УДК 517.9:532

А. Н. Темнов, А. Л. Гевлич

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВЫНУЖДЕННЫЕ ДВИЖЕНИЯ ГРАВИТИРУЮЩЕГО ВЯЗКОГО ЯДРА ЗЕМЛИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРИТЯЖЕНИЯ ЛУНЫ И СОЛНЦА

Выведены уравнения движения ядра произвольной формы в вязкой несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса. Исследованы собственные колебания твердого сферического ядра в жидком вязком ядре в случаях неподвижной и вращающейся оболочки. Получены поправки к частотам собственных колебаний твердого ядра, вызванные гравитационным влиянием неоднородностей Земли. Получены аналитические формулы для частот и постоянного смещения твердого ядра вследствие внешних воздействий. Оценен вклад в указанные явления притяжения неоднородностей на границе ядро–мантия, неоднородностей тектонической оболочки Земли. Получены приближенные уравнения вынужденных движений твердого ядра во вращающейся полости; построено их приближенное решение и выполнены оценки возмущений в движении твердого ядра Земли под действием притяжения Луны и Солнца.

Рассматрваются поступательные относительные движения твердого ядра Земли в оболочке, которая предположительно представляет собой сферическую полость, заполненную вязкой гравитирующей жидкостью (жидкое ядро). Особенности вращательного движения твердого ядра, вызванные его несферичностью, в данной работе не обсуждаются. Отечественные исследования динамики трансляционных смещений твердого ядра были начаты Ю.Н. Авсюком и А.С. Мониным [1–3]. Ими были оценены периоды собственных колебаний сферического твердого ядра в жидком ядре Земли. Впервые уравнения поступательного движения внутреннего ядра в жидком ядре Земли были приведены Сличтером в работе [4] с целью объяснения 86-минутной моды, полученной в записях большого Чилийского землетрясения (22.05.1960). В более поздних работах [5–7] исследовалось влияние различных факторов — вязкой диссипации магнитных напряжений, вращения, омической диссипации — на движение внутреннего ядра.

Поступательно-вращательные движения твердого ядра, а именно относительные стационарные движения твердого ядра в поле тяготения несферичной вращающейся мантии, были исследованы Ю.В. Баркиным [8, 9]. В частности, было доказано существование эксцентричных стационарных движений системы, для которых центры масс ядра и мантии не совпадают, а их соответствующие главные оси инерции образуют друг с другом малые углы. Однако гидродинамические эффекты со стороны жидкого ядра в этих работах либо не рассматривались, либо учитывались формально. В работах [10, 11] исследовалось влияние внешних сил со стороны оболочек неоднородностей на движение ядра. При этом использовалось условие гидростатического равновесия, влияние вязкости оценивалось формулой Стокса. В настоящей работе вывод уравнений движения твердого ядра основан на строгих уравнениях гидродинамики и механики, а именно: на уравнениях движения вязкой несжимаемой гравитирующей жидкости и на теореме об изменении количества движения системы ядро–жидкость. Решение гидродинамической задачи опирается на метод пограничного слоя, разработанный Ф.Л. Черноусько [12] для рассматриваемого класса задач. Предполагается, что все внешние силы, действующие на систему ядро–жидкость, — потенциальные и характеризуются силовой функцией $U^{(e)}(x,t)$. Под внешним полем массовых сил понимаются гравитационные поля, обусловленные как действием внешних гравитирующих тел (Луна, Солнце), так и действием внешней, неоднородной и несферической оболочки (мантии), внутренний гравитационный потенциал которой не является постоянным. Отметим, что первые попытки исследования вынужденных колебаний твердого ядра Земли под действием притяжения Луны и Солнца были предприняты в работах Ю.Н. Авсюка [2] и Ю.В. Баркина [10, 13, 14]. Цель данной работы также состоит и в том, чтобы получить обоснованные уравнения возмущенного поступательного движения твердого ядра (при учете гидродинамического влияния жидкого ядра) и уточнить оценки возмущений, выполненные в указанных выше работах.

Постановка задачи. Рассмотрим твердое тело с полостью, заполненной вязкой несжимаемой гравитирующей жидкостью, внутри которой находится гравитирующее твердое ядро. Смачиваемые поверхности полости S_l и ядра S_r считаются произвольными, но удовлетворяющими необходимому для анализа условию гладкости. За невозмущенное движение системы принято состояние, при котором ядро находится в относительном покое под действием сил гравитации, инерции и давления жидкости. Отметим, что в общем случае в указанном невозмущенном положении тел системы их центры масс не совпадают.

Введем неинерциальную систему координат $Cx_1x_2x_3$, начало которой совпадает с центром масс невозмущенной системы ядро–жидкость, а оси скреплены с оболочкой. Будем предполагать, что в невозмущенном и возмущенном движениях ядро и оболочка имеют постоянную угловую скорость $\bar{\omega}$. Положение ядра в невозмущенном состоянии определим вектором $\bar{w}_0$, в возмущенном движении —

вектором $\bar{w}_r(t)$, а расположение частиц жидкости относительно невозмущенного состояния — полем смещения $\bar{w}(x,t)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$. Также считается, что в возмущенном движении ядро совершает только поступательное движение, а оболочка-мантия не имеет перемещений и вращается вокруг оси, совпадающей с вектором $\bar{\omega}$.

Для составления уравнений возмущенного движения ядра воспользуемся теоремой об изменении количества движения в виде

$$\frac{d\bar{K}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{K} = \bar{F}. \tag{1}$$

Здесь $\bar{K}$ — вектор количества движения системы ядро–жидкость, $\bar{K} = \bar{K}_r + \bar{K}_l$; $\bar{K}_r$ и $\bar{K}_l$ — векторы количества движения ядра и жидкости, определяемые формулами

$$\bar{K}_r = m_r \left(\frac{d\bar{w}_r}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{w}_r \right), \quad \bar{K}_l = \int_Q \rho \bar{v} dQ;$$

$\bar{\omega} = \omega\, \bar{e}_3$ — вектор угловой скорости вращения Земли; $\bar{v}$ — вектор скорости частиц жидкости; ρ — плотность жидкости; $\bar{F}$ — главный вектор всех приложенных к системе активных сил, определяемый формулой

$$\bar{F} = \oint_{S_r} \rho \left(U^{(i)} + U^{(e)} \right) \bar{n}_r dS + \oint_{S_r} \rho_r \left(U_l^{(i,r)} + U^{(e)} \right) \bar{n}_r^* dS,$$

где $U^{(i)}, U^{(e)}, U_l^{(i,r)}$ — силовые функции внутренних и внешних гравитационных сил. Интегрирование в выражении для $\bar{K}_l$ распространяется на весь объем полости Q, занимаемый жидкостью; $\bar{n}_r^*, \bar{n}_r$ — внутренняя и внешняя нормали к поверхности твердого ядра, m_r, ρ_r — масса и плотность ядра.

Вектор скорости частиц жидкости $\bar{v}(x,t)$ удовлетворяет уравнениям движения, неразрывности, граничным и начальным условиям:

$$\begin{gathered}
\rho \left(\frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{v} \right) = \nabla \cdot T + \rho \nabla (U^{(i)} + U^{(e)}); \\
\nabla \cdot \bar{v} = 0; \\
\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} + \bar{v}_r \;\text{ на }\; S_r, \quad \bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} \;\text{ на }\; S_l; \\
\bar{v}(x,t) = \bar{v}^0(x) \;\text{ при }\; t = t_0,
\end{gathered} \tag{2}$$

где $\bar{v}_r$ — вектор относительной скорости центра масс ядра; T — тензор напряжений вязкой несжимаемой жидкости, имеющий вид

$$T = -pE + 2\nu\rho Э, \quad Э = \{\varepsilon_{jk}\}_{jk=1}^{3}, \quad \varepsilon_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right); \tag{3}$$

ν, p – коэффициент кинематической вязкости и давление жидкости.

Уточним смысл введенных в уравнениях движения силовых функций. $U^{(i,r)}$ — возмущение силовой функции жидкости в области, занимаемой ядром; $U^{(e)}$ — возмущение силовой функции внешнего поля массовых сил; $U^{(i)}$ — возмущение силовой функции внутренних гравитационных сил, причем

$$U^{(i)} = U_r + U_l^{(i)},$$

где U_r и $U_l^{(i)}$ — возмущение силовых функций ядра и жидкости в области занимаемой жидкостью. Функцию $U^{(e)}(t)$ будем считать заданной, а $U_r, U_l^{(i)}, U_l^{(i,r)}$ — неизвестными, зависящими от движения ядра и частиц жидкости.

При выводе уравнений движения ядра необходимо иметь решение гидродинамической задачи для поля скоростей и решение гравитационных задач для силовых функций.

Гидродинамическая задача. Как известно [15], учет кориолисовых сил инерции в уравнениях гидродинамики в диапазоне частот $(0{,}2\omega)$ приводит к возникновению колебаний завихренной жидкости и к эффекту "расщепления мод" по долготе, т.е. возникновению прямых и обратных волн, бегущих в жидкости с запада на восток и с востока на запад. При внешних возмущениях, не зависящих от долготы, влияние вращения жидкого ядра на вынужденные движения твердого ядра оказывается малым и его можно не принимать во внимание. Учитывая вышесказанное, проведем решение гидродинамической задачи, пренебрегая начальным вихревым состоянием жидкости, и представим вектор скорости жидкости $\bar{v}(x,t)$в виде $\bar{v}(x,t) = \bar{\omega} \times \bar{r} + \bar{V}(x,t)$. Будем считать, что все гидродинамические величины, т.е. $\bar{w}(x,t)$, $\bar{V}(x,t)$, $p(x,t)$ и $U^{(i)}(x,t)$ и их производные, — величины первого порядка малости, и, используя выражение (3) для тензора напряжений, из задачи (2) для описания гравитирующей вязкой несжимаемой жидкости получаем краевую задачу

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\bar{V} + \nabla\left(U^{(i)} + U^{(e)}\right) \quad \text{в} \quad Q; \\
\nabla \cdot \bar{V} = 0 \quad \text{в} \quad Q; \\
\bar{V} = \bar{v}_r \quad \text{на} \quad S_r, \quad \bar{V} = 0 \quad \text{на} \quad S_l; \\
\bar{V}(x,0) = \bar{V}^{(0)}(x) \quad \text{при} \quad t = t_0.
\end{gathered} \tag{4}$$

Здесь ν — коэффициент кинематической вязкости жидкости — одна из наименее известных физических характеристик Земли. Рекомендуемые в литературе значения коэффициента ν, м^2/с, находятся в диапазоне $9,8 \cdot 10^{-7} \leqslant \nu \leqslant 1,5 \cdot 10^{-6}$ с наиболее вероятным значением

$\nu = 6\cdot 10^{-7}$ м^2/с [16]. Примем за характерный размер диаметр твердого ядра $2a$, за характерный масштаб движения — амплитуду возможных колебаний ядра $A_r \approx 1$ м, за характерное время — период колебаний $T_r \approx 4$ ч. В этом случае число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \dfrac{V2a}{\nu} = \dfrac{A_r 2a}{\nu T_r} = 2{,}8\cdot 10^8$, т.е. достаточно большое, что указывает на возможность использования метода пограничного слоя [12]. Обозначим поверхности S_r и S_l соответственно через $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ и представим решение задачи (4) в асимптотическом виде:

$$\bar{V} = \nabla\left(F_0 + \nu^{1/2}F_1\right) + \bar{W}^{(1)} + \bar{W}^{(2)}; \quad p = p_0 + \nu^{1/2}p_1 + q^{(1)} + q^{(2)}, \quad (5)$$

где $F_0(x,t)$ — потенциал скоростей идеальной жидкости; $F_1(x,t)$ — корректирующий потенциал; $\bar{W}^{(1)}(x,t)$, $\bar{W}^{(2)}(x,t)$, $q^{(1)}(x,t)$, $q^{(2)}(x,t)$ — функции типа пограничного слоя, каждая из которых учитывается лишь вблизи одной из поверхностей: $S^{(1)}$ или $S^{(2)}$, т.е. в области $D\left(S^{(1)}\right)$ или $D\left(S^{(2)}\right)$ пограничных слоев, образующихся при движениях твердого ядра.

Поле давлений идеальной жидкости $p_0(x,t)$ и корректирующее поле давлений $p_1(x,t)$ определяются формулами

$$p_0 = -\rho\frac{\partial F_0}{\partial t} + \rho\left(\nabla U^{(i)} + \nabla U^{(e)}\right), \quad p_1 = -\rho\frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (6)$$

Подставив выражения (5) в уравнения (4), получим

$$\nabla\left(\frac{\partial F_0}{\partial t} + \nu^{1/2}\frac{\partial F_1}{\partial t}\right) = -\frac{1}{\rho}\nabla\left(p_0 + \nu^{1/2}p_1\right) + \nabla\left(U^{(i)} + U^{(e)}\right);$$

$$\Delta F_0 = 0, \quad \Delta F_1 = 0 \ \text{ в } \ Q;$$

$$\frac{\partial \bar{W}^{(k)}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla\left(q^{(k)}\right) + \nu\Delta\bar{W}^{(k)}; \quad \nabla\cdot\bar{W}^{(k)} = 0 \ \text{ в } \ D\left(S^{(k)}\right); \quad (7)$$

$$\bar{W}^{(k)} + \nu^{1/2}\nabla F_1 = \delta_{1k}\cdot\bar{v}^{(k)} - \nabla F_0 - \bar{a} \ \text{ на } \ S^{(k)},$$

где вектор $\bar{a}$ удовлетворяет начальным условиям задачи.

Аналогично работе [12] введем две криволинейные системы координат $O\xi_k\eta_k\zeta_k$ на поверхностях $S^{(k)}$ и представим векторы $\bar{W}^{(k)}$ вблизи поверхностей $S^{(k)}$в виде

$$\bar{W}^{(k)} = \bar{W}_T^{(k)} + W_{\zeta_k}^{(k)}\bar{e}_{\zeta_k}, \quad (8)$$

где W_{ζ_k} — компонента скорости жидкости в направлении $O\varsigma_k$; $\bar{e}_{\zeta_k}$ — единичный вектор оси $O\zeta_k$, направленный вглубь жидкости; $\bar{W}_T^{(k)} = \bar{W}_\eta^{(k)} + \bar{W}_\xi^{(k)}$ — компонента скорости в плоскости, касательной к поверхности $S^{(k)}$ в рассматриваемой точке. Подстановка выражения

(8) в уравнения (7) с учетом свойств функций $\bar{W}^{(k)}$, $q^{(k)}$ в пограничном слое приводит к следующим краевым задачам для функций $\bar{W}_T^{(k)}$, $\bar{W}_\zeta^{(n)}$, F_1:

$$\frac{\partial \vec{\bar{W}}_T^{(k)}}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \bar{W}_T^{(k)}}{\partial \zeta^2} \ \text{ в } \ D\left(S^{(k)}\right);$$

$$\bar{W}_T^{(k)} = \delta_{lk}\bar{v}_r^{(k)} - \nabla F_0 \text{ на } S^{(k)}, \ \ \Delta F_1 = 0 \text{ в } Q, \ \bar{W}_T = 0, \ t = t_0; \quad (9)$$

$$\delta_{1k}\bar{v}_r^{(k)} = \begin{cases} \bar{v}_r & \text{на} \quad S^{(1)}, \\ 0 & \text{на} \quad S^{(2)}; \end{cases}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial n} = -\nu^{1/2} W_{\zeta_k}^{(k)} \Bigg| \begin{array}{l} \text{на } \ S^{(k)} \\ \zeta_k = 0; \end{array} \quad (10)$$

$$\frac{\partial W_\zeta^{(k)}}{\partial \zeta} + \nabla_T \cdot \bar{W}_T^{(k)} = 0 \text{ в } D\left(S^{(k)}\right), \quad (11)$$

где ∇_T — двумерный оператор Гамильтона на поверхностях $S^{(k)}$, записанный в криволинейной системе координат $O\xi_k\eta_k$, $k = 1, \ 2$.

Как известно, решение одномерных уравнений теплопроводности (9) с учетом граничных условий можно записать в виде

$$\bar{W}_T^{(k)} = \frac{\zeta_k}{2\sqrt{\pi\nu}} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\left(\delta_{1k}v_r^{(k)} - \nabla F_0\right)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{\zeta_k^2}{4\nu(t-\tau)}} d\tau. \quad (12)$$

Нормальные компоненты $\bar{W}_\varsigma^{(k)}$ находятся в результате интегрирования уравнения неразрывности (11):

$$\begin{gathered} W_\zeta^{(1)} = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\nabla_T(\bar{v}_r - \nabla F_0)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{\zeta_1^2}{4\nu(t-\tau)}} d\tau; \\ W_\zeta^{(2)} = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\nabla_T(-\nabla F_0)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{\zeta_2^2}{4\nu(t-\tau)}} d\tau. \end{gathered} \quad (13)$$

Корректирующий потенциал скоростей — функцию $F_1(x,t)$ с учетом граничных условий (10), будем искать в виде

$$F_1(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\psi(x,t)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau,$$

где $\psi(x,t)$ — гармоническая функция, которую находим из решения краевой задачи

$$\begin{gathered}\Delta\psi = 0 \;\text{ в }\; Q;\\ \frac{\partial\psi}{\partial n_1} = \nabla_T \cdot (\bar{v}_T - \nabla F_0) \;\text{ на }\; S^{(1)};\\ \frac{\partial\psi}{\partial n_2} = \nabla_T \cdot (-\nabla F_0) \;\text{ на }\; S^{(2)}.\end{gathered} \tag{14}$$

Таким образом, решения всех вспомогательных краевых задач могут быть выражены через решение задачи о движении идеальной жидкости, т.е. через потенциал скоростей F_0, являющийся решением задачи Неймана для уравнения Лапласа

$$\begin{gathered}\Delta F_0 = 0 \;\text{ в }\; Q;\\ \frac{\partial F_0}{\partial n^{(1)}} = \bar{v}_r \cdot \bar{n}_r \;\text{ на }\; S^{(1)}, \quad \frac{\partial F_0}{\partial n^{(2)}} = 0 \;\text{ на }\; S^{(2)},\end{gathered} \tag{15}$$

где $\bar{n}^{(K)}$ — внешняя нормаль к границам $S^{(k)}$ области, занимаемой жидкостью. Имеющиеся в литературе оценки смещения внутреннего ядра Земли указывают на малость значений координаты $\bar{w}_r$ и, следовательно, на малость смещений частиц жидкости $\bar{w}(x,t)$. Это позволяет при рассмотрении гидродинамической задачи воспользоваться методами линейной гидродинамики и ввести функцию $\Phi(x,t)$ — потенциал смещений частиц жидкости, определяемый выражениями

$$F_0 = \frac{\partial\Phi}{\partial t}, \quad \bar{w} = \nabla\Phi, \tag{16}$$

и переформулировать задачу (15) для потенциала смещений

$$\begin{gathered}\Delta\Phi = 0 \;\text{ в }\; Q;\\ \frac{\partial\Phi}{\partial n^{(1)}} = \bar{w}_r \cdot \bar{n}_r \;\text{ на }\; S^{(1)}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n^{(2)}} = 0 \;\text{ на }\; S^{(2)}.\end{gathered} \tag{17}$$

Решение задачи (17) можно представить в виде

$$\Phi = \sum_{j=1}^{3} w_{rj}\varphi_j,$$

где $\varphi_j\,(x)$ — единичные гидродинамические потенциалы, удовлетворяющие краевым задачам

$$\begin{gathered}\Delta\varphi_j = 0 \;\text{ в }\; Q;\\ \frac{\partial\varphi_j}{\partial n^{(1)}} = n_{1j} \;\text{ на }\; S^{(1)}\,(t)\,, \quad \frac{\partial\varphi_j}{\partial n^{(2)}} = 0 \;\text{ на }\; S^{(2)}.\end{gathered} \tag{18}$$

Подтвержденные расчетами данные экспериментальных исследований [17] показали, что при $a < 0{,}6b$ (a и b — радиусы сферического ядра и сферической полости) нелинейными эффектами можно пренебречь и, следовательно, при решении задачи для твердого ядра Земли можно ограничиться нулевым приближением, т.е. решениями задач (18), и считать $\varphi_j(x) = \varphi_{j0}(x)$.

В случае сферического ядра радиуса a, расположенного концентрично в сферической полости радиуса b, решениями задачи (18) будут функции

$$\varphi_j = A_j x_j + \frac{B_j x_j}{\sqrt{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^3}}, \tag{19}$$

где коэффициенты A_j, B_j задаются формулами

$$A_j = \frac{a^3}{a^3 - b^3}; \quad B_j = \frac{a^3 b^3}{2\left(a^3 - b^3\right)}, \quad j = 1, 2, 3. \tag{20}$$

Гравитационная задача. Силовая функция U внутренних и внешних гравитационных сил зависит от движения ядра, частиц жидкости и источника внешних гравитационных сил. Поэтому гравитационную задачу можно рассматривать как задачу определения отклонений силовой функции от значений при невозмущенном движении в областях, занимаемых жидкостью, ядром, оболочкой.

Обозначим лагранжево изменение силовой функции внутренних гравитационных сил рассматриваемой системы в области, занимаемой жидкостью, через $U^{(i)}$, тогда

$$U^{(i)}(x, t) = U_r + U_l^{(i)} + \bar{w} \cdot \nabla U_0^{(i)}, \tag{21}$$

где $U_0^{(i)}(x, t)$ — значения силовой функции в одном и том же элементе гравитирующей среды в невозмущенном движении; U_r, $U_l^{(i)}$ — эйлеровы изменения силовых функций при смещении твердого ядра на $\bar{w}_r(t)$, а частиц жидкости на $\bar{w}(x, t)$.

В случае ядра и оболочки сферической формы определение эйлеровых возмущений силовых функций можно легко получить, используя метод суперпозиции и известные выражения силовых функций в невозмущенном состоянии. Например, силовая функция $U_l^{(i)}$ будет равна разности между суммой силовых функций жидкости, заполняющей целиком оболочку со смещенным ядром плотностью, равной плотности жидкости, и суммой силовых функций жидкости и ядра при отсутствии смещения, т.е.

$$U_l^{(i)} = 2\pi\gamma\rho \left\{ b^2 - \frac{\bar{r}^2}{3} - \frac{2a^3}{3\left|\bar{r} - \bar{w}_r\right|} - \left(b^2 - \frac{\bar{r}^2}{3}\right) + \frac{2a^3}{3\left|\bar{r}\right|} \right\}.$$

Пренебрегая слагаемыми второго порядка малости, получим

$$U_l^{(i)} = -\gamma \frac{m_r^{\bullet}}{\left|\bar{r}\right|^3} \bar{w}_r \cdot \bar{r}, \tag{22}$$

где $m_r^{\bullet} = \frac{4}{3}\pi\rho a^3$; a — радиус сферического ядра.

Эйлерово изменение силовой функции ядра в области $|\bar{r}| > a$ равно

$$U_r = \gamma m_r \left(\frac{1}{|\bar{r} - \bar{w}_r|} - \frac{1}{|\bar{r}|} \right) \approx \gamma \frac{m_r}{|\bar{r}|^3} \bar{w}_r \cdot \bar{r}, \tag{23}$$

а силовой функции источника внешних гравитационных сил, находящегося на расстоянии $|\bar{c}|$ от центра масс Земли,

$$U_E^{(e)} = \gamma \frac{m^{(e)}}{|\bar{r} - \bar{c}|^3} \bar{w}_e \cdot \bar{r},$$

где $m^{(e)}$, $\bar{w}_e$ — масса и вектор смещения источника. Отметим что эйлерово изменение $U_E^{(e)}$ может быть вызвано не только механическими воздействиями (вектор $\bar{w}_e$), но и физико-химическими процессами в источнике.

Аналогично можно определить и эйлеровы компоненты изменения силовой функции жидкости в областях, не занятых жидкостью. Так, эйлерово изменение силовой функции жидкости в области, занимаемой ядром, равно

$$U_l^{(i,r)} = -\gamma \frac{\overset{\bullet}{m}_r}{a^3} \bar{w}_r \cdot \bar{r}, \quad 0 \leqslant |\bar{r}| \leqslant a, \tag{24}$$

а в области, занимаемой оболочкой,

$$U_l^{(e)} = -\gamma \frac{\overset{\bullet}{m}_r}{|\bar{r}|^3} \bar{w}_r \cdot \bar{r}. \tag{25}$$

Подставив в формулу (21) выражения функций $U_l^{(i)}$, U_r, $\bar{w} \cdot \nabla U_0^{(i)}$, получим полное изменение силовой функции внутренних гравитационных сил

$$U^{(i)} = \frac{4}{3} \pi \gamma \frac{a^3}{\bar{r}^3} (\rho - \rho_r) \bar{w} \cdot \bar{r} - \frac{4}{3} \pi \gamma \rho \bar{w} \cdot \bar{r} - \\ - \frac{4}{3} \pi \gamma \frac{a^3}{\bar{r}^3} \rho \bar{w}_r \cdot \bar{r} + \frac{4}{3} \pi \gamma \frac{a^3}{\bar{r}^3} \rho_r \bar{w}_r \cdot \bar{r}. \tag{26}$$

Пренебрегая влиянием вязкости жидкости на изменение силовой функции и выражая вектор смешений $\bar{w}(x,t)$ через потенциал смещений идеальной жидкости, получаем

$$U^{(i)} = \frac{4}{3} \pi \gamma \left[\frac{a^3}{a^3 - b^3} \left(1 - \frac{b^3}{|\bar{r}|^3} \right) \left(\frac{a^3}{|\bar{r}|^3} (\rho - \rho_r) - \rho \right) + \frac{a^3}{|\bar{r}|^3} (\rho_r - \rho) \right] \nabla \Phi \cdot \bar{r}. \tag{27}$$

Внешнее поле массовых сил и его представление. Пусть $\bar{\omega} = 0$, начало координат совпадает с гравитационным центром жидкости [8] и на гравитирующее ядро и гравитирующую жидкость действует внешнее поле массовых сил с интенсивностью

$$\bar{f}^{(e)} = \nabla U^{(e)}(\bar{r}, t),$$

где $U^{(e)}(\bar{r}, t)$ — силовая функция внешнего поля. В результате действия сил $\bar{f}^{(e)}$ твердое тело (ядро) займет в жидкости новое положение равновесия, которое определяется вектором $\bar{w}_0$ с началом в гравитационном центре жидкого шара и силовой функцией $U_0^{(e)}(\bar{r})$ внешнего поля. Положение ядра относительно гравитационного центра жидкости в произвольный момент времени будем характеризовать вектором

$$\bar{w}_r = \bar{w}_0 + \bar{w}_{0r}, \tag{28}$$

где $\bar{w}_{0r}$ — вектор малого смещения ядра относительно нового положения равновесия. При произвольном положении ядра на него будут действовать дополнительные силы. Главный вектор дополнительных сил в отсутствие жидкости определяется формулой

$$\bar{F}_r^{(e)} = \oint_{S_r} \rho_r U^{(e)}(\bar{r} + \bar{w}_r(t), t)\ \bar{n}_r^* ds.$$

При смещении ядра в жидкости возникает дополнительное давление $p_l(\bar{r} + \bar{w}(x, t), t) = \rho_U^{(e)}(\bar{r} + \bar{w}(x, t), t)$, обусловливающее дополнительную силу, приложенную к ядру:

$$\bar{F}_l^{(e)} = \int_{S_r} \rho U^{(e)}(\bar{r} + \bar{w}(x, t), t)\ \bar{n}_r ds, \quad \bar{n}_r = -\bar{n}_r^*,$$

где $\bar{w}(x, t)$ — поле малых смещений частиц жидкости; $U^{(e)}(\bar{r} + \bar{w}_r(t), t)$ и $U^{(e)}(\bar{r} + \bar{w}(x, t), t)$ — силовые функции внешнего поля при смещении ядра и частиц жидкости. Разложим в ряд Тейлора функции $U^{(e)}(\bar{r} + \bar{w}_r(t), t)$ и $U^{(e)}(\bar{r} + \bar{w}(x, t), t)$ и, ограничившись первыми членами разложения, получим

$$\begin{gathered} U^{(e)}(\bar{r} + \bar{w}(x, t), t) = U_0^{(e)}(\bar{r}) + U_E^{(e)}(\bar{r}, t) + \nabla U_0^{(e)} \cdot \bar{w} + \ldots; \\ U^{(e)}(\bar{r} + \bar{w}_r(t), t) = U_0^{(e)}(\bar{r}) + U_E^{(e)}(\bar{r}, t) + \nabla U_0^{(e)} \cdot \bar{w}_r + \ldots \end{gathered} \tag{29}$$

Здесь $U_E^{(e)}(\bar{r}, t)$ — эйлерова компонента изменения силовой функции, которая обусловлена процессами в источниках внешнего поля или движением самих источников.

Уравнения движения невращающегося ядра в идеальной жидкости. Для вывода уравнений движения воспользуемся объединенным принципом Даламбера–Лагранжа. Зададим возможное перемещение $\delta\bar{r}$ твердого ядра и составим сумму элементарных работ δA_k:

$$\bar{\Phi}\cdot\delta\bar{r}+\bar{F}'\cdot\delta\bar{r}+\bar{F}''\cdot\delta\bar{r}+\bar{F}_r^{(e)}\cdot\delta\bar{r}+\bar{F}_l^{(e)}\cdot\delta\bar{r}=\Sigma\delta A_k,$$

где $\bar{\Phi}=-(m_rE+M_\alpha)\cdot\ddot{\bar{w}}_r$ — сила инерции Даламбера, которая в рассматриваемом случае записана с учетом присоединенной массы идеальной жидкости; M_α — тензор присоединенных масс жидкости; $\bar{F}'=\oint\rho_rU^{(ie)}\bar{n}_r^*ds$ — сила тяготения, действующая на ядро и вызванная изменением гравитационного поля жидкости; $\bar{F}''=\oint\rho U^{(i)}\bar{n}_rds$ — выталкивающая сила, вызванная изменением давления жидкости при смещении ядра.

Согласно принципу Даламбера–Лагранжа, в каждый момент времени движения ядра, подчиненного идеальным и удерживающим связям, сумма всех элементарных работ активных сил и сил инерции на любом возможном перемещении ядра равна нулю, т.е.

$$\sum\delta A_k=0. \tag{30}$$

Подставив в формулу (30) выражения для сил, действующих на ядро, и для силовых функций, после преобразований получим

$$\begin{gathered}\oint\limits_{S_r}\left(\nabla U_0^{(e)}\cdot\bar{w}_r\right)\bar{n}_rdS=\left[\oint\limits_{S_r}\left(\bar{n}_r\nabla U_0^{(e)}\right)dS\right]\cdot\bar{w}_r;\\ \oint\limits_{S_r}\left(\nabla U_0^{(e)}\cdot\bar{w}\right)\bar{n}_rdS=\left[\oint\limits_{S_r}\left(\bar{n}_r\nabla U_0^{(e)}\cdot\nabla\bar{\varphi}\right)dS\right]\cdot\bar{w}_r;\end{gathered} \tag{31}$$

здесь $\bar{\varphi}=\sum\limits_{k=1}^{3}\varphi_k\bar{e}_k$ — векторный потенциал малых смещений жидкости.

Из принципа Даламбера–Лагранжа следует уравнение движения ядра в виде

$$\ddot{\bar{w}}_r+\Omega^2\cdot\bar{w}_r=(m_rE+M_\alpha)^{-1}(\rho-\rho_r)\oint\left(U_0^{(e)}+U_E^{(e)}\right)\bar{n}_rdS, \tag{32}$$

где Ω^2 — тензор плавучести ядра, определяемый выражением

$$\Omega^2=(m_rE+M_\alpha)^{-1}\Bigg[(m_r-m_r^*)q_wE+\rho_r\oint(\bar{n}_r\nabla U_0^{(e)})dS-\\ -\rho\oint\limits_{S_r}\left(\bar{n}_r\nabla U_0^{(e)}\cdot\nabla\bar{\varphi}\right)dS\Bigg], \tag{33}$$

в котором $q_w = 4/(3\pi\rho\gamma)$ — для жидкого шара, а компоненты тензора являются квадратами частот свободных колебаний ядра.

Уравнения движения ядра, записанные в виде (32), получены для случая, когда начало отсчета вектора $\bar{w}_r$ совпадает с гравитационным центром жидкости. Если за начало отсчета принято положение равновесия, определяемое внешним полем массовых сил, уравнение движения (32) распадается на два. Действительно, подставив в формулу (32) выражение $\bar{w}_r = \bar{w}_0 + \bar{w}_{0r}$, получим

$$\ddot{\bar{w}}_{0r} + \Omega^2 \bar{w}_{0r} = (m_r E + M_\alpha)^{-1} (\rho - \rho_r) \oint U_E^{(e)} \bar{n}_r dS; \qquad (34)$$

$$\Omega^2 \bar{w}_0 = (m_r E + M_\alpha)^{-1} (\rho - \rho_r) \oint U_0^{(e)} \bar{n}_r dS. \qquad (35)$$

Уравнение (34) описывает вынужденные движения ядра под действием возмущенного поля внешних сил, а уравнение (35) определяет положение равновесия ядра относительно гравитационного центра жидкости под действием стационарного поля внешних сил. При отсутствии возмущений во внешнем поле уравнение (34) становится однородным и описывает свободные колебания ядра в гравитирующей жидкости, находящегося под воздействием стационарного поля внешних сил. Как следует из соотношения (33), частоты свободных колебаний ядра в этом случае будут зависеть от направления движения ядра. Таким образом, последние два интеграла в выражении (33) могут рассматриваться как поправки на частоту свободных колебаний ядра.

Действие стационарного внешнего поля массовых сил на сферическое ядро, находящееся в сферической полости. Пусть внешнее поле создано материальной точкой массой $m^{(e)}$. Оценим влияние внешнего поля на частоты свободных колебаний невращающегося ядра. Введем систему координат с началом в геометрическом центре сферической полости радиуса b таким образом, чтобы ось Ox_3 совпадала с вектором $\bar{c}$, определяющим положение притягивающей материальной точки. Тогда силовая функция имеет вид

$$U_0^{(e)} = \gamma \frac{m^{(e)}}{|\bar{r} - \bar{c}|}, \qquad (36)$$

а сила притяжения на единицу притягиваемой массы выражается формулой

$$\nabla U_0^{(e)} = -\gamma m^{(e)} \alpha(a, c, \theta) (\bar{r} - \bar{c}),$$

где $\alpha(a, c, \theta) = (a^2 + c^2 - 2ac\cos\theta)^{3/2}$; $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ — угол между направлениями на притягивающую точку $m^{(e)}$ и на текущую точку жидкого ядра.

Вычислив интегралы, входящие в выражение (33), получим компоненты тензора плавучести ядра:

$$\Omega^2 = \mathrm{diag}\,\left(\Omega_{11}^2, \Omega_{22}^2, \Omega_{33}^2\right);$$

$$\Omega_{11}^2 = \Omega_{22}^2 = \omega_r^2 \left\{1 + \frac{m^{(0)}}{(m_r - m_r^{\bullet})\,\rho}\left[\rho \frac{9}{32\,(k-1)}\varepsilon + \left(\rho_r - \rho \frac{32k-5}{32\,(k-1)}\right)\varepsilon^3\right]\right\};$$

$$\Omega_{33}^2 = \omega_r^2 \left\{1 + \frac{m^{(0)}}{(m_r - m_r^{*})\,\rho}\left[-\rho \frac{9}{16\,(k-1)}\varepsilon + \left(\rho_r - \rho \frac{1-4k}{2\,(k-1)}\right)\varepsilon^3\right]\right\},$$

где ω_r — частота свободных колебаний сферического ядра в идеальной жидкости, определяемая выражением

$$\omega_r^2 = \gamma \frac{4}{3}\pi\rho \frac{m_r - m_r^{\bullet}}{m_r + m_\alpha};\quad \varepsilon = \frac{a}{c};\quad k = \frac{a^3}{b^3} < 1;$$

$$m_r^* = \frac{4}{3}\pi\gamma\rho a^3;\qquad m_\alpha = m_r^* \frac{2a^3 + b^3}{2\,(b^3 - a^3)}.$$

Как следует из приведенных формул, наибольшее влияние на частоты свободных колебаний ядра оказывает взаимодействие внешнего поля с гравитирующей жидкостью. Если предположить, что отношение $\varepsilon = a/c$ является малым параметром, то с точностью до малых величин порядка ε получим тензор плавучести ядра в виде

$$\Omega^2 = \omega_r^2 \begin{bmatrix} 1-\delta & 0 & 0 \\ 0 & 1-\delta & 0 \\ 0 & 0 & 1+2\delta \end{bmatrix},$$

где $\delta = \dfrac{m^{(e)}}{m_r - m_r^{\bullet}} \dfrac{9b^3}{32\,(b^3 - a^3)}\varepsilon.$

Компоненты тензора плавучести ядра показывают, что в поле внешних сил, создаваемых материальной точкой, частота свободных колебаний увеличивается при движении ядра по прямой, соединяющей материальную точку с ядром, а при колебаниях в плоскости, перпендикулярной направлению действия сил притяжения, частота уменьшается. Таким образом, учет неоднородности внешнего поля массовых сил, создаваемых материальной точкой (или шаром), приводит к неоднородному распределению собственных частот колебаний ядра.

Сделаем оценки выявленного эффекта.

Луна. Полагаем плотность внешнего жидкого ядра $\rho = 10{,}9 \times 10^3$ кг/м^3, а радиус ядра и полости равными соответственно $a = 1215$ км, $b = 3485$ км. Тогда $m_r - m_r^{\bullet} = 1{,}4 \cdot 10^{22}$ кг, $k = (a/b)^3 = 0{,}0422$. Формально сопоставим возмущающей точке $m^{(e)}$ Луну. В этом случае получаем следующие оценки параметров задачи:

$$m^{(e)} = m_{\text{Лун}};\quad c = 384 \cdot 10^3\ \text{км},\quad \varepsilon_c = 3{,}104 \cdot 10^{-3}.$$

Поправка на наличие внешней массовой силы равна

$$\delta_c = \frac{m_{\text{Лун}}}{m_r - m_r^\bullet} \frac{9}{32} \frac{\varepsilon_c}{(1-k)} = 4{,}87 \cdot 10^{-3}.$$

Неоднородность мантии. Оценим влияние неоднородности распределения масс оболочки-мантии. Для этого расположим на поверхности Земли, т.е. оболочке, точечную массу $m_{\text{кор}}$, равную массе коры Земли $m_{\text{кор}} = 2{,}6 \cdot 10^{22}$ кг. При этом имеем $c = 6371 \cdot 10^3$ км, $\varepsilon_{\text{кор}} = a/c = 0{,}1907$ и

$$\delta_{\text{кор}} = \frac{m_{\text{кор}}}{m_r - m_r^\bullet} \frac{9}{32} \frac{\varepsilon_{\text{кор}}}{(1-k)} = 0{,}1039.$$

Смещения твердого ядра. Вычислим статическое смещение твердого ядра относительно гравитационного центра жидкого внешнего ядра, заполняющего сферическую оболочку. Для этого воспользуемся уравнением

$$\Omega^2 \bar{w}_0 = \frac{\rho - \rho_r}{m_r + m_\alpha} \int\limits_{S_r} U_0^{(e)} \bar{n}_r dS. \tag{37}$$

Здесь, как и ранее, $U_0^{(e)}$ — стационарная силовая функция внешнего поля, а $\bar{w}_0$ — вектор статического смещения ядра относительно начала координат в центре сферической полости оболочки. Ясно, что приведенные ниже оценки не дают реальных значений отклонений внутреннего ядра в Земле, а только позволяют получить качественное сравнение влияния основных источников внешнего поля. Вычислив интегралы в рассматриваемом случае, получим

$$w_0 = \frac{m^{(e)}}{\frac{4}{3}\pi \rho_l c^2 (1 + 2\delta)}, \tag{38}$$

где w_0 — смещение ядра в направлении к источнику внешнего поля.

Некоторые оценки постоянных смещений твердого ядра. Подставив в выражение (38) соответствующие значения $m^{(e)}$ и c для конкретного возмущающего тела, получим оценки для постоянного смещения ядра. Если формально считать, что Солнце и Земля неподвижны в пространстве и Земля не вращается вокруг своей оси, то рассчитанное по формуле (38) постоянное смещение центра масс твердого ядра составит $w_0 = 1936$ м. При аналогичных условиях притяжение Луны привело бы к смещению твердого ядра на $w_0 = 1148$ м. Проведенные расчеты смещений твердого ядра под влиянием притяжения Луны и Солнца, не отражают реальные эффекты, которые в значительной степени компенсируются инерционными явлениями, обусловленными орбитальными движениями Луны и Солнца.

Полученные ранее оценки показали, что на статическое смещение внутреннего ядра и на частоты собственных колебаний ядра заметное влияние может оказывать неоднородное распределение массы Земли. Именно это приводит к эксцентричности положения центра твердого ядра, которое имеет место и в современную геологическую эпоху. Значительный интерес представляет оценка влияния структуры внутреннего гравитационного поля Земли на динамику твердого ядра и, в частности, на его постоянные смещения и частоты собственных колебаний, а также роль оболочки неоднородностей на границе ядро–мантия в силу того, что эти неоднородности расположены вблизи твердого ядра. В качестве численного примера рассмотрим возможное влияние другой оболочки неоднородностей.

Ю.В. Баркин [8] предложил простую модель тектонических неоднородностей Земли, формирующихся в результате субдукции океанических литосферных плит на глубинах около 600...700 км. Оказывается, гравитационное поле этих неоднородностей довольно хорошо моделируется всего лишь одной точкой массой $0{,}421 \cdot 10^{-4} m_{\oplus}$ ($m_{\oplus}$ — масса Земли), расположенной на расстоянии 4347 км от центра Земли в направлении $25^0 N,\ 123^0\ E$. По формуле (38) получаем оценку смещения твердого ядра вследствие гравитационного влияния указанной неоднородности $w_0 = 93$ м.

Для более корректного учета гравитационного влияния неоднородностей Земли на твердое ядро воспользуемся выражением их силовой функции $U_0^{(e)}$в виде [8]

$$U_0^{(e)} = \frac{4}{3}\pi\gamma\rho_m \left[\frac{1}{2}\left(\alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{22}x_2^2 + \alpha_{33}x_3^2\right) + \alpha_{12}x_1x_2 + \right.$$
$$\left. + \alpha_{13}x_1x_3 + \alpha_{23}x_2x_3 + R_m\left(\gamma_1x_1 + \gamma_2x_2 + \gamma_3x_3\right)\right],$$

где ρ_m и R_m — плотность мантии и средний радиус мантийной полости Земли.

Подставив выражение для $U_0^{(e)}$ в формулу (33) и вычислив интегралы, получим выражение для Ω^2 в виде симметричного тензора с компонентами

$$\Omega_{jk}^2 = (m_r + m_\alpha)^{-1}\left[(m_r - m_r^*)\, q_w \delta_{jk} + \gamma\, \rho_m \left(m_r \alpha_{jk} - m_r^{\bullet} t_{jn}\right)\right].$$

В случае соленоидального внешнего гравитационного поля $\left(\nabla \cdot \nabla U_0^{(e)} = 0\right)$

$$t_{jk} = B^*\alpha_{jk}, \qquad B^* = \frac{3}{2}\frac{1}{k-1}\left(\frac{2k+1}{3} - \frac{2}{5}\right),\ k = \left(\frac{a}{b}\right)^3,$$

тогда

$$\Omega_{jk}^2 = (m_r + m_a)^{-1} \left[(m_r - m_r^*) \, q_w \delta_{jk} + f \rho_m \left(m_r - m_r^{\bullet} B^* \right) \alpha_{jk} \right].$$

Запишем равнения (35) равновесия ядра для рассматриваемого вида силовой функции:

$$\rho(\rho_r - \rho) w_{0j} + \rho_m (\rho_r - \rho B^*) \alpha_{jk} w_{0k} = (\rho_r - \rho) \rho_m R_m \gamma_j. \tag{39}$$

Пусть $\rho_m = 4{,}48 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3, $R_m = b = 3480$ км, тогда для ранее приведенных значений ρ_r и ρ получим $k = 0{,}043245$ и $B^* = 0{,}0605932$.

Воспользуемся уравнением (39) для оценки эффекта смещения центра масс твердого ядра вследствие гравитационного притяжения неоднородностей на границе ядро–мантия при модельных значениях коэффициентов α_{jk}, γ_j внутреннего потенциала указанной оболочки неоднородностей, приведенных в работе [8]. В результате получим:

$$w_{01} = 11{,}46\,\text{м}, \quad w_{02} = -4{,}3\,\text{м}, \quad w_{03} = 55{,}88\,\text{м},$$

что качественно соответствует ранее сделанным оценкам постоянного смещения твердого ядра из-за гравитационного влияния неоднородностей на границе ядро–мантия. Эти значения указывают на постоянное (в настоящую эпоху) смещение ядра в сторону Северной Атлантики, где находится ярко выраженное поднятие поверхности геоида ($+60$ м).

Уравнение движения вращающегося ядра. Подставим выражения для векторов $\bar{K}_r$ и $\bar{K}_l$ в уравнение (1) и продифференцируем его по времени:

$$m_r \left(\frac{d^2 \bar{w}_r}{dt^2} + 2\bar{\omega} \times \bar{w}_r + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{w}_r) \right) + \int\limits_Q \rho \left(\frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{v} \right) dQ =$$

$$= \int\limits_{S_r} \rho \left(U^{(i)} + U^{(e)} \right) \, \bar{n}_r dS + \int\limits_{S_r} \rho_r \left(U^{(i,e)} + U^{(e)} \right) \bar{n}_r^* dS. \tag{40}$$

Используя соотношения для вектора скорости жидкости $\bar{v}(x,t)$, формулы Остроградского–Гаусса и выражения для силовых функций, получаем уравнения движения вращающегося ядра произвольной формы в гравитирующей вязкой жидкости:

$$(m_r E + M_\alpha) \left(\frac{d^2 \bar{w}_r}{dt^2} + 2\bar{\omega} \times \frac{d\bar{w}_r}{dt} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{w}_r) \right) +$$

$$+ \rho \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \Lambda \frac{d}{dt} \left(\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\dot{\bar{w}}_r(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau \right) +$$

$$+\rho\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\bar{\omega}\times\Lambda\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\dot{\bar{w}}_r(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau+\bar{\omega}\times\bar{K}_0+C\bar{w}_r=(\rho-\rho_r)\oint\limits_{Sr}U_E^{(e)}\bar{n}_r dS, \quad (41)$$

где $\bar{K}_0$ — вектор количества движения жидкости в начальный момент времени; $M_\alpha=\{m_{jk}\}_{j,k}^3$ — тензор присоединенных масс;

$$m_{jk}=\rho\int\limits_{Sr}\varphi_j\frac{\partial\varphi_k}{\partial n_r}dS; \quad (42)$$

$\Lambda=\{\varepsilon_{jk}\}_{j,k}^3$ — постоянный аффинный ортогональный тензор, учитывающий влияние размеров и форм ядра и полости оболочки на диссипацию энергии в вязкой жидкости;

$$\varepsilon_{jk}=\int\limits_{S_r}(\bar{e}_j-\nabla\varphi_j)(\bar{e}_k-\nabla\varphi_k)\,dS+\int\limits_{S_l}\nabla\varphi_j\nabla\varphi_k dS, \quad (43)$$

где $\bar{e}_j,\bar{e}_n$ — единичные векторы, $j,k=1,2,3$; $C=\{c_{jk}\}_{j,k}^3$ — тензор жесткости ядра, компоненты которого зависят от разности плотностей ядра и окружающей жидкости, а также от внутренних и внешних гравитационных сил и сил инерции и выражаются формулой

$$c_{jk}=(m_r-m_r^\bullet)\,q_w\delta_{jk}+\rho_r\int\limits_{S_r}n_j\frac{\partial U_0^{(e)}}{\partial x_k}dS-\rho\int\limits_{S_r}n_j\frac{\partial U_0^{(e)}}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k}dS;$$

q_w — изменение интенсивности гравитационного поля жидкости на единицу смещения ядра; δ_{jk} – символ Кронекера.

В уравнении движения (41) вектор $\bar{w}_r$ имеет своим началом точку, определяемую положением относительного равновесия при действии стационарного внешнего поля массовых сил. В случае, когда ядро считается шаром радиуса a, полость оболочки — сферой радиуса b, а внешние стационарные массовые силы отсутствуют, тензоры принимают диагональный вид:

$$M_\alpha=m_r^\bullet\frac{2a^3+b^3}{2\,(b^3-a^3)}E=m_\alpha E;\quad \Lambda=\frac{6\pi a^2b^2\,(a^4+b^4)}{(a^3-b^3)^2}E=\varepsilon_r E;$$

$$C=\gamma\frac{m_r^\bullet}{a^3}\,(m_r-m_r^\bullet)\,E=c_r E,$$

где $m_r^\bullet=\frac{4}{3}\pi\rho a^3$, и уравнение движения сферического ядра можно записать как

$$(m_r+m_\alpha)\,(\ddot{\bar{w}}_r+2\bar{\omega}\times\dot{\bar{w}}_r+\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{w}_r))+$$

$$+\rho\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\varepsilon_r\frac{d}{dt}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\dot{\bar{w}}_r(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau+\rho\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\bar{\omega}\times\varepsilon_r\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\dot{\bar{w}}(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau+c_r\bar{w}_r=$$

$$=(\rho-\rho_r)\int\limits_{S_r}U_E^{(e)}\bar{n}_r dS. \quad (44)$$

О колебаниях вращающегося ядра. Пусть $\omega=0$ и при $t=0$ смещение сферического ядра и начальная скорость равны нулю, движение жидкости потенциально или она покоится, а эйлерово возмущение внешних сил описывается силовой функцией $\sum\limits_{k=1}^{N}U_k^{(e)}(x)e^{\mu_k t}$.

Применив к уравнению (44) преобразование Лапласа, затем разрешив полученное соотношение относительно вектора $\bar{w}_r(p)$ и восстановив оригинал по формуле обращения, получим решение

$$\bar{w}_r(e)=\frac{(\rho-\rho_r)}{(m_r+m_\alpha)}\times$$

$$\times\left\{\sum_{k=1}^{N}\left(e^{\mu_k t}\oint\limits_{S_r}U_k^{(e)}(x)\cdot\bar{n}_r dS\right)\Bigg/\left(\bar{\omega}_r^2+\mu_k^2-\rho\sqrt{\nu\mu_k}\mu_k\varepsilon_r\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{N}\left(e^{\sigma^+t}\mathrm{res}\bar{W}_k\left(\sigma^+\right)+e^{\sigma^-t}\mathrm{res}\bar{W}_k\left(\sigma^-\right)\right)\right\}, \quad (45)$$

в котором вычеты $\bar{W}_k(\sigma^\pm)$ определены равенством

$$\mathrm{res}\,\bar{W}_k\left(\sigma^\pm\right)=\frac{\left(\sigma^\pm-\mu_k\right)^{-1}\oint\limits_{S_r}U_k^{(e)}(x)\,\bar{n}_r dS}{\rho\sqrt{\nu\omega_r}\varepsilon_r(1+i)/2\sqrt{2}\pm 2i\omega_r},$$

а $\sigma^\pm$ — корень характеристического уравнения свободных колебаний твердого ядра в вязком жидком ядре — выражается соотношением

$$\sigma^\pm=-\rho\sqrt{\nu\omega_r}\frac{\varepsilon_r}{2\sqrt{2}(m_r+m_\alpha)}\pm i\left(\omega_r-\frac{\rho\sqrt{\nu\omega_r}}{(m_r+m_\alpha)}\frac{\varepsilon_r}{2\sqrt{2}}\right), \quad (46)$$

где ω_r — круговая частота свободных колебаний ядра в идеальной гравитирующей жидкости.

При $\omega=0$

$$\omega_r^2=\frac{4}{3}\pi\gamma\rho\frac{m_r-m_r^\bullet}{m_r+m_\alpha}. \quad (47)$$

Действительная часть корня $\sigma^\pm$ дает значение коэффициента затухания свободных колебаний ядра в вязкой жидкости:

$$n = \frac{\varepsilon_r \rho}{2\sqrt{2}\,(m_r + m_\alpha)} \sqrt{\nu \omega_r}. \tag{48}$$

Выражение мнимой части корня характеристического уравнения показывает, что частота свободных колебаний невращающегося ядра в вязкой гравитирующей жидкости меньше, чем в идеальной, на величину

$$\frac{\rho\sqrt{\nu\omega_r}}{m_r + m_\alpha} \frac{\varepsilon_r}{2\sqrt{2}}.$$

Первое слагаемое в фигурных скобках формулы (45) описывает вынужденные колебания, второе описывает затухающие колебания ядра той же частоты, что и свободные, но возникающие при воздействии внешних гравитационных сил. В случае гармонического возмущения внешних сил в формулах (45) следует положить $\mu_k = ip_k$, $\sqrt{\mu_k} = -(1+ + i)\sqrt{p_k}/\sqrt{2}$; приведенные формулы остаются справедливы, если $\mu_k^2 + + \sigma^2$ не равно нулю.

Рассмотрим вынужденные колебания ядра в случае $\omega \neq 0$. Предположим, что внешние силы — гармонические с силовой функцией $U_E^{(e)}(x,t) = U_0^{(e)}(x)e^{ipt}$. Преобразуем интеграл в уравнении движения (41), полагая $t_0 \to -\infty$:

$$\int\limits_{-\infty}^{t} \frac{\dot{\bar{w}}_r}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{2p}} v_r(t) + \sqrt{\frac{\pi p}{2}} w_r(t). \tag{49}$$

С учетом выражения (49) уравнение вынужденных колебаний ядра приобретает следующий вид:

$$(m_r + m'_\alpha)\left(\frac{d^2\bar{w}_r}{dt^2} + 2\bar{\omega}\times\bar{w}_r + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{w}_r)\right) +$$

$$+ \sqrt{\frac{\nu p}{2}}(\varepsilon_r \dot{\bar{w}}_r + \bar{\omega}\times\varepsilon_r\bar{w}_r) + c_r\bar{w}_r = (\rho - \rho_r)\int\limits_{S_r} U_0^{(e)}(x)e^{ipt}\bar{n}_r dS, \tag{50}$$

где $m'_\alpha = m_\alpha + \rho\sqrt{\dfrac{\nu}{2p}}\varepsilon_r$ — присоединенная масса вязкой жидкости.

Пренебрегая влиянием вязкости на собственную частоту колебаний ядра, запишем уравнение движения (50) в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \ddot{w}_1 \\ \ddot{w}_2 \\ \ddot{w}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2n & -2\omega & 0 \\ 2\omega & 2n & 0 \\ 0 & 0 & 2n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} \omega_r^2-\omega^2 & -2n\omega & 0 \\ 2n\omega & \omega_r^2-\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} e^{ipt}, \quad (51)$$

где $h_i = \dfrac{\rho-\rho_r}{m_r+m'_\alpha}\displaystyle\int\limits_{S_r} U_0^{(e)}(x)n_{ri}dS.$

Рассматривая малые колебания твердого ядра относительно его эксцентричного положения, предположим, что возмущающее влияние внешних факторов мало, в правой части уравнения (51) примем постоянные значения координат, соответствующие указанному невозмущенному эксцентричному положению твердого ядра. Матричное уравнение (51) эквивалентно системе линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Решение, определяющее вынужденные движения вращающегося твердого ядра, может быть представлено в комплексном виде

$$w_k(t) = A_k e^{ipt}.$$

Комплексные амплитуды A_k вынужденных колебаний сферического ядра в гравитирующей вязкой жидкости, заполняющей сферическую полость, выражаются формулами

$$\begin{gathered} A_1 = \frac{h_1\left[-p^2+2npi+\omega_r^2-\omega^2\right]+2h_2\omega(ip+n)}{D(p)}; \\ A_2 = \frac{h_2\left[-p^2+2npi+\omega_r^2-\omega^2\right]-2h_2\omega(ip+n)}{D(p)}; \\ A_3 = \frac{h_3}{-p^2+2npi+\omega_r^2}, \end{gathered} \quad (52)$$

где $D(p) = p^4-4nip^3-2p^2(\omega_r^2+\omega^2+2n^2)+4nip(\omega_r^2+3\omega^2)+(\omega_r^2-\omega^2)^2+$ $+16n^2\omega^2$ — характеристический полином.

Приравняв характеристический полином нулю, получим частотное уравнение, корни которого определяют значения комплексных собственных частот колебаний внутреннего ядра Земли:

$$\begin{gathered} p_1 = \omega_r+\omega+\frac{\omega_r-\omega}{\omega_r}ni+O(n^2); \\ p_2 = \omega_r-\omega+\frac{\omega_r+\omega}{\omega_r}ni+O(n^2). \end{gathered} \quad (53)$$

Здесь действительная часть определяет значения собственных частот колебаний ядра во вращающейся оболочке, заполненной идеальной гравитирующей жидкостью, мнимая часть — значения коэффициентов затухания. Как следует из выражений (53), вращение “расщепляет” не только собственную частоту колебаний ядра ω_r, но и коэффициент затухания.

Действительные решения для вынужденных колебаний могут быть записаны в виде
$$w_k = a_k \cos(pt + \alpha_k),$$
где действительные амплитуды и сдвиги фаз определены формулами
$$a_k = \sqrt{(\,\mathrm{Re}A_k)^2 + (\,\mathrm{Im}A_k)^2}; \quad \delta_k = \mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{Im}A_k}{\mathrm{Re}A_k}. \qquad (54)$$

Выводы. Структура полученного решения совпадает со структурой решения ограниченной задачи о вынужденных колебаниях твердого ядра в жидком ядре под действием притяжения Луны и Солнца [8]. Отличие состоит в том, что в работе [8] не учтено косвенное воздействие притяжения Луны и Солнца на твердое ядро через жидкое ядро (т.е. гидродинамический возмущающий эффект). Его учет, как показано в настоящей работе, приводит к уменьшению прямого влияния Луны и Солнца.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А в с ю к Ю. Н. О движении внутреннего ядра Земли // Доклады АН СССР. – 1973. – Т. 212, № 5. – С. 1103–1104.
2. А в с ю к Ю. Н. Приливные силы и природные процессы. М.: Изд-во ОИФЗ РАН им. О.Ю. Шмидта, 1996. – 188 с.
3. М о н и н А. С. О внутреннем вращении Земли // Доклады АН СССР. – 1973. – Т. 211, № 5. – С. 1097–1100.
4. S l i c h t e r L. B. The fundamental free mode of the Earth's inner core // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. – 1961. – Vol. 47. – P. 186–190.
5. W o n I. Y., K u o Y. T. Oscillation of the Earth's inner core and its relation to the generation of geomagnetic field // J. Geophys. Res. – 1973. – Vol. 78. – P. 905–910.
6. B u s s e F. H. On the free oscillation of the Earth's inner core // J. Geophys. Res. – 1974. – Vol. 79, № 5. – P. 753–757.
7. C r o s s l e y D. J., S m y l i e D. E. Electromagnetic and viscous damping of core oscillations // Geophys. Int. J., 1975.
8. Б а р к и н Ю. В. К динамике твердого ядра // Труды Гос. астрон. ин-та им. П.К. Штернберга. – 1996. – Т. LXV. – С. 107–129.
9. Б а р к и н Ю. В. Стационарные решения проблемы двух несферичных тел, их устойчивость и приложения // Тез. конф. "Проблемы небесной механики" (3–6 июня 1997, СПб.). Изд-во ИТА РАН, 1997. – С. 44–45.
10. B a r k i n Y u. V. Force functions of systems of celestial bodies and some problems of the dynamics of the solar system bodies / Contributions to the SSG 4.95. Multi-body Force Function, Geodetic Aspects of Astrodynamics. Presented at the IUGG General Assembly (Vancouver, August 1987). – 20 p.
11. П а с ы н о к С. Л. О полярных колебаниях внутреннего ядра Земли в поле сил тяжести и гидростатического давления // Труды Гос. астрон. ин-та им. П.К. Штернберга. – 1996. – Т. LXV. – С. 130–135.
12. Ч е р н о у с ь к о Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость // – М.: ВЦ АН СССР, 1968.
13. B a r k i n Y u. V. Some effects in perturbed motion of the Earth's rigid core // Annaleses Geophysicae. Supplement Volume 16. EGS Newsletter Number 66. XXIII General Assembly (Nice, France, 20–24 April 1997). – 1997. – P. 127.

14. Б a r k i n Y u. V. Gravitational interaction between the Earth's envelopes, the Moon, the Sun and geodynamics consequences // Annaleses Geophysicae. Supplement Volume 16. EGS Newsletter Number 66. XXIII General Assembly (Nice, France, 20–24 April 1997). – 1997. – P. 128.
15. Г р и н с п е н Х. Теория вращающихся жидкостей. – Л.: Гидрометеоиздат, 1975. – 300 с.
16. Д ж е к о б с Д. Земное ядро. – М.: Мир, 1979. – 300 с.
17. М и к и ш е в Г. Н., С т о л б ц о в В. И. О колебаниях тела в ограниченном объеме вязкой жидкости // Изв.АН СССР, МЖГ. – 1983. – № 1. – С. 22–30.

Статья поступила в редакцию 02.07.2007

Александр Николаевич Темнов родился в 1945 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1971 г. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры "Космические аппараты и ракеты-носители" МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор свыше 20 научных работ в области механики жидкости и газа и ракетно-космической технологии.

A.N. Temnov (b. 1945) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1971. Ph. D. (Phys.-Math.), assoc. professor of "Spacecrafts and Boosters" department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 20 publications in the field of mechanics of liquids and gases and rocket and space technology.

Александр Львович Гевлич родился в 1970 г, окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 1994 г. Менеджер компании "Форс-Банковские системы".

A.L. Gevlich (b. 1970) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 1994. Manager of company "Fors-Bankovskie sistemy".