УДК 517.9:532

А. Н. Темнов, А. Л. Гевлич

УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННЫХ ДВИЖЕНИЙ СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАНЕТ

Получены и проанализированы уравнения малых движений невращающейся планеты, состоящей из гравитирующей сферической твердой оболочки — мантии, самогравитирующей жидкости и гравитирующего сферического твердого ядра. Показано, что рассматриваемая механическая система, обладающая изначально бесконечным числом степеней свободы, может быть сведена к колебательной системе с конечным числом степеней свободы; проведено сравнение результатов вычислений с известными литературными данными.

E-mail: sm11@sm.bmstu.ru

Ключевые слова: строение планет, внешнее ядро, внутреннее ядро, мантия, собственная частота, парциальные частоты.

Успехи сейсмологии в начале прошлого столетия поставили точку в споре о структуре недр Земли. В 1936 г. И. Леман показала, что ядро состоит из двух частей — жидкого внешнего и внутреннего твердого ядер. В 1960 г. Л. Шлихтер обнаружил фундаментальную моду колебаний внутреннего ядра при изучении записей Чилийского землетрясения [1]. Отечественные исследования динамики смещений твердого ядра были начаты Ю.Н. Авсюком и А.С. Мониным [2, 3]. В последние годы благодаря космическим исследованиям и радиолокации появились гипотезы, что подобное строение имеют ядра и других планет (Венера, Меркурий) [4]. В настоящей статье приведены результаты исследований, доложенные на 5-й Международной конференции “Новые идеи в науках о Земле” [5].

Постановка задачи. Рассмотрим механическую систему, состоящую из твердого тела с полостью, заполненной идеальной однородной несжимаемой жидкостью, и плавающего в ней твердого ядра, находящуюся во внешнем поле массовых сил, описываемых (на единицу массы притягиваемых тел) силовой функцией $U^{(e)}$. Будем считать, что силы взаимодействия между частицами твердого тела и жидкости подчиняются закону тяготения Ньютона. Рассмотрим модельную задачу о возмущенных движениях гравитирующих тел, в которой учитываются только поступательные движения твердой оболочки (мантии) ядра и возникающее при этом движение жидкости.

Введем неинерциальную систему отсчета $C_0x_1x_2x_3$, начало которой совпадает с центром масс (ц.м.) системы в невозмущенном движении, совершающую поступательное движение с ускорением $\vec{a}_0$ относительно некоторой инерциальной системы отсчета. Примем, что невозмущенное движение ц.м. системы описывается уравнением

$$M\vec{a}_0 = \int\limits_{\tau^*} \rho \nabla U_0^{(e)} d\tau,$$

где M — масса всей планеты; $U_0^{(e)}$ — силовая функция внешнего поля массовых сил, отвечающая невозмущенному движению; τ^* — общий объем областей, занятых ядром, жидкостью и мантией; ρ — плотность соответствующей среды: ядра $\rho_{\text{я}}$, жидкости $\rho_{\text{ж}}$, мантии $\rho_{\text{м}}$; $\nabla = \sum\limits_{k=1}^{3} \vec{e}_k \dfrac{\partial}{\partial x_k}$ — оператор Гамильтона; $\vec{e}_k$ — орты осей $C_0 x_i$. Положение твердой оболочки и ядра в возмущенном движении относительно системы координат $C_0 x_1 x_2 x_3$ зададим векторами $\vec{w}_{\text{м}}(t)$, $\vec{w}_{\text{я}}(t)$, проекции которых на оси $C_0 x_i$ есть обобщенные координаты, определяющие положение ц.м. оболочки и ядра. Расположение частиц жидкости в возмущенном движении определим эйлеровыми координатами $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, а смещение частиц — полем смещений с компонентами $w_i(x, t)$, $i = 1, 2, 3$. Скорости точек системы обозначим $\vec{v}_{\text{м}}(t)$, $\vec{v}_{\text{я}}(t)$, $\vec{v}(x, t)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Для получения уравнений движения воспользуемся уравнениями Лагранжа 2-го рода, которые в рассматриваемом случае могут быть записаны в виде [6]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \qquad \left. \begin{array}{l} q_j = w_{\text{я}i}, \quad j = 1, 2, 3; \\ q_j = w_{\text{м}\,i}, \quad j = 4, 5, 6; \end{array} \right\}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Im}{\partial v_j} - \frac{\partial \Im}{\partial x_j} = \frac{\partial U}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho_{\text{ж}}}\frac{\partial p}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, 3. \tag{2}$$

К уравнениям (1), (2) необходимо добавить соотношения, выражающие действия внутренних и внешних связей, наложенных на частицы жидкости, т.е. уравнение неразрывности и граничные условия:

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot \vec{v} = 0; \\ &\vec{v} \cdot \vec{n}_{\text{м}} = \vec{v}_{\text{м}} \cdot \vec{n}_{\text{м}} \ \text{ на } \ S_{\text{м}}(t), \\ &\vec{v} \cdot \vec{n}_{\text{я}} = \vec{v}_{\text{я}} \cdot \vec{n}_{\text{я}} \ \text{ на } \ S_{\text{я}}(t), \end{aligned} \tag{3}$$

где $\vec{n}_{\text{м}}$, $\vec{n}_{\text{я}}$ — внешние нормали к области занимаемой жидкостью, т.е. к подвижным поверхностям оболочки $S_{\text{м}}$ и ядра $S_{\text{я}}$. В уравнениях (1), (2) T — кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} M_{\text{м}} v_0^2 + \frac{1}{2} M_{\text{я}} v_{\text{я}}^2 + \int\limits_{\tau} \rho_{\text{ж}} \Im d\tau; \tag{4}$$

$M_{\text{м}}$, $M_{\text{я}}$ — массы мантии и ядра; Q_i — обобщенные силы, которые в рассматриваемой постановке обусловлены внутренними и внешними гравитационными силами, а также силами инерции; $\rho_{ж}$ — плотность жидкости; $\Im = v^2/2$ — удельная кинетическая энергия жидкости; $p(\vec{r}, t)$ — множитель Лагранжа, являющийся одновременно гидродинамическим давлением; τ — область, занимаемая жидкостью; U — силовая функция внешних $U^{(e)}$ и внутренних $U^{(i)}$ гравитационных сил, действующих на частицы жидкости, представленная в виде

$$
\begin{aligned}
&U = U^{(i)} + U^{(e)};\\
&U^{(i)} = U_{я} + U_{ж} + U_{м},
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где $U_{я} = U_{я}(\vec{r}, t)$ — силовая функция гравитирующего ядра; $U_{ж} = U_{ж}(\vec{r}, t)$ — силовая функция гравитирующей жидкости; $U_{м} = U_{м}(\vec{r}, t)$ — силовая функция оболочки. Функцию $U^{(e)}(x, t)$ будем считать заданной, а функции $U_{я}$, $U_{ж}$, $U_{м}$ неизвестными, зависящими от движения ядра, оболочки, частиц жидкости, которые и подлежат определению.

Таким образом, для вывода уравнений необходимо иметь решения гидродинамической задачи для поля скоростей и гравитационных задач для силовых функций.

Гидродинамическая задача. Подстановка выражения для кинетической энергии в уравнение (2) приводит к уравнениям Эйлера идеальной жидкости. Предположив, что движение жидкости в полости несущего тела (твердой оболочки) потенциально, представим вектор скорости частиц жидкости в виде

$$\vec{v} = \nabla F,$$

где $F(x, t)$ — потенциал абсолютных скоростей жидкости, являющийся в рассматриваемом случае движения тел решением задачи Неймана для уравнений Лапласа

$$
\begin{aligned}
&\nabla \cdot \nabla F = 0,\\
&\frac{\partial F}{\partial n_{я}} = \vec{v}_{я} \cdot \vec{n}_{я} \;\text{ на }\; S_{я},\\
&\frac{\partial F}{\partial n_{м}} = \vec{v}_{м} \cdot \vec{n}_{м} \;\text{ на }\; S_{м}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Имеющиеся в литературе оценки смещения внутреннего ядра Земли [5, 6] указывают на малость значений обобщенных координат $w_{яi}(t)$, $w_{мi}(t)$ и позволяют при рассмотрении гидродинамической задачи воспользоваться методами линейной гидродинамики [7] — ввести потенциал смещений частиц жидкости $\Phi(x, t)$, определяемый соотношением $F = \partial\Phi/\partial t$, и выразить поле смещений частиц жидкости как

$$\vec{w} = \nabla\Phi. \tag{7}$$

Используя функцию $\Phi(x,t)$, переформулируем задачу (6), записав ее так:

$$\begin{aligned} &\nabla\cdot\nabla\Phi = 0,\\ &\frac{\partial\Phi}{\partial n_{\text{я}}} = \vec{w}_{\text{я}}\cdot\vec{n}_{\text{я}} \ \text{ на } \ S_{\text{я}},\\ &\frac{\partial\Phi}{\partial n_{\text{м}}} = \vec{w}_{\text{м}}\cdot\vec{n}_{\text{м}} \ \text{ на } \ S_{\text{м}}. \end{aligned} \tag{8}$$

Решение задачи (8) будем искать в виде

$$\Phi(\vec{r},t) = \vec{\varphi}^{(\text{м})}\cdot\vec{w}_{\text{м}} + \vec{\varphi}^{(\text{я})}\cdot\vec{w}_{\text{я}}, \tag{9}$$

где $\vec{\varphi}^{(\text{м})}$, $\vec{\varphi}^{(\text{я})}$ — единичные векторные потенциалы, компоненты которых удовлетворяют краевым задачам:

$$\begin{aligned} &\nabla\cdot\nabla\varphi_j^{(\text{я})} = 0, && \nabla\cdot\nabla\varphi_j^{(\text{м})} = 0,\\ &\frac{\partial\varphi_j^{(\text{я})}}{\partial n_{\text{я}}} = n_{\text{я}j} \ \text{ на } \ S_{\text{я}}, && \frac{\partial\varphi_j^{(\text{м})}}{\partial n_{\text{м}}} = n_{\text{м}j} \ \text{ на } \ S_{\text{м}},\\ &\frac{\partial\varphi_j^{(\text{я})}}{\partial n_{\text{м}}} = 0 \ \text{ на } \ S_{\text{м}}, && \frac{\partial\varphi_j^{(\text{м})}}{\partial n_{\text{я}}} = 0 \ \text{ на } \ S_{\text{я}},\\ &j = 1,2,3, && j = 4,5,6. \end{aligned} \tag{10}$$

Единичные потенциалы $\varphi_j^{(\text{я})}$, $\varphi_j^{(\text{м})}$, $j = 1,2,3$, удовлетворяющие краевой задаче (10), будем искать в виде

$$\varphi_j^{(l)} = A_j^{(l)}x_j + \frac{B_j^{(l)}x_j}{\sqrt{\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^3}}, \quad l = \text{я},\text{м}, \quad j = 1,2,3. \tag{11}$$

Коэффициенты $A_j^{(l)}$, $B_j^{(l)}$, определяются из граничных условий для сферического ядра и сферической полости выражениями

$$\begin{aligned} &A_j^{(\text{я})} = \frac{a^3}{a^3-b^3}; \quad B_j^{(\text{я})} = \frac{b^3a^3}{2(a^3-b^3)};\\ &A_j^{(\text{м})} = \frac{b^3}{b^3-a^3}; \quad B_j^{(\text{м})} = \frac{b^3a^3}{2(b^3-a^3)}, \end{aligned} \tag{12}$$

где a, b — радиус ядра и внутренний радиус оболочки, $j = 1,2,3$.

Гравитационная задача. *Лагранжево и эйлерово изменения силовой функции.* Из постановки краевой задачи (6) следует, что силовая функция U внутренних и внешних гравитационных сил должна зависеть от движения ядра, оболочки, частиц жидкости и источников внешних гравитационных сил. Поэтому гравитационную задачу можно рассматривать как задачу определения отклонений силовой функции от невозмущенных значений в областях, занимаемых жидкостью, ядром и оболочкой. При смещениях частиц гравитирующей среды, определяемых вектором $\vec{w}(x,t)$, полное лагранжево изменение силовой функции выражается формулой [8]

$$\delta U = U(\vec{r} + \vec{w}(x,t), t) - U_0(x,t), \tag{13}$$

где $U(\vec{r} + \vec{w}(x,t), t)$, $U_0(x,t)$ — значения силовой функции для одного и того же элемента гравитирующей среды в возмущенном и невозмущенном движениях.

Вместе с тем приращение

$$U_{\text{э}} = U(x,t) - U_0(x,t)$$

определяет эйлерову вариацию, наблюдаемую при сравнении значений U в возмущенном и невозмущенном движениях в фиксированной точке пространства x. Лагранжева и эйлерова вариации могут быть связаны при помощи разложения в ряд Тейлора. Пренебрегая произведениями w_j, получаем

$$\delta U = U_{\text{э}} + \vec{w} \cdot \nabla U_0.$$

Смещения твердого ядра на $\vec{w}_{\text{я}}(t)$, твердой оболочки на $\vec{w}_{\text{м}}(t)$ и источника внешних сил вызовут в точках пространства эйлеровы изменения соответствующих силовых функций $U_{\text{я}e}$, $U_{\text{м}e}^{(i)}$, $U_{\text{э}}^{(e)}$.

Полное эйлерово изменение силовой функции в точках области, занимаемой жидкостью, выразится суммой

$$U_{\text{э}}(x,t) = U_{\text{я}e} + U_{\text{м}e}^{(i)} + U_{\text{ж}}^{(i)} + U_{\text{э}}^{(e)},$$

где $U_{\text{ж}}^{(i)}$ — эйлерово изменение силовой функции $U_{\text{ж}}$ в точках пространства, занимаемых жидкостью. Обозначив лагранжево изменение силовой функции внутренних гравитационных сил рассматриваемой системы в точках области, занимаемой жидкостью, через $U^{(i)}$ и приняв во внимание представление (7), получим

$$U^{(i)}(x,t) = U_{\text{я}e} + U_{\text{м}e}^{(i)} + U_{\text{ж}}^{(i)} + \nabla\Phi \cdot \nabla U_0^{(i)}. \tag{14}$$

В случае сферических ядра и оболочки определение эйлеровых возмущений силовых функций можно получить методом суперпозиции при известных выражениях для силовых функций в невозмущенном состоянии. Например, потенциал $U_{\text{ж}}^{(i)}$, который равен разности суммы силовых функций жидкости, заполняющей целиком смещенную оболочку, и смещенного ядра с плотностью, равной плотности жидкости, и суммы силовых функций жидкости, заполняющей оболочку, и ядра при отсутствии смещения, запишем в виде

$$U_{\text{ж}}^{i} = \rho 2\pi j \left\{ b^2 - \frac{(\vec{r} - \vec{w}_{\text{м}})^2}{3} - \frac{2}{3}\frac{a^3}{|\vec{r} - \vec{w}_{\text{я}}|} - \left(b^2 - \frac{(\vec{r})^2}{3} \right) + \frac{2}{3}\frac{a^3}{|\vec{r}|} \right\}$$

или, пренебрегая слагаемыми второго порядка малости,

$$U_{\text{ж}}^{i} = -j\frac{M_{\text{я}}^{*}}{|\vec{r}|^{3}}\vec{w}_{\text{я}}\cdot\vec{r} + j\frac{M_{\text{я}}^{*}}{a^{3}}\vec{w}_{\text{м}}\cdot\vec{r}, \tag{15}$$

где $M_{\text{я}}^{*} = \rho\cdot\dfrac{4}{3}\pi a^{3}$.

Эйлерово изменение силовой функции самого ядра в области $|\vec{r}| > a$ (области, занимемой жидкостью), равно

$$U_{\text{я}e} = jM_{\text{я}}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{w}_{\text{я}}|} - \frac{1}{|\vec{r}|}\right) \approx j\frac{M_{\text{я}}}{|\vec{r}|^{3}}\vec{w}_{\text{я}}\cdot\vec{r}. \tag{16}$$

При смещении оболочки в виде шарового слоя на $\vec{w}_{\text{м}}(t)$, изменение ее потенциала в точках внутренней области ($a \leqslant |\vec{r}| \leqslant b$) равно нулю: $U_{\text{м}e}^{(i)} = 0$. Эйлерово изменение силовой функции источника внешних гравитационных сил, находящегося на расстоянии $|\vec{e}|$ от центра масс планеты, в точках области, занимаемой планетой, выразим формулой

$$U_{\text{э}}^{(e)} = j\frac{M^{(e)}}{|\vec{r}-\vec{e}|^{3}}\vec{w}^{(e)}\cdot\vec{r},$$

где $M^{(e)}$, $\vec{w}^{(e)}$ — масса и вектор смещения источника. Отметим, что эйлерово изменение $U_{\text{э}}^{(e)}$ может быть вызвано не только механическими силами (вектор $\vec{w}^{(e)}$), но и различными физико-химическими процессами, происходящими в источнике.

Аналогично можно определить и эйлеровы компоненты изменения силовой функции жидкости в областях, не занятых жидкостью. Так эйлерово изменение силовой функции жидкости в области, занимаемой ядром, равно

$$U_{\text{ж}e}^{i} = -j\frac{M_{\text{я}}^{*}}{a^{3}}(\vec{w}_{\text{я}} - \vec{w}_{\text{м}})\cdot\vec{r}, \quad 0 \leqslant |\vec{r}| \leqslant a, \tag{17}$$

а в области, занимаемой жидкостью,

$$U_{\text{ж}e} = j\frac{M_{\text{м}}^{*}}{|\vec{r}|^{3}}\vec{w}_{\text{м}}\cdot\vec{r} - j\frac{M_{\text{я}}^{*}}{|\vec{r}|^{3}}\vec{w}_{\text{я}}\cdot\vec{r}. \tag{18}$$

Определение обобщенных сил. Для определения обобщенных сил составим сумму виртуальных работ всех сил, действующих в рассматриваемой системе. Сообщим ядру возможное перемещение $\delta\vec{w}_{\text{я}}$, $\delta\vec{w}_{\text{м}} = 0$, тогда частицы жидкости получат возможные перемещения $\delta\bar{w}_{\text{ж}}$ и сумма виртуальных работ равна

$$\left(\sum \delta A_{\text{к}}\right)_{\text{я}} = \delta A_{\text{яя}} + \delta A_{\text{яж}},$$

где $\delta A_{\text{яя}}$ — виртуальная работа сил инерции, внутренних и внешних гравитационных сил, действующих на ядро:

$$\delta A_{\text{яя}} = \rho_{\text{я}} \int\limits_{\tau_{\text{я}}} \left(\vec{a}_0 + \nabla U^{(i)}_{\text{ж}e} + \nabla U^{(e)}\right) \delta\vec{w}_{\text{я}} d\tau, \tag{19}$$

где $U^{(e)}$ — силовая функция внешних гравитационных сил в возмущенном движении; $\delta A_{\text{яж}}$ — виртуальная работа сил инерции, внутренних и внешних гравитационных сил, действующих на частицы жидкости,

$$\delta A_{\text{яж}} = \rho_{\text{ж}} \int\limits_{\tau_{\text{ж}}} \left(\vec{a}_0 + \nabla U^{(i)}_{\text{ж}} + \nabla U_{\text{я}e} + \nabla(\vec{w}_{\text{ж}} \cdot \nabla U^{(i)}_0) + \nabla U^{(e)}\right) \delta\vec{w}_{\text{ж}} d\tau. \tag{20}$$

Сообщим оболочке такое возможное перемещение $\delta\vec{w}_{\text{м}}$, при котором $\delta\vec{w}_{\text{я}} = 0$, а частицы жидкости получат соответствующие возможные перемещения $\delta\vec{w}_{\text{ж}}$. При таких перемещениях системы сумма виртуальных работ

$$\left(\sum \delta A_{\text{к}}\right)_{\text{м}} = \delta A_{\text{мм}} + \delta A_{\text{мж}},$$

где $\delta A_{\text{мм}}$ и $\delta A_{\text{мж}}$ — виртуальные работы сил инерции, внутренних и внешних гравитационных сил, действующих соответственно на оболочку и частицы жидкости, причем

$$\delta A_{\text{мм}} = \int\limits_{\tau_{\text{м}}} \rho_{\text{м}} \left(-\vec{a}_0 + \nabla U_{\text{ж}e} + \nabla U_{\text{я}e} + \nabla U^{(e)}\right) \delta\vec{w}_{\text{м}} d\tau; \tag{21}$$

$$\delta A_{\text{мж}} = \int\limits_{\tau_{\text{ж}}} \rho_{\text{ж}} \left(-\vec{a}_0 + \nabla U_{\text{я}e} + \nabla U^{(i)}_{\text{ж}} + \nabla(\vec{w}_{\text{ж}} \cdot \nabla U^{(i)}_0) + \nabla U^{(e)}\right) \delta\vec{w}_{\text{ж}} d\tau. \tag{22}$$

Преобразуя объемные интегралы в выражениях (19)–(22), примем во внимание уравнения голономных связей (3), наложенных на движения жидкости и означающих, что поле возможных перемещений $\delta\vec{w}_{\text{ж}}(\vec{r}, t)$ подчиняется условиям

$$\begin{gathered} \nabla \cdot \delta\vec{w}_{\text{ж}} = 0 \ \text{ в } \ \tau_{\text{ж}}, \\ \delta\vec{w}_{\text{ж}} \cdot \vec{n}_{\text{я}} = \delta\vec{w}_{\text{я}} \cdot \vec{n}_{\text{я}} \ \text{ на } \ S_{\text{я}}, \\ \delta\vec{w}_{\text{ж}} \cdot \vec{n}_{\text{м}} = \delta\vec{w}_{\text{м}} \cdot \vec{n}_{\text{м}} \ \text{ на } \ S_0. \end{gathered} \tag{23}$$

Учитывая потенциальность поля малых смещений жидкости и условия (23), преобразуем выражения для сумм виртуальных работ. В результате получим выражения, в которых поверхностные интегралы при вариациях $\delta\vec{w}_{\text{я}j}$ и $\delta\vec{w}_{\text{м}j}$ равны обобщенным силам $Q_{\text{я}j}$ и $Q_{\text{м}j}$:

$$Q_{\text{яж}} = \int\limits_{S_{\text{я}}} [\rho_{\text{ж}} \left(U_{\text{ж}}^{(i)} + U_{\text{я}e} + \nabla\Phi \cdot \nabla U_0^{(i)} + U^{(e)} \right) - \rho_{\text{я}} \left(U_{\text{ж}e}^{(i)} + U^{(e)} \right) -$$

$$- \left(\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{я}} \right) \vec{a}_0 \cdot \vec{r}] n_{\text{я}j} dS; \quad (24)$$

$$Q_{\text{мж}} = \int [\rho_{\text{ж}} \left(U_{\text{я}e} + U_{\text{ж}}^{(i)} + \nabla\Phi \cdot \nabla U_0^{(i)} + U^{(e)} \right) - \rho_{\text{м}} \left(U_{\text{ж}e} + U_{\text{я}e} + U^{(e)} \right) -$$

$$- \left(\rho_{\text{м}} - \rho_{\text{ж}} \right) \vec{a}_0 \cdot \vec{r}] n_{\text{м}j} dS + \int\limits_{S_3} \rho_{\text{м}} \left(U^{(e)} - \vec{a}_0 \cdot \vec{r} \right) n_{3j} dS, \quad (25)$$

где n_{3j} — проекция на ось O_0X_j внешней нормали $\vec{n}_3$ к внешней поверхности S_3 оболочки-мантии.

Уравнения движения и относительного покоя. Составим выражение для кинетической энергии жидкости. Используя решения для единичных гидродинамических потенциалов $\varphi_j^{(\text{я})}$ и $\varphi_j^{(0)}$ и представление (8), получаем

$$T_{\text{ж}} = \frac{1}{2} M_{\text{пр}}^{(я)} \dot{\vec{w}}_{\text{я}}^2 + \frac{1}{2} M_{\text{пр}}^{(\text{м})} \dot{\vec{w}}_{\text{м}}^2 + M_{\text{ям}} \dot{\vec{w}}_{\text{я}} \cdot \dot{\vec{w}}_{\text{м}},$$

где $M_{\text{пр}}^{(\text{я})} = M_{\text{я}}^* \dfrac{2a^3 + b^3}{2(b^3 - a^3)}$ — присоединенная масса ядра, $M_{\text{я}}^* = \dfrac{4}{3}\pi\rho_{\text{ж}} a^3$;
$M_{\text{пр}}^{(\text{м})} = M_{\text{м}}^* \dfrac{2b^3 + a^3}{2(b^3 - a^3)}$ — присоединенная масса мантии; $M_{\text{м}}^* = \dfrac{4}{3}\pi\rho_{\text{ж}} b^3$;
$M_{\text{ям}} = 2\pi\rho_{\text{ж}} \dfrac{b^3 a^3}{b^3 - a^3}$ — совместная присоединенная масса ядра и мантии.

Подставим в формулы (24), (25) для обобщенных сил выражения силовых функций (15)–(18) и найдем для рассматриваемого случая сферических тел обобщенные силы $Q_{\text{я}j}$ и $Q_{\text{м}j}$. Используя уравнение Лагранжа (1), составляем уравнения относительного движения ядра и оболочки-мантии в виде

$$m\ddot{W} + K^2 JW = F^{(e)};$$

$$m = \begin{pmatrix} m_{\text{я}} & -M_{\text{ям}} \\ -M_{\text{ям}} & m_{м} \end{pmatrix}; \; J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{array}{l} W = (\vec{w}_{\text{я}}, \vec{w}_{\text{м}})^{\tau}; \\ F^{(e)} = (\vec{f}_{\text{я}}, \vec{f}_{\text{м}})^{\tau}, \end{array} \quad (26)$$

где $m_{\text{я}} = M_{\text{я}} + M_{\text{пр}}^{(\text{я})}$, $m_{\text{м}} = M_{\text{м}} + M_{\text{пр}}^{(\text{м})}$, $K^2 = g_W (M_{\text{я}} - M_{\text{я}}^*)$; $g_W = \dfrac{4}{3}\pi\rho_{\text{ж}}\gamma$;

$$\vec{f}_{\text{я}} = (\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{я}}) \int\limits_{S_{\text{м}}} (U^{(e)} - \vec{a}_0 \cdot \vec{r}) \vec{n}_{\text{я}} dS, \; \vec{f}_{\text{м}} = (\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{м}}) \int\limits_{S_{\text{м}}} (U^{(e)} - \vec{a}_0 \cdot \vec{r}) \vec{n}_{\text{м}} dS +$$

$$+ \rho_{\text{м}} \int\limits_{S_3} (U^{(e)} - \vec{a}_0 \cdot \vec{r}) dS.$$

Уравнения (26) описывают относительные движения ядра и мантии-оболочки, наполненной однородной гравитирующей несжимаемой жидкостью, которые находятся во внешнем поле массовых сил, порожденных различными источниками, характеризуемыми силовой функцией $U^{(e)}$.

Сложив уравнения (26), придем к уравнению возмущенного движения центра масс

$$M\ddot{\vec{w}}_c = \int\limits_{\tau_я} \rho_я \nabla U^{(e)} d\tau + \int\limits_{\tau_ж} \rho_ж \nabla U^{(e)} d\tau + \int\limits_{\tau_м} \rho_м \nabla U^{(e)} d\tau - M\vec{a}_0. \quad (27)$$

Здесь $\ddot{\vec{w}}_c$ — вектор смещения центра масс системы относительно невозмущенного положения точки C_0, определяемый формулой

$$\vec{w}_c = \frac{M_я \cdot \vec{w}_я + M_м \cdot \vec{w}_м + M^*_м \cdot \vec{w}_м - M^*_я \cdot \vec{w}_я}{M} \quad (28)$$

или

$$\vec{w}_c = \frac{M_я \cdot \vec{w}_я + M_м \cdot \vec{w}_м + M_ж \cdot \vec{w}_ц}{M},$$

где $\vec{w}_ц$ — вектор смещения центра масс жидкости

$$\vec{w}_ц = \frac{\int\limits_{\tau_ж} \rho_ж \vec{w}_ж d\tau}{M_ж} = \frac{M^*_м \vec{w}_м - M^*_я \vec{w}_я}{M_ж}.$$

Отсюда следует вывод: вектор $\vec{w}_c$ в уравнениях (28) одного порядка с $\vec{w}_я$ и $\vec{w}_м$. В подынтегральных выражениях в правой части уравнения (27) или уравнений (26) функция $U^{(e)}$ принимает разные значения в областях, занимаемых жидкостью, ядром или мантией, и при малых относительных смещениях может быть представлена в виде ряда Тейлора:

$$U^{(e)}(\vec{r} + \vec{w}_я, t) = U^{(e)}_0(\vec{r}, t) + \vec{w}_я \cdot \nabla U^{(e)}_0 + U^{(e)}_э + \ldots \quad (29)$$

в области, занимаемой ядром;

$$U^{(e)}(\vec{r} + \vec{w}_ж, t) = U^{(e)}_0(\vec{r}, t) + U^{(e)}_э(\vec{r}, t) + \vec{w}_ж \cdot \nabla U^{(e)}_0 + \ldots \quad (30)$$

в области, занимаемой жидкостью;

$$U^{(e)}(\vec{r} + \vec{w}_м, t) = U^{(e)}_0(\vec{r}, t) + U^{(e)}_э(\vec{r}, t) + \vec{w}_м \cdot \nabla U^{(e)}_0 + \ldots \quad (31)$$

в области, занимаемой мантией; здесь $U^{(e)}_э(\vec{r}, t)$ — эйлерово возмущение внешнего поля массовых сил, а многоточие означает отброшенные в ряде Тейлора слагаемые второго порядка малости и выше.

Подставим выражения (29)–(31) для силовой функции $U^{(e)}$ в уравнения (26) и сформулируем условия покоя ядра и оболочки-мантии относительно системы $C_0x_1x_2x_3$ в невозмущенном движении:

$$\begin{gathered}\rho_{\text{я}}\int\limits_{\tau_{\text{я}}}\nabla U_0^{(e)}d\tau+\int\limits_{S_{\text{я}}}\rho_{\text{ж}}(U_0^{(e)}-\vec{a}_0\cdot\vec{r})\vec{n}_{\text{я}}dS-M_{\text{я}}\vec{a}_0=0;\\ \rho_{\text{м}}\int\limits_{\tau_{\text{м}}}\nabla U_0^{(e)}d\tau+\int\limits_{S_{\text{м}}}\rho_{\text{ж}}(U_0^{(e)}-\vec{a}_0\cdot\vec{r})\vec{n}_{\text{м}}dS-M_{\text{м}}\vec{a}_0=0.\end{gathered}\tag{32}$$

Условия (32) показывают, что в состоянии относительного покоя сумма всех активных сил, сил реакций связи (сил гидростатического давления жидкости) и сил инерции, приложенных к ядру или мантии, равна нулю.

Учитывая уравнения относительного равновесия и выражение (9), запишем уравнения возмущенных движений ядра и оболочки в виде

$$m\ddot{W}+(K^2J+f)W=F_{\text{э}},\tag{33}$$

где $f=\begin{pmatrix}F_{\text{я}} & F_{\text{ям}}\\ F_{\text{ям}} & F_{\text{м}}\end{pmatrix}$; $F_{\text{э}}=(\vec{f}_{\text{э}}^{(\text{я})},\vec{f}_{\text{э}}^{(\text{м})})^{\tau}$; $W=(\vec{w}_{\text{я}},\vec{w}_{\text{м}})^{\tau}$; $\vec{f}_{\text{э}}^{(\text{я})}=$ $=(\rho_{\text{ж}}-\rho_{\text{я}})\int\limits_{S_{\text{я}}}U_{\text{э}}^{(e)}\vec{n}_{\text{я}}dS$; $\vec{f}_{\text{э}}^{(\text{м})}=(\rho_{\text{ж}}-\rho_{\text{м}})\int\limits_{S_{\text{м}}}U_{\text{э}}^{(e)}\vec{n}_{\text{м}}dS+\rho_{\text{м}}\int\limits_{S_{\text{я}}}U_{\text{э}}^{(e)}\vec{n}_3dS$;

$F_{\text{я}}$, $F_{\text{мя}}$, $F_{\text{ям}}$, $F_{\text{м}}$ — тензоры, учитывающие неоднородность внешнего невозмущенного гравитационного поля, а также движение гравитирующей жидкости, т.е.

$$F_{\text{я}}=\int\limits_{S_{\text{я}}}[\rho_{\text{я}}\nabla U_0^{(e)}-\rho_{\text{ж}}(\nabla U_0^{(e)}\cdot\nabla\vec{\varphi}^{(\text{я})})]\vec{n}_{\text{я}}dS_{\text{я}};\tag{34}$$

$$F_{\text{м}}=-\int\limits_{S_3}\rho_{\text{м}}\nabla U_0^{(e)}\vec{n}_3dS+\int\limits_{S_{\text{м}}}[\rho_{\text{м}}\nabla U_0^{(e)}-\rho_{\text{ж}}(\nabla U_0^{(e)}\cdot\nabla\vec{\varphi}^{(\text{м})})]\vec{n}_{\text{м}}dS;\tag{35}$$

$$F_{\text{мя}}=-\int\limits_{S_{\text{м}}}\rho_{\text{ж}}(\nabla U_0^{(e)}\cdot\nabla\vec{\varphi}^{(\text{я})})\vec{n}_{\text{м}}dS;\tag{36}$$

$$F_{\text{ям}}=-\int\limits_{S_{\text{я}}}\rho_{\text{ж}}(\nabla U_0^{(e)}\cdot\nabla\vec{\varphi}^{(\text{м})})\vec{n}_{\text{я}}dS.\tag{37}$$

Уравнения движения (33) — это уравнения малых движений структурно-неоднородной планеты, находящейся во внешнем гравитационном поле, и состоящей из твердого гравитирующего ядра, идеальной несжимаемой гравитирующей жидкости и твердой гравитирующей оболочки.

Свободные движения структурно-неоднородной планеты. Положив в уравнениях (33) $U_0^{(e)}(\bar{r},t)=U_{\text{э}}^{(e)}(\bar{r},t)=0$, получим

$$m\ddot{W}+K^2JW=0,$$

или

$$(M_{\text{м}} + M_{\text{пр}}^{\text{м}})\frac{d\vec{v}_{\text{м}}}{dt} - M_{\text{ям}}\frac{d\vec{v}_{\text{я}}}{dt} = g_w(M_{\text{я}} - M_{\text{я}}^*)(\vec{w}_{\text{я}} - \vec{w}_{\text{м}});$$

$$(M_{\text{я}} + M_{\text{пр}}^{\text{я}})\frac{d\vec{v}_{\text{я}}}{dt} - M_{\text{ям}}\frac{d\vec{v}_{\text{м}}}{dt} = g_w(M_{\text{я}} - M_{\text{я}}^*)(\vec{w}_{\text{м}} - \vec{w}_{\text{я}}).$$

Уравнения свободных движений системы ядро–жидкость–мантия имеют интеграл энергии

$$T + \varPi = \text{const},$$

где кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2}\left(M_{\text{м}} + M_{\text{я}}^*\frac{1}{q^3}\frac{2+q^3}{2(1-q^3)}\right)v_{\text{м}}^2 + \\ + \frac{1}{2}\left(M_{\text{я}} + M_{\text{я}}^*\frac{2q^3+1}{2(1-q^3)}\right)v_{\text{я}}^2 - -\left(\frac{3}{2}M_{\text{я}}^*\frac{1}{1-q^3}\right)\vec{v}_{\text{м}}\cdot\vec{v}_{\text{я}}, \quad q = \frac{a}{b};$$

потенциальная энергия

$$\varPi = \gamma\frac{M_{\text{я}}^*}{a^3}\left(M_{\text{я}} - M_{\text{я}}^*\right)\left(\vec{w}_{\text{я}} - \vec{w}_{\text{м}}\right)^2.$$

Из выражения для потенциальной энергии следует, что равновесие системы ядро–идеальная жидкость–оболочка неустойчивое. Равновесие системы является безразличным, так как не нарушается при любом смещении ядра или оболочки, таком, что $w_{\text{я}} - w_o = 0$.

Сложив левые и правые части уравнений движения, получим интеграл сохранения количества движения рассматриваемой системы

$$\left(M_{\text{м}} + M_{\text{м}}^*\right)\vec{v}_{\text{м}} + \left(M_{\text{я}} - M_{\text{я}}^*\right)\vec{v}_{\text{я}} = \text{const}.$$

Умножив первое уравнение системы (33) на $\vec{w}_{\text{м}}$, а второе на $\vec{w}_{\text{я}}$, получим интеграл момента количества движения

$$m_{\text{м}}(\vec{v}_{\text{м}} \times \vec{w}_{\text{м}}) + m_{\text{я}}(\vec{v}_{\text{я}} \times \vec{w}_{\text{я}}) - M_{\text{ям}}(\vec{v}_{\text{м}} \times \vec{w}_{\text{я}} + \vec{v}_{\text{я}} \times \vec{w}_{\text{м}}) = \text{const},$$

который для одномерного случая может быть записан в виде

$$R_{\text{м}}\omega_{\text{м}}(m_{\text{м}}R_{\text{м}} - M_{\text{ям}}R_{\text{я}}) + R_{\text{я}}\omega_{\text{я}}(m_{\text{я}}R_{\text{я}} - M_{\text{ям}}R_{\text{м}}) = \text{const},$$

где $R_{\text{м}}$, $R_{\text{я}}$ — радиусы центров масс оболочки-мантии и ядра; $\omega_{\text{м}}$, $\omega_{\text{я}}$ — частоты циклических движений центров масс оболочки-мантии и ядра.

Если в начальный момент скорость центра масс системы равна нулю, то для любого момента времени закон сохранения количества движения системы имеет вид

$$\left(M_{\text{м}} + \frac{4}{3}\pi b^3\rho_{\text{ж}}\right)\vec{w}_{\text{м}} + \left(M_{\text{я}} - \frac{4}{3}\pi a^3\rho_{\text{ж}}\right)\vec{w}_{\text{я}} = \text{const}.$$

Определение собственной частоты свободных колебаний системы. Полагая $w_я$ и $w_о$ пропорциональными $e^{i\omega t}$ и принимая во внимание закон сохранения центра масс системы, получаем собственные частоты:

$$\omega_1^2 = 0;$$
$$\omega_2^2 = 2B\frac{(\bar\rho - 1)\left[1 + mq^3 + (\bar\rho - 1)\,q^3\right](1 - q^3)}{\left[2mq^3\,(1 - q^3) + 2 + q^3\right](\bar\rho - 1) + 3\,(1 + mq^3)},$$

где $m = \dfrac{M_м}{M_я^*} = \dfrac{\rho_м\,(c^3 - b^3)}{\rho_я a^3}$; $\bar\rho = \dfrac{\rho_я}{\rho_ж}$; $B = \dfrac{4}{3}\pi\gamma\rho_ж$, c — радиус внешней поверхности оболочки.

Выбрав обобщенные координаты $\vec\theta_1 = \vec w_я - \vec w_м$, $\vec\theta_2 = \vec w_с$, можно показать, что собственным частотам отвечает свободное движение механической системы, представляющее собой гармоническое колебание, при котором ядро и оболочка сближаются и удаляются друг от друга, накладываемое на равномерные движения их центров масс.

Парциальные частоты системы. Парциальными частотами будем называть частоты колебаний механической системы, получаемые при наложении дополнительной связи на одну из подсистем.

Пусть оболочка (мантия) будет неподвижна. В этом случае парциальная частота колебаний ядра в неподвижной оболочке совпадает с частотой Буссе–Шлихтера [7, 8]

$$\omega_я^2 = 2B\frac{(\bar\rho - 1)\,(1 - q^3)}{2\bar\rho\,(1 - q^3) + 2q^3 + 1}.$$

Пусть ядро неподвижно, а оболочка может совершать свободные колебания. Квадрат частоты этих колебаний определяется формулой

$$\omega_м^2 = 2Bq^3\frac{(\bar\rho - 1)\,(1 - q^3)}{2mq^3\,(1 - q^3) + 2 + q^3}.$$

Полученное значение частоты свободных колебаний системы ядро–жидкость–оболочка может быть проверено сравнением с известными результатами. Для этого в выражении для квадрата собственной частоты положим $M_м = 0$, ($m = 0$). Это соответствует задаче о колебаниях твердого ядра и сферического слоя жидкости, окружающего это ядро. При $m = 0$ из общей формулы для ω_2^2 имеем

$$\omega_2^2 = 2B\frac{(\bar\rho - 1)\left[1 + (\bar\rho - 1)\,q^3\right](1 - q^3)}{(2 + q^3)\,(\bar\rho - 1) + 3},$$

что совпадает с выражением для квадрата частоты колебаний системы ядро–жидкость, если жидкость перемещается как единое целое без изменения формы свободной поверхности [11, с. 267]. Если рассматривать колебания жидкости относительно неподвижного ядра, то из формулы для парциальной частоты оболочки относительно неподвижного ядра получаем результат Г. Ламба [12, с. 567], отвечающий основному тону колебаний сферического океана относительного неподвижного земного шара

$$\omega_{\text{л}}^2 = 2\frac{1-q^3}{2+q^3}\left(1-\frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho_\sigma}\right)\frac{g}{b},$$

где $g = \dfrac{4}{3}\pi\gamma b\rho_\sigma$; $\rho_\sigma = \dfrac{1}{b^3}\left(\rho_{\text{я}}a^3 + \rho_{\text{ж}}\left(b^3 - a^3\right)\right)$ — средняя плотность ядра и жидкости

Полагая $b = a + h$, где h — толщина слоя жидкости, и считая h малой величиной, получаем формулу Лапласа

$$\omega^2 = 2\left(1-\frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho_\sigma}\right)\frac{gh}{b^2}.$$

Численные оценки для Земли. Подставив значения радиусов внешней поверхности оболочки ($c = 6370$ км), внешнего и внутреннего ядер ($b = 3485$ км, $a = 1215$ км), средние значения их плотностей ($\rho_{\text{м}} = 4{,}54$ кг/м^3, $\rho_{\text{ж}} = 10{,}9$ кг/м^3, $\rho_{\text{я}} = 12{,}9$ кг/м^3), получим собственную частоту колебаний системы ядро–жидкость–мантия $\omega_2 = 5{,}04\cdot 10^{-4}$ с$^{-1}$ ($T_2 = 3{,}46$ ч); парциальную частоту колебаний ядра в неподвижной оболочке $\omega_{\text{я}} = 5{,}64\cdot 10^{-4}$ с$^{-1}$ ($T_{\text{я}} = 3{,}09$ ч); парциальную частоту колебаний оболочки относительно неподвижного ядра $\omega_{\text{м}} = 8{,}65\cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$ ($T_{\text{м}} = 20{,}17$ ч); отношение смещений центров масс ядра и оболочки-мантии $\dfrac{w_{\text{я}}}{w_{\text{м}}} = \dfrac{M_{\text{м}} + M_{\text{м}}^*}{M_{\text{я}} - M_{\text{я}}^*} = 394{,}7$.

Авторы благодарят д-ра физ.-мат. наук Ю.В. Баркина за плодотворные дискуссии и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. S l i c h t e r L. B. The fundamental free mode of the Earth's inner core // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1961. – Vol. 47. – P. 186–190.
2. А в с ю к Ю. Н. О движении внутреннего ядра Земли // ДАН СССР. – 1973. – Т. 212, № 5. – С. 1103–1104.
3. М о н и н А. С. О внутреннем вращении Земли // ДАН СССР. – 1973. – Т. 211, № 5. – С. 1097–1100.
4. У и п л Ф. Л. Семья Солнца. – М.: Мир, 1984. – 313 с.
5. Г е в л и ч А. Л., Т е м н о в А. Н. Свободные движения структурно-неоднородной Земли // Тез. докл. 5-й Международ. конф. "Новые идеи в науках о Земле". – 2001. – Т. 1. – С. 24.
6. М о и с е е в Н. Н., Р у м я н ц е в В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. – М.: Наука, 1965. – 440 с.
7. Б а р к и н Ю. В. К динамике твердого ядра // Тр. Гос. астрон. ин-та им. П.К. Штернберга. – Т. LXV, 1996. – С. 107–129.
8. П а с ы н о к С. Л. О полярных колебаниях внутреннего ядра Земли в поле сил тяжести и гидростатического давления / Тр. Гос. астрон. ин-та им. П.К. Штернберга. – Т. LXV, 1996. – С. 130–135.

9. К о п а ч е в с к и й Н. Д. Операторные методы в линейной гидродинамике. – М.: Наука, 1989. – 400 с.
10. К о к с Д ж. Теория звездных пульсаций. – М.: Мир, 1983. – 326 с.
11. Г и д р о м е х а н и к а невесомости / КопачевскийН.Д. и др. – М.: Наука, 1976. – 267 с.
12. Л а м б Г. Гидродинамика. – М.: ГИТТЛ, 1947. – 928 с.

Статья поступила в редакцию 25.06.2008

Александр Николаевич Темнов родился в 1945 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1971 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Космические аппараты и ракеты-носители” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор свыше 20 научных работ в области механики жидкости и газа и ракетно-космической технологии.

A.N. Temnov (b. 1945) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1971. Ph. D. (Phys.-Math.), assoc. professor of “Spacecrafts and Boosters” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 20 publications in the field of mechanics of liquids and gases and rocket and space technology.

Александр Львович Гевлич родился в 1970 г, окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 1994 г. Менеджер компании “Форс-Банковские системы”.

A.L. Gevlich (b. 1970) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 1994. Manager of company “Fors-Bankovskie sistemy”.