УДК 517.925.42

А. Н. Канатников

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ В ЗАДАЧЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ ИНВАРИАНТНЫХ КОМПАКТОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрено применение метода локализации инвариантных компактных множеств автономной динамической системы для исследования динамических систем высокой размерности. Предложены методы компьютерной алгебры для решения типовых задач локализации: вычисления производной в силу системы, анализа степени полиномиальной функции, исследования квадратичной функции на положительную определенность и т.п. Эти методы использованы для исследования пятимерной системы Лоренца. Получено семейство локализирующих множеств эллиптического типа.

В поведении динамической системы важную роль играют инвариантные компактные множества, среди которых — точки покоя, циклы, инвариантные торы, аттракторы. Выявлению инвариантных компактных множеств, в первую очередь аттракторов, посвящено большое число работ (например, [1–3]).

Один из методов оценки положения инвариантных компактных множеств предложен А.П. Крищенко [4, 5]. Этот метод среди других выделяется тем, что практически не использует геометрических соображений и сводится к алгебраическим вычислениям. Суть его в следующем.

Для автономной динамической системы $\dot{x} = f(x)$ выбирается какая-либо гладкая функция φ (локализирующая функция), определенная на фазовом пространстве M динамической системы, вычисляется ее производная $L_f\varphi$ в силу системы (производная Ли по векторному полю, соответствующему динамической системе) и строится множество

$$S_\varphi = \{x \in M\colon L_f\varphi(x) = 0\}$$

(универсальное сечение).

Пусть $\varphi_{\inf}$ и $\varphi_{\sup}$ — точная нижняя и точная верхняя грани функции φ на множестве S_φ. Тогда все инвариантные компакты динамической системы содержатся в множестве

$$\Omega_\varphi = \{x \in M\colon \varphi_{\inf} \le \varphi(x) \le \varphi_{\sup}\}.$$

Основная проблема в использовании метода А.П. Крищенко состоит в выборе локализирующих функций. Трудно добиться хорошего результата, используя только одну функцию. Желательно выбирать некоторое семейство функций. Кроме того, все вычисления в этом методе носят аналитический характер. При неудачном выборе локализирующей функции φ задача нахождения точной верхней и точной нижней граней этой функции на универсальном сечении может не иметь аналитического решения. Эти трудности ограничивают возможности метода.

Но даже если экстремальная задача и имеет аналитическое решение, поиск этого решения затрудняется в случае динамических систем высокой (больше 3) размерности.

Исследование некоторых общеизвестных динамических систем — системы Лоренца, системы Ланфорда, ПРТ-системы — выявило некоторые типовые приемы выбора локализирующих функций и их исследования. Эти приемы можно реализовать с помощью компьютера, привлекая ту или иную систему компьютерной алгебры. В результате можно решать задачи, которые в принципе имеют аналитическое решение, но это решение технически трудно реализуемо.

В данной работе описываются некоторые приемы исследования полиномиальных систем с помощью системы компьютерной алгебры Maple. Разработанная библиотека функций была использована для исследования пятимерной системы Лоренца.

Функции Maple для выполнения типовых операций. Рассматриваются динамические системы полиномиального типа, т.е. системы, описываемые системой дифференциальных уравнений, правые части которых представляют собой полиномы от переменных состояния. Для решения задач локализации инвариантных компактных множеств динамических систем разработана библиотека из нескольких функций Maple. Эта библиотека использует некоторые функции пакета LinearAlgebra и базируется на стандартных типах данных Vector и Matrix.

Для вычисления производной заданной функции в силу системы (производной Ли в силу системы) используется функция DiffLee. Ей передаются: вектор правых частей динамической системы; функция, для которой вычисляется производная в силу системы; вектор переменных заданной функции (необязательный параметр). Функция DiffLee возвращает вычисленную производную.

Для формирования квадратичной локализирующей функции предназначена функция GetLocFun. Ей передается число переменных (размерность динамической системы), она возвращает алгебраическое выражение, в котором переменными являются координаты вектора x. Можно также использовать функцию GetLocFun в специальном режиме, передавая ей матрицу квадратичной формы и вектор коэффициентов линейной формы.

Среди квадратичных функций интерес представляют те, для которых производная в силу системы тоже является квадратичной функцией. В этом случае универсальное сечение представляет собой поверхность второго порядка, а свойства таких поверхностей хорошо изучены. Чтобы получить уравнения на коэффициенты квадратичной функции, при выполнении которых производная в силу системы есть квадратичная функция, используется функция GetCubeConds. Ей передается вектор правых частей динамической системы. Функция GetCubeConds генерирует с помощью функции GetLocFun локализирующую квадратичную функцию общего вида, вычисляет производную этой функции в силу системы и формирует систему уравнений на коэффициенты, при выполнении которых производная является квадратичной функцией.

Функция PosKFConds используется для исследования производной квадратичной функции на положительную определенность. Входными данными функции являются вектор правых частей системы и матрица квадратичной формы локализирующей функции. Функция PosKFConds формирует локализирующую функцию с заданной матрицей квадратичной формы и линейной частью общего вида, вычисляет ее производную в силу системы и записывает условия положительной определенности производной в соответствии с критерием Сильвестра. Функция PosKFConds не проверяет, является ли производная локализирующей функции квадратичной. В качестве квадратичной формы производной выбирается матрица Гессе, вычисленная при нулевых значениях переменных.

Библиотека функций оформлена как файл формата MPL. Это текстовый файл, который вводится в документ Maple с помощью функции Read. Выбор формата MPL обусловлен тем, что MPL-файл, являясь текстовым, не зависит от версии системы Maple и легко подключается к любой программе Maple.

Исследование с помощью Maple пятимерной системы Лоренца. Разработанная библиотека функций Maple использована при исследовании пятимерной системы [6]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\sigma x_1 + \sigma y_1; \\ \dot{x}_2 = -\sigma x_2 - \sigma y_2; \\ \dot{y}_1 = \rho x_1 - x_1 z - y_1; \\ \dot{y}_2 = -\rho x_2 + x_2 z - y_2; \\ \dot{z} = x_1 y_1 - x_2 y_2 - \beta z, \end{cases} \tag{1}$$

описывающей конвекцию Релея–Бенара (Rayleigh–Bénard). Система (1) является пятимерным аналогом известной трехмерной системы

Лоренца. В системе (1) все три параметра предполагаются положительными.

Система (1) содержит решения трехмерной системы Лоренца, например в виде $(x_1(t); 0; y_1(t); 0; z(t))^{\mathrm{T}}$. Поэтому в ней имеется хаотическое поведение. Кроме того, система (1) — полиномиальная, причем степени правых частей не превышают 2. Рассмотрим несколько вопросов:

1. При каких условиях квадратичная функция φ имеет производную D_φ в силу системы, которая тоже является квадратичной функцией?

2. При каких условиях производная D_φ не только является квадратичной, но и имеет квадратичную форму канонического вида?

3. Каковы условия, при которых производная D_φ имеет положительно определенную квадратичную форму?

Ответы на эти вопросы позволят выделить одно или несколько семейств функций φ_q, для которых можно построить локализирующее множество. Далее речь пойдет об исследовании конкретных семейств.

Производная квадратичной функции как квадратичная функция. Рассмотрим квадратичную функцию общего вида*:

$$\varphi(x) = x^{\mathrm{T}}Ax + 2Bx,$$

где A — симметричная матрица 5-го порядка; B — матрица-строка, содержащая коэффициенты линейной формы.

Поскольку правые части системы дифференциальных уравнений (1) являются квадратичными функциями, производная D_φ в силу системы представляет собой в общем случае многочлен 3-й степени. Используя функцию GetCubeConds, получим систему уравнений на коэффициенты функции φ, при выполнении которых функция D_φ будет квадратичной:

$$\begin{aligned} &a_{15} = 0, \quad a_{13} = 0, \quad a_{25} = 0, \quad a_{14} = a_{23}, \quad a_{35} = 0, \\ &a_{45} = 0, \quad a_{33} = a_{55}, \quad a_{34} = 0, \quad a_{24} = 0, \quad a_{44} = a_{55}. \end{aligned}$$

Из этих соотношений вытекает, что функция D_φ будет квадратичной тогда и только тогда, когда матрица A имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & p & 0 \\ a_{12} & a_{22} & p & 0 & 0 \\ 0 & p & q & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Как видим, условие квадратичности производной оставляет свободными всего 6 параметров (вместо 15 исходных). Сюда нужно добавить

*Свободный член в данном случае можно опустить.

еще 5 параметров линейной формы. В силу однородной зависимости от параметров можно сократить число параметров до 10.

Канонический вид производной квадратичной функции. Рассмотрим квадратичную функцию φ, у которой квадратичная форма имеет матрицу A вида (2). Производная D_φ функции φ в силу системы (1) является квадратичной функцией. С помощью компьютерной алгебры вычисляем матрицу квадратичной формы функции D_φ как матрицу Гессе, умноженную на коэффициент $1/2$. В результате получаем следующую матрицу H, отличающуюся от матрицы квадратичной формы знаком:

$$\begin{pmatrix} 2a_{11}\sigma & 2a_{12}\sigma & -b_5-a_{11}\sigma-q\rho & p+p\sigma+a_{12}\sigma & b_3 \\ 2a_{12}\sigma & 2a_{22}\sigma & p-a_{12}\sigma+p\sigma & b_5+a_{22}\sigma+q\rho & -b_4 \\ -b_5-a_{11}\sigma-q\rho & p-a_{12}\sigma+p\sigma & 2q & 0 & 0 \\ p+p\sigma+a_{12}\sigma & b_5+a_{22}\sigma+q\rho & 0 & 2q & 0 \\ b_3 & -b_4 & 0 & 0 & 2q\beta \end{pmatrix}.$$

Отметим, что по матрице H можно судить об условиях, при которых функция D_φ имеет знакоопределенную квадратичную форму. Например, необходимым условием положительной определенности является неравенство $q < 0$. Это вытекает из критерия Сильвестра, но угловые миноры выбирать надо не сверху, а снизу. Первые три минора дают элементарные условия, а два последних приводят к сложным неравенствам.

Из вида матрицы H получаем условия, при которых квадратичная форма функции D_φ имеет канонический вид, т.е. условия диагональности матрицы H:

$$b_3 = b_4 = 0, \quad p = 0, \quad a_{12} = 0, \quad a_{11} = a_{22}, \quad b_5 = -a_{11}\sigma - q\rho.$$

Полагая $a_{11} = a_{22} = k$, можем записать вид функции φ, для которой квадратичная форма ее производной D_φ в силу системы имеет диагональный вид:

$$\varphi = k(x_1^2 + x_2^2) + q(y_1^2 + y_2^2 + z^2) + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 - 2(k\sigma + q\rho)z. \quad (3)$$

При этом

$$-\frac{1}{2}D_\varphi = k\sigma(x_1^2 + x_2^2) + \sigma(b_1x_1 + b_2x_2) + q(y_1^2 + y_2^2) - \\ - \sigma b_1y_1 + \sigma b_2y_2 + q\beta z^2 - \beta(k\sigma + q\rho)z.$$

Семейства локализирующих функций. Семейство (3) определяется четырьмя параметрами: k, q, b_1, b_2. Здесь выделяется эллиптический случай $k > 0$, $q > 0$ (или $k < 0$, $q < 0$, что не дает ничего нового), когда и сама функция φ, и ее производная D_φ в силу системы являются знакоопределенными. При этом поиск экстремальных значений функции φ на множестве S_φ, которое описывается уравнением $D_\varphi = 0$, сводится к вычислению условных локальных экстремумов на компактном множестве. Тогда можно считать, что $k = 1$, и остановиться на функции

$$\varphi = (x_1^2 + x_2^2) + q(y_1^2 + y_2^2 + z^2) + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 - 2(\sigma + q\rho)z.$$

Интересен также цилиндрический случай $k = 0$, $q \neq 0$ и $k \neq 0$, $q = 0$. При $k = q = 0$ имеем случай линейной локализирующей функции.

Гиперболический случай ($k > 0$, $q < 0$) сложен для исследования, поскольку функция φ не является выпуклой, а поверхность универсального сечения — компактной.

Исследование системы в эллиптическом случае. Рассмотрим следующую функцию, отличающуюся от функции вида (3) постоянным слагаемым:

$$\varphi = (x_1 + b_1)^2 + (x_2 + b_2)^2 + q(y_1^2 + y_2^2) + q\Big(z - \frac{\sigma}{q} - \rho\Big)^2.$$

Тогда

$$-\frac{1}{2}D_\varphi = \sigma\Big(x_1 + \frac{b_1}{2}\Big)^2 + \sigma\Big(x_2 + \frac{b_2}{2}\Big)^2 + q\Big(y_1 - \frac{\sigma b_1}{2q}\Big)^2 + \\ + q\Big(y_2 + \frac{\sigma b_2}{2q}\Big)^2 + \beta q\Big(z - \frac{\sigma + q\rho}{2q}\Big)^2 - R^2,$$

где

$$R^2 = \frac{\sigma}{4}(b_1^2 + b_2^2) + \frac{\sigma^2}{4q}(b_1^2 + b_2^2) + \frac{\beta}{4q}(\sigma + q\rho)^2. \tag{4}$$

В результате получаем задачу

$$(x_1 + b_1)^2 + (x_2 + b_2)^2 + q(y_1^2 + y_2^2) + q\Big(z - \frac{\sigma}{q} - \rho\Big)^2 \to \mathrm{extr};$$

$$\sigma\Big(x_1 + \frac{b_1}{2}\Big)^2 + \sigma\Big(x_2 + \frac{b_2}{2}\Big)^2 + q\Big(y_1 - \frac{\sigma b_1}{2q}\Big)^2 + \\ + q\Big(y_2 + \frac{\sigma b_2}{2q}\Big)^2 + \beta q\Big(z - \frac{\sigma + q\rho}{2q}\Big)^2 = R^2.$$

Выполним замену переменных: $X_1 = x + b_1$, $X_2 = x + b_2$, $Y_1 = \sqrt{q}y_1$, $Y_2 = \sqrt{q}y_2$, $Z = \sqrt{q}\Big(z - \dfrac{\sigma + q\rho}{2\sqrt{q}}\Big)$. Получим следующую задачу:

$$X_1^2 + X_2^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + Z^2 \to \mathrm{extr};$$

$$\sigma\Big(X_1 - \frac{b_1}{2}\Big)^2 + \sigma\Big(X_2 - \frac{b_2}{2}\Big)^2 + \Big(Y_1 - \frac{\sigma b_1}{2\sqrt{q}}\Big)^2 + \\ + \Big(Y_2 + \frac{\sigma b_2}{2\sqrt{q}}\Big)^2 + \beta\Big(Z + \frac{\sigma + q\rho}{2\sqrt{q}}\Big)^2 = R^2.$$

У целевой функции очевидна точка минимума $X_1 = X_2 = Y_1 = Y_2 = Z = 0$; этот минимум — глобальный. Полагая, что максимальное значение целевой функции при заданной связи есть $M = M(b_1, b_2, q)$, получим локализирующее множество $\Omega(b_1, b_2, q)$, описываемое неравенством

$$(x_1 + b_1)^2 + (x_2 + b_2)^2 + q(y_1^2 + y_2^2) + q\Big(z - \frac{\sigma}{q} - \rho\Big)^2 \le M(b_1, b_2, q)$$

и представляющее собой множество, ограниченное четырехмерным эллипсоидом. Так как пересечение локализирующих множеств также является локализирующим множеством, можно перейти к пересечению трехпараметрического семейства:

$$\Omega = \bigcap_{b_1, b_2, q} \Omega(b_1, b_2, q), \quad b_1,\, b_2 \in (-\infty,\, \infty), \quad q \in (0,\, \infty).$$

Остановимся на частном случае $b_1 = b_2 = 0$. Тогда имеем задачу

$$\begin{aligned}&X_1^2 + X_2^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + Z^2 \to \mathrm{extr};\\ &\sigma X_1^2 + \sigma X_2^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + \beta\Big(Z + \frac{\sigma + q\rho}{2\sqrt{q}}\Big)^2 = R^2.\end{aligned}$$

В этой задаче заменой переменных $U^2 = X_1^2 + X_2^2$, $V^2 = Y_1^2 + Y_2^2$ переходим к трехмерной задаче

$$\begin{aligned}&U^2 + V^2 + Z^2 \to \mathrm{extr};\\ &\sigma U^2 + V^2 + \beta\Big(Z + \frac{\sigma + q\rho}{2\sqrt{q}}\Big)^2 = R^2.\end{aligned}$$

Полагаем $d = \dfrac{\sigma + q\rho}{2\sqrt{q}}$, отмечая при этом, что $d \ge \sqrt{\sigma\rho}$. Свободный параметр q мы можем заменить новым параметром d. Кроме того, учтем, что согласно (4) $R^2 = \beta d^2$ (поскольку $b_1 = b_2 = 0$). Получаем задачу на условный экстремум:

$$\begin{aligned}&F = U^2 + V^2 + Z^2 \to \mathrm{extr};\\ &\sigma U^2 + V^2 + \beta(Z + d)^2 = \beta d^2.\end{aligned} \tag{5}$$

Задачу (5) можно решать методом Лагранжа. Составив функцию Лагранжа

$$L(U, V, Z; \lambda) = U^2 + V^2 + Z^2 + \lambda(\sigma U^2 + V^2 + \beta(Z + d)^2 - \beta d^2)$$

и записывая необходимые условия экстремума, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (1+\lambda\sigma)U = 0; \\ (1+\lambda)V = 0; \\ (1+\lambda\beta)Z + \lambda\beta d = 0; \\ \sigma U^2 + V^2 + \beta(Z+d)^2 = \beta d^2. \end{cases}$$

Очевидные решения системы $U = V = Z = 0$, $\lambda = 0$ и $U = V = 0$, $Z = -2d$, $\lambda = -2/\beta$ дают глобальный минимум $F_1 = 0$ целевой функции и значение $F_2 = 4d^2$. Вариант $\lambda = -1$ (из второго уравнения) возможен при $\beta \geq 2$ и дает третье значение $F_3 = \dfrac{\beta^2 d^2}{\beta - 1}$ целевой функции в точках $U = 0$, $V = \pm\dfrac{\beta d}{\beta - 1}\sqrt{\beta - 2}$, $Z = -\dfrac{\beta d}{\beta - 1}$. Отметим, что при $\beta \geq 2$ выполняется неравенство $\dfrac{\beta^2 d^2}{\beta - 1} \geq 4d^2$. Наконец, вариант $\lambda = -1/\sigma$ реализуется при $\beta \geq 2\sigma$ и дает четвертое значение $F_4 = \dfrac{\beta^2 d^2}{\sigma(\beta - \sigma)}$, причем $F_4 \geq 4d^2$ при $\beta \geq 2\sigma$.

Итак, максимум функции φ на универсальном сечении есть одно из значений $F_2 = 4d^2$, $F_3 = \dfrac{\beta^2 d^2}{\beta - 1}$, $F_4 = \dfrac{\beta^2 d^2}{\sigma(\beta - \sigma)}$ в зависимости от взаимного расположения трех значений: 1, σ и $\beta/2$. На рис. 1 показана область изменения параметров β, σ, разделенная на три подобласти в соответствии с тем, какое из трех значений дает максимум функции φ. Исходя из рис. 1, можно записать, что $\varphi_{\sup} = K_{\beta\sigma}\dfrac{(\sigma + q\rho)^2}{q}$, где

$$K_{\beta\sigma} = \begin{cases} 1, & \beta \leq 2\sigma, \quad \beta \leq 2; \\ \dfrac{\beta^2}{4(\beta - 1)}, & \beta > 2, \quad \sigma > 1; \\ \dfrac{\beta^2}{4\sigma(\beta - \sigma)}, & \beta > 2\sigma, \quad \sigma \leq 1. \end{cases} \tag{6}$$

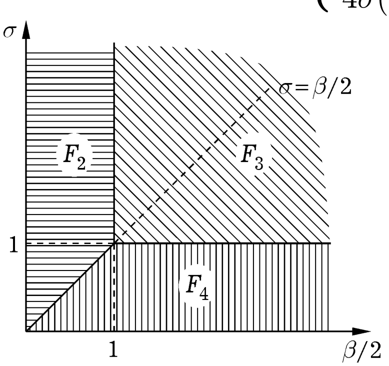

Рис. 1. Область изменения параметров системы, обеспечивающих максимум целевой функции φ

Мы имеем однопараметрическое семейство локализирующих множеств $\Omega_1(q) = \Omega(0, 0, q)$, $q > 0$, описываемое неравенством

$$x_1^2 + x_2^2 + qy_1^2 + qy_2^2 + \\ + q\Big(z - \frac{\sigma + q\rho}{q}\Big)^2 \leq K_{\beta\sigma}\frac{(\sigma + q\rho)^2}{q}.$$

Найдем пересечение этого семейства.

Умножим неравенство на q и запишем в виде $Aq^2 + Bq + C \geq 0$:

$$\left[K_{\beta\sigma}\rho^2 - y_1^2 - y_2^2 - (z-\rho)^2\right]q^2 + \\ + \left[2K_{\beta\sigma}\sigma\rho - x_1^2 - x_2^2 + 2\sigma(z-\rho)\right]q + (K_{\beta\sigma}-1)\sigma^2 \geq 0.$$

Здесь

$$A = K_{\beta\sigma}\rho^2 - y_1^2 - y_2^2 - (z-\rho)^2;$$
$$B = 2K_{\beta\sigma}\sigma\rho - x_1^2 - x_2^2 + 2\sigma(z-\rho);$$
$$C = (K_{\beta\sigma}-1)\sigma^2.$$

Для того чтобы неравенство $Aq^2 + Bq + C \geq 0$ выполнялось для любого значения $q > 0$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты A, B, C удовлетворяли неравенствам $A \geq 0$, $C \geq 0$, $B \geq -\sqrt{4AC}$. Видно, что неравенство $C \geq 0 \Leftrightarrow K_{\beta\sigma} \geq 1$ выполняется всегда. В результате получаем систему неравенств

$$\begin{cases} y_1^2 + y_2^2 + (z-\rho)^2 \leq K_{\beta\sigma}\rho^2; \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 2\sigma z + 2C_{\beta\sigma}\sigma\rho + 2\sigma\sqrt{C_{\beta\sigma}\left[K_{\beta\sigma}\rho^2 - y_1^2 - y_2^2 - (z-\rho)^2\right]}, \end{cases}$$

где $C_{\beta\sigma} = K_{\beta\sigma} - 1$.

Исследование системы в цилиндрическом случае. В общем виде (3) локализирующей функции положим $q = 0$, $k = 1$. Получим:

$$\varphi = x_1^2 + x_2^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 - 2\sigma z. \tag{7}$$

При этом

$$-\frac{1}{2}D_\varphi = \sigma(x_1^2 + x_2^2) + \sigma(b_1x_1 + b_2x_2) - \sigma b_1y_1 + \sigma b_2y_2 - \beta\sigma z.$$

Получаем задачу

$$x_1^2 + x_2^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 - 2\sigma z \to \text{extr};$$
$$x_1^2 + x_2^2 + b_1x_1 + b_2x_2 - b_1y_1 + b_2y_2 - \beta z = 0.$$

Из уравнения связи выражаем z и подставляем в целевую функцию:

$$x_1^2 + x_2^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 - \frac{2\sigma}{\beta}\left(x_1^2 + x_2^2 + b_1x_1 + b_2x_2 - b_1y_1 + b_2y_2\right) \to \text{extr};$$

Переменные x_1, x_2, y_1, y_2 могут варьироваться свободно, поскольку условие связи может быть обеспечено соответствующим выбором z.

Для $b_1 = b_2 = 0$ получаем $\varphi_{\inf} = 0$ и $\varphi_{\sup} = +\infty$ при $\beta > 2\sigma$ и $\varphi_{\sup} = 0$ и $\varphi_{\inf} = -\infty$ при $\beta < 2\sigma$. Это приводит к локализирующему множеству Ω_2, которое описывается неравенством $x_1^2 + x_2^2 \geq 2\sigma z$ при $\beta > 2\sigma$ и неравенством $x_1^2 + x_2^2 \leq 2\sigma z$ при $\beta < 2\sigma$. Особо выделим случай $\beta = 2\sigma$, когда все инвариантные компакты лежат на поверхности $x_1^2 + x_2^2 = 2\sigma z$.

Если один из параметров b_1, b_2 отличен от нуля, целевая функция линейно зависит от y_1 и/или y_2. Следовательно, $\varphi_{\text{inf}} = -\infty$, $\varphi_{\text{sup}} = \infty$. Содержательного локализирующего множества в этом случае нет.

В общем виде (3) локализирующей функции положим $q = 1$, $k = 0$. Получим

$$\varphi = y_1^2 + y_2^2 + z^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 - 2\rho z. \tag{8}$$

При этом

$$-\frac{1}{2}D_\varphi = \sigma(b_1x_1 + b_2x_2) + y_1^2 + y_2^2 - \sigma b_1y_1 + \sigma b_2y_2 + \beta z^2 - \beta\rho z.$$

Приходим к задаче

$$\begin{aligned} &y_1^2 + y_2^2 + z^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 - 2\rho z \to \text{extr};\\ &\sigma(b_1x_1 + b_2x_2) + y_1^2 + y_2^2 - \sigma b_1y_1 + \sigma b_2y_2 + \beta z^2 - \beta\rho z = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Рассмотрим два случая. При $b_1 = b_2 = 0$ задача (9) сводится к следующей:

$$\begin{cases} y_1^2 + y_2^2 + z^2 - 2\rho z \to \text{extr};\\ y_1^2 + y_2^2 + \beta z^2 - \beta\rho z = 0. \end{cases}$$

Из уравнения связи этой задачи находим $y_1^2 + y_2^2$ и подставляем в целевую функцию:

$$\psi = (1-\beta)z^2 + \rho(\beta - 2)z.$$

Задача состоит в поиске наибольшего и наименьшего значения квадратного трехчлена ψ при условии, что $\rho z - z^2 \geq 0$. Это условие означает, что $0 \leq z \leq \rho$. Экстремальные значения могут достигаться на концах отрезка 0 и ρ, а также в точке $z = \dfrac{\rho(\beta-2)}{2(\beta-1)}$ локального экстремума, если она попадает в отрезок $[0,\, \rho]$, т.е. при $\beta \geq 2$. Отметим, что $\varphi \geq -\rho^2$, так что значение $-\rho^2$ является глобальным минимумом. В результате получаем локализирующее множество Ω_3, описываемое неравенством

$$y_1^2 + y_2^2 + (z-\rho)^2 \leq \rho^2 K_{\beta 1},$$

где $K_{\beta 1}$ — коэффициент, вычисляемый согласно соотношению (6) при $\sigma = 1$.

Во втором случае, при $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$ из уравнения связи выражаем $b_1x_1 + b_2x_2$ и подставляем в целевую функцию. Приходим к экстремальной задаче без ограничений на переменные:

$$\psi = y_1^2 + y_2^2 + z^2 + \frac{2}{\sigma}\big(-y_1^2 - y_2^2 + \sigma b_1y_1 - \sigma b_2y_2 - \beta z^2 + \beta\rho z\big) - 2\rho z \to \text{extr}\,.$$

Преобразуем целевую функцию:

$$\psi = \left(1 - \frac{2}{\sigma}\right)(y_1^2 + y_2^2) + \left(1 - \frac{2\beta}{\sigma}\right)z^2 + 2b_1y_1 - 2b_2y_2 + 2\rho\left(\frac{\beta}{\sigma} - 1\right)z.$$

Диапазон значений полученной квадратичной функции определяется ее квадратичной формой. Если знаки при квадратах переменных разные, т.е. если величина σ заключена между 2 и 2β, то диапазон значений функции — вся числовая ось и локализирующего множества нет. Если знаки одинаковые, то имеется точка экстремума.

При $\sigma > 2$, $\sigma > 2\beta$ выделением квадратов переменных находим минимум функции ψ:

$$\psi_{\min} = -\frac{\sigma(b_1^2 + b_2^2)}{\sigma - 2} - \frac{\rho^2(\beta - \sigma)^2}{\sigma(\sigma - 2\beta)}.$$

Это дает семейство локализирующих множеств $\Omega_4(b_1, b_2)$, описываемое неравенством

$$y_1^2 + y_2^2 + z^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 - 2\rho z \geq -\frac{\sigma(b_1^2 + b_2^2)}{\sigma - 2} - \frac{\rho^2(\sigma - \beta)^2}{\sigma(\sigma - 2\beta)}. \quad (10)$$

Чтобы найти пересечение Ω_4 семейства $\Omega_4(b_1, b_2)$, запишем неравенство (10) следующим образом:

$$\frac{\sigma(b_1^2 + b_2^2)}{\sigma - 2} + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + \\ + y_1^2 + y_2^2 + z^2 + \frac{\rho^2(\sigma - \beta)^2}{\sigma(\sigma - 2\beta)} - 2\rho z \geq 0. \quad (11)$$

Неравенство (11) выполняется для любых действительных b_1 и b_2, одновременно не обращающихся в нуль. Следовательно, минимальное значение левой части, являющейся квадратичной функцией переменных b_1 и b_2, тоже неотрицательно. Подсчеты дают

$$\left(1 - \frac{2}{\sigma}\right)(x_1^2 + x_2^2) \leq y_1^2 + y_2^2 + (z - \rho)^2 + \frac{\beta^2\rho^2}{\sigma(\sigma - 2\beta)}.$$

Аналогично проводим исследование при $\sigma < 2$, $\sigma < 2\beta$. В этом случае функция ψ имеет максимум, который можно найти выделением квадратов по переменным. Получаем семейство локализирующих множеств $\Omega_4(b_1, b_2)$, которое описывается неравенством

$$\frac{\sigma(b_1^2 + b_2^2)}{2 - \sigma} - 2b_1x_1 - 2b_2x_2 + \frac{\rho^2(\beta - \sigma)^2}{\sigma(2\beta - \sigma)} - y_1^2 - y_2^2 - z^2 + 2\rho z \geq 0.$$

Пересечение Ω_4 семейства $\Omega_4(b_1, b_2)$ для случая $\sigma < 2$, $\sigma < 2\beta$ описывается неравенством

$$\left(\frac{2}{\sigma} - 1\right)(x_1^2 + x_2^2) \leq \frac{\beta^2\rho^2}{\sigma(2\beta - \sigma)} - y_1^2 - y_2^2 - (z - \rho)^2.$$

Конечные результаты. Исследование системы (1) привело к нескольким локализирующим множествам, описанным в виде неравенств. Вид соответствующих неравенств зависит от значений трех параметров системы. Рассмотрим частный случай $\beta = 3$, $\sigma = 10$, $\rho = 30$. В этом случае выполняются неравенства $\beta < 2\sigma$, $\sigma > 2$, $\sigma > 2\beta$. Следовательно, локализирующее множество описывается системой неравенств

$$\begin{cases} y_1^2+y_2^2 + (z-\rho)^2 \le K_{\beta\sigma}\rho^2; \\ x_1^2+x_2^2 \le 2\sigma z+2C_{\beta\sigma}\sigma\rho+2\sigma\sqrt{C_{\beta\sigma}\left[K_{\beta\sigma}\rho^2-y_1^2-y_2^2-(z-\rho)^2\right]}; \\ x_1^2+x_2^2 \le 2\sigma z; \\ y_1^2+y_2^2 + (z-\rho)^2 \le K_{\beta 1}\rho^2; \\ x_1^2+x_2^2 \le \dfrac{\sigma}{\sigma-2}\left(y_1^2+y_2^2+(z-\rho)^2\right)+\dfrac{\beta^2\rho^2}{(\sigma-2)(\sigma-2\beta)}. \end{cases} \qquad (12)$$

Так как в данном случае $K_{\beta\sigma} = K_{\beta 1}$, первое и четвертое неравенства системы (12) совпадают. Третье неравенство включает второе, поскольку $C_{\beta\sigma} > 0$. Таким образом, число неравенств в системе (12) можно уменьшить:

$$\begin{cases} y_1^2+y_2^2 + (z-\rho)^2 \le K_{\beta\sigma}\rho^2; \\ x_1^2+x_2^2 \le f(y_1, y_2, z), \end{cases} \qquad (13)$$

где

$$f(y_1,y_2,z) = \min\left\{2\sigma z; \frac{\sigma}{\sigma-2}\left(y_1^2+y_2^2+(z-\rho)^2\right)+\frac{\beta^2\rho^2}{(\sigma-2)(\sigma-2\beta)}\right\}.$$

На рис. 2 в переменных $u = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$, $v = \sqrt{y_1^2+y_2^2}$, z показаны траектория системы с начальными условиями $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = y_1 = = y_2 = z = 0$ и локализирующее множество (13).

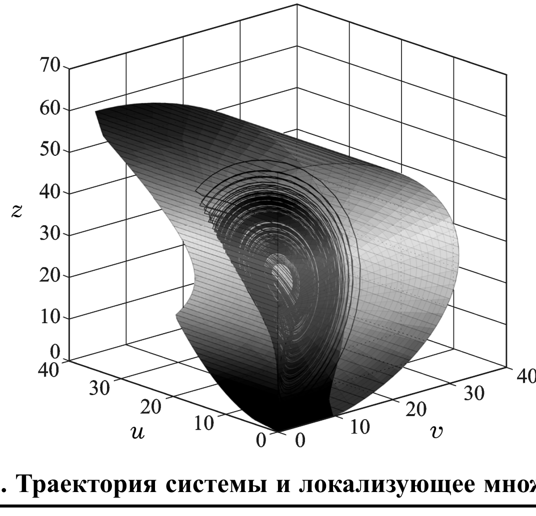

Рис. 2. Траектория системы и локализующее множество

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л е о н о в Г. А. Оценки аттракторов и существование гомоклинических орбит в системе Лоренца // Прикладная математика и механика. – 2001. – Т. 65. – № 1. – С. 21–35.
2. N e u k i r c h S. Integrals of motion and semipermeable surfaces to bound the amplitude of a plasma instability // Phys. Rev. E. – 2001. – V. 63.
3. G i a c o m i n i H., N e u k i r c h S. Integral of motion and the shape of the attractor for the Lorenz model // Phys. Letters A. – 1997. – V. 240. – P. 157–160.
4. К р и щ е н к о А. П. Локализация предельных циклов // Дифференциальные уравнения. – 1995. – № 11. – С. 1858–1865.
5. К р и щ е н к о А. П. Локализация инвариантных компактов динамических систем // Дифференциальные уравнения. – 2005. – № 12. – С. 1597–1604.
6. C h e n Z. - M., P r i c e W. G. On the relation between Rayleigh–Bénard convection and Lorenz system // Chaos, Solitons and Fractals. – 2006. – V. 28. – P. 571–578.

Статья поступила в редакцию 21.03.2008

Анатолий Николаевич Канатников родился в 1954 г., окончил в 1976 г. МГУ им. М.В. Ломоносова. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 40 научных работ в области теории функций, дифференциальных уравнений и информатики.

A.N. Kanatnikov (b. 1954) graduated from the Lomonosov Moscow State University in 1976. D. Sc. (Phys.-math.), assoc. professor of “Mathematical Modeling” department of the Bauman State Technical University. Author of 40 publications in the field of theory of functions, differential equations and information technology.