu}{\bar{\chi}}_{ij}, \quad (10)$$

где t_α и t_ν — время релаксации; $\overset{\alpha}{\bar{\chi}}_{ij}$ и $\overset{\nu}{\bar{\chi}}_{ij}$ — равновесные значения внутренних структурных параметров; z_α и z_ν — внутреннее время α-го и ν-го компонентов композита соответственно, причем

$$dz_\alpha=\sqrt{\left(\frac{\overset{\alpha}{C}_{ijkl}}{3\tilde{\varkappa}_\alpha}-\overset{\alpha}{\beta}_{ij}\overset{\alpha}{\beta}_{kl}\right)d\varepsilon_{kl}\,d\varepsilon_{ij}},\quad dz_\nu=\sqrt{\left(\frac{\overset{\nu}{C}_{ijkl}}{3\tilde{\varkappa}_\nu}-\overset{\nu}{\beta}_{ij}\overset{\nu}{\beta}_{kl}\right)d\varepsilon_{kl}\,d\varepsilon_{ij}},$$

$\tilde{\varkappa}_\alpha=\overset{\alpha}{C}_{ijkl}\overset{\alpha}{\phi}_{kl}\overset{\alpha}{\phi}_{ij}$ — аналог модуля объемной упругости компонента смеси с номером α, $\overset{\alpha}{\phi}_{ij}\overset{\alpha}{\phi}_{ij}=1$, $\overset{\alpha}{\beta}_{ij}=\overset{\alpha}{C}_{ijkl}\overset{\alpha}{\phi}_{kl}/(3\tilde{\varkappa}_\alpha)$ [3].

Из (10) следует

$$\overset{\alpha}{\chi}_{ij}=\overset{\alpha}{\bar{\chi}}_{ij}-\int\limits_0^{z_\alpha}\exp\left(-\frac{z_\alpha-z'_\alpha}{t_\alpha}\right)\frac{\partial\overset{\alpha}{\bar{\chi}}_{ij}}{\partial z'_\alpha}dz'_\alpha,$$

$$\overset{\nu}{\chi}_{ij}=\overset{\nu}{\bar{\chi}}_{ij}-\int\limits_0^{z_\nu}\exp\left(-\frac{z_\nu-z'_\nu}{t_\nu}\right)\frac{\partial\overset{\nu}{\bar{\chi}}_{ij}}{\partial z'_\nu}dz'_\nu.$$

Использовав эти равенства и приняв $\overset{\alpha}{\bar{\chi}}_{ij}=\overset{\nu}{\bar{\chi}}_{ij}=\varepsilon_{ij}$, перепишем (9) в виде

$$\sigma_{ij}=\overset{\alpha}{C}_{ijkl}\int\limits_0^{z_\alpha}\frac{\partial\varepsilon_{kl}}{\partial z'_\alpha}\exp\left(-\frac{z_\alpha-z'_\alpha}{t_\alpha}\right)dz'_\alpha+$$
$$+\overset{\nu}{C}_{ijkl}\int\limits_0^{z_\nu}\frac{\partial\varepsilon_{kl}}{\partial z'_\nu}\exp\left(-\frac{z_\nu-z'_\nu}{t_\nu}\right)dz'_\nu-$$
$$-\overset{\alpha}{C}_{ijkl}\overset{\alpha}{\alpha}{}^{(T)}_{kl}(T_\alpha-T_0)-\overset{\nu}{C}_{ijkl}\overset{\nu}{\alpha}{}^{(T)}_{kl}(T_\nu-T_0). \quad (11)$$

Введя в рассмотрение N армирующих элементов, представим формулу (11) в общем виде

$$\sigma_{ij} = \int\limits_0^{z_\alpha} \overset{\alpha}{\tilde{C}}_{ijkl}(z_\alpha - z'_\alpha) \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial z'_\alpha}\, dz'_\alpha +$$

$$+ \sum_{n=1}^{N} \int\limits_0^{z_{\nu_n}} \overset{\nu_n}{\tilde{C}}_{pqrs}(z_{\nu_n} - z'_{\nu_n}) l_{ip}^{\nu_n}\, l_{jq}^{\nu_n}\, l_{kr}^{\nu_n}\, l_{ls}^{\nu_n} \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial z'_{\nu_n}}\, dz'_{\nu_n} -$$

$$- \overset{\alpha}{C}_{ijkl} \overset{\alpha}{\alpha}{}_{kl}^{(T)} (T_\alpha - T_0) - \sum_{n=1}^{N} \overset{\nu_n}{C}_{pqrs} \overset{\nu_n}{\alpha}{}_{rs}^{(T)} l_{ip}^{\nu_n}\, l_{jq}^{\nu_n} (T_\nu - T_0). \quad (12)$$

В частном случае в формуле (12) можно положить

$$\overset{\alpha}{\tilde{C}}_{ijkl}(z_\alpha - z'_\alpha) = \overset{\alpha}{C}_{ijkl} \sum_{m=1}^{M_\alpha} \overset{\alpha}{B}_m \exp\left(-\frac{z_\alpha - z'_\alpha}{t_\alpha^{(m)}}\right),$$

$$\overset{\nu_n}{\tilde{C}}_{ijkl}(z_\nu - z'_\nu) = \overset{\nu_n}{C}_{ijkl} \sum_{m=1}^{M_\nu} \overset{\nu_n}{B}_m \exp\left(-\frac{z_{\nu_n} - z'_{\nu_n}}{t_{\nu_n}^{(m)}}\right).$$

Определение параметров модели вязкопластического деформирования композита можно осуществить на базе информации, получаемой из одноосных испытаний на растяжение и сжатие в характерных направлениях, аналогично ранее описанной процедуре путем численной минимизации норм рассогласования теоретических и экспериментальных диаграмм деформирования.

Заключение. Построенные математические модели нелинейного деформирования термостабильных УУК могут быть развиты и уточнены на основе сопоставления результатов моделирования с экспериментальными данными. Это позволит более адекватно анализировать работоспособность конструкций из УУК при интенсивных силовых и тепловых воздействиях.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 08-08-00615а, 09-08-00699а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Головин Н. Н., Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н. Смесевые модели механики композитов. Ч. 1. Термомеханика и термоупругость многокомпонентной смеси // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Естественные науки”. – 2009. – №3 (34). – С. 36–49.
2. Дэннис Р. М., Шнайбель Р. Численные методы безусловной оптимизации и решение нелинейных уравнений: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 440 с.
3. Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – 512 с.
4. Головин Н. Н., Кувыркин Г. Н. Вариант эндохронной теории неупругого деформирования анизотропных материалов // Тр. МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 1990. – № 542. – С. 49–58.

5. Г о л о в и н Н. Н., К у в ы р к и н Г. Н. Термомеханическая модель нелинейного деформирования пространственно армированных углерод–углеродных композитов // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1995. – № 2. – С. 61–67.

Статья поступила в редакцию 5.06.2009

Николай Николаевич Головин родился в 1958 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1982 г. Канд. техн. наук, старший научный сотрудник. Начальник отдела прочности, нагрузок и нагрева ФГУП “Московский институт теплотехники”. Автор более 60 научных работ в области математического моделирования термомеханических процессов.

N.N. Golovin (b. 1958) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1982. Ph. D. (Eng.), senior researcher. Head of department of strength, loads and heating of Federal State Unitary Enterprise “Moscow Institute of Thermal Technology”. Author of more than 60 publications in the field of mathematical simulation of thermomechanical processes.

Владимир Степанович Зарубин родился в 1933 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1957 г. Д-р техн. наук, профессор кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Правительства РФ в области науки и техники. Автор более 250 научных работ в области математического моделирования термомеханических процессов в материалах и элементах конструкций.

V.S. Zarubin (b. 1933) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1957. D. Sc. (Eng.), professor of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Honored Science Worker of the Russian Federation, Laureate of RF Government Prize in Science and Technology. Author of more than 250 publications in the field of mathematical simulation of thermomechanical processes in materials and construction members.

Георгий Николаевич Кувыркин родился в 1946 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1970 г. Д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Лауреат премии Правительства РФ в области науки и техники. Автор более 160 научных работ в области прикладной математики и математического моделирования термомеханических процессов в материалах и элементах конструкций.

G.N. Kuvyrkin (b. 1946) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1970. D. Sc. (Eng.), professor, head of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Laureate of RF Government Prize in Science and Technology. Author of more than 160 publications in the field of applied mathematics and mathematical simulation of thermomechanical processes in materials and construction members.