

Ю. И. Димитриенко, А. Ю. Дзаганя,
Ю. В. Беленовская, М. А. Воронцова

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОНИКАНИЯ УДАРНИКОВ В АНИЗОТРОПНЫЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЕ ПРЕГРАДЫ

Предложен метод численного моделирования динамических процессов ударно-волнового взаимодействия и проникания ударников в упругопластические анизотропные многослойные преграды. Задача в осесимметричной постановке рассмотрена в рамках теории конечных деформаций в переменных Лагранжа. Для численного решения использован вариант конечно-разностного метода ленточных адаптивных сеток. Рассмотрены некоторые особенности, возникающие при проникании ударников в многослойные преграды.

Процесс проникания ударников в преграды представляет собой сложное явление; несмотря на значительные усилия, приложенные для его исследования, еще далеко до создания универсальной теории этого процесса. Наиболее изученными можно считать процессы проникания в изотропные среды с малыми упругими и упруго-пластическими деформациями (в основном это металлы и сплавы, керамики, некоторые горные породы) [1–8]. Проникание же ударников в преграды, выдерживающие до разрушения большие деформации (грунты и некоторые виды горных пород, некоторые типы сплавов), изучено существенно меньше. В последнее время появился интерес к изучению проникания ударников в анизотропные среды (железобетоны и другие армированные строительные материалы, броневые композитные материалы, многослойные системы и т.п.) [8, 9]. Для таких сред механизмы динамического разрушения существенно отличны от механизма разрушения изотропных сред.

Ударно-волновые процессы в анизотропных средах до настоящего времени систематически не изучались. В работах [10–14] предложена новая модель для исследования процесса проникания в анизотропные среды, основанная на строгой математической постановке динамической задачи теории конечных анизотропных упругопластических деформаций. В настоящей работе представлены дальнейшие результаты применения этой модели для исследования рассматриваемого процесса.

Математическая формулировка динамической задачи взаимодействия ударника и преграды. Рассмотрим универсальную систему законов сохранения в лагранжевом описании (в отсчетной конфигурации), состоящую из уравнения неразрывности, уравнения движения, кинематического уравнения, динамического уравнения совместности

деформаций и определяющих соотношений, соответствующих модели анизотропной упругопластической среды с конечными деформациями [10]:

$$\overset{\circ}{\rho} / \rho = \det \mathbf{F} = \Delta; \quad (1)$$

$$\overset{\circ}{\rho} \frac{d}{dt} \mathbf{v} = \overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathbf{P}; \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u} = \mathbf{v}; \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{F}^T = \overset{\circ}{\nabla} \otimes \mathbf{v}; \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \check{\mathbf{T}} = {}^4 \mathbf{M} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot (\overset{\circ}{\nabla} \otimes \mathbf{v})^T - \frac{d}{dt} \mathbf{C}^p); \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{C}^p = \sum_{\gamma=1}^n \sum_{\beta=1}^N \frac{1}{Y_{\gamma}} \frac{d\lambda_{\beta}}{dt} \frac{\partial f_{\beta}}{\partial Y_{\gamma}} {}^4 \mathbf{A}_{(\gamma)} \cdot (\check{\mathbf{T}} - H_{\gamma} \mathbf{C}^p); \quad (6)$$

$$f_{\beta} = f_{\beta}(Y_1^p, \dots, Y_n^p), \quad \beta = 1, \dots, N; \quad (7)$$

$$\mathbf{P} = \Delta \check{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{F}^T, \quad (8)$$

где \mathbf{P} — первый тензор напряжений Пиола–Кирхгофа; \mathbf{T} — тензор истинных напряжений Коши; $\check{\mathbf{T}}$ — энергетический тензор напряжений; $\overset{\circ}{\rho}$ и ρ — плотность в отсчетной и актуальной конфигурациях; \mathbf{F} — градиент деформаций; \mathbf{v} — вектор скорости; \mathbf{u} — вектор перемещений; \mathbf{C}^p — энергетический тензор пластических деформаций. Соотношение (6) соответствует модели теории анизотропного пластического течения (ассоциированный закон); $H_{\gamma} = H_{\gamma}(Y_{\gamma}^p)$ — параметры пластического упрочнения, зависящие от спектральных инвариантов Y_{γ}^p тензора пластических деформаций \mathbf{C}^p . Вид этих инвариантов, так же как и вид тензоров ${}^4 \mathbf{A}_{(\gamma)}$, определяется только типом анизотропии рассматриваемой среды (для каждого типа анизотропии Y_{γ}^p и ${}^4 \mathbf{A}_{(\gamma)}$ выбираются стандартным образом, их выражения приведены в [15]); λ_{β} — параметры нагружения; f_{β} — функции пластичности (число их определяется типом анизотропии и моделью поверхности пластичности). В системе (1)–(8) обозначено ${}^4 \mathbf{M} = {}^4 \mathbf{M}^0 / \Delta$, где ${}^4 \mathbf{M}^0$ — тензор констант упругости; $\overset{\circ}{\nabla}$ — набла-оператор в отсчетной конфигурации.

Система уравнений (1)–(8) записана для области $\overset{\circ}{V}$ в отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{K}$, которая представляет собой совокупность ударника и преграды. Граничные условия на поверхности контакта ударника и преграды, а также на границе слоев преграды предполагаются соответствующими идеальному контакту без проскальзывания, и в отсчетной

конфигурации имеют вид:

$$[\mathbf{v}] = 0, \quad [\mathbf{u}] = 0, \quad \overset{\circ}{n} \cdot [\mathbf{P}] = 0, \quad (9)$$

где $[]$ — скачок функций; $\overset{\circ}{n}$ — вектор нормали к поверхности. Если происходит отскок ударника от преграды, то на поверхности контакта $\overset{\circ}{\Sigma}$ имеет место условие $\overset{\circ}{n} \cdot [\mathbf{P}] = 0$. Это же условие справедливо для неконтактирующих поверхностей преграды и ударника.

Дополняя систему уравнений (1)–(8) начальными условиями

$$t = 0: \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0, \quad \overset{\circ}{\mathbf{T}} = 0, \quad \mathbf{F} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{C}^p = 0, \quad (10)$$

получаем постановку динамической задачи теории больших анизотропных упругопластических деформаций.

Математическая формулировка задачи при прямом соударении. Рассмотрим случай прямого соударения, который значительно упрощает моделирование и сводится к рассмотрению осесимметричной (двумерной) задачи (1)–(10). Полагаем, что область $\overset{\circ}{V}$ в $\overset{\circ}{K}$ и тип анизотропии (группа симметрии G_s ударника и преграды) допускают наличие оси симметрии OX^3 в лагранжевой системе координат X^i , за которую выбрана цилиндрическая система координат $X^1 = r$, $X^2 = \varphi$, $X^3 = z$. Тогда может быть сформулирована осесимметричная постановка задачи (1)–(10). В физических координатах, используя компонентную запись дифференциальных операторов и тензоров [15], имеем

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial r v_r}{\partial t} &= \frac{\partial r P_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial r P_{rz}}{\partial z} - P_{\varphi\varphi}; \\ \rho \frac{\partial r v_z}{\partial t} &= \frac{\partial r P_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial r P_{zz}}{\partial z}; \\ \frac{\partial u_r}{\partial t} &= v_r; \quad \frac{\partial u_z}{\partial t} = v_z; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} T_{rr} \\ T_{\varphi\varphi} \\ T_{zz} \\ T_{rz} \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix} M_{1111} & M_{1122} & M_{1133} & 0 \\ M_{1122} & M_{1111} & M_{1133} & 0 \\ M_{1133} & M_{1133} & M_{3333} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2M_{1313} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} e_{rr} \\ e_{\varphi\varphi} \\ e_{zz} \\ e_{rz} \end{pmatrix} - \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}^p \\ \varepsilon_{\varphi\varphi}^p \\ \varepsilon_{zz}^p \\ \varepsilon_{rz}^p \end{pmatrix} \right); \\ \frac{\partial F_{rr}}{\partial t} &= \frac{\partial v_r}{\partial r}; \quad \frac{\partial F_{\varphi\varphi}}{\partial t} = \frac{v_r}{r}; \quad \frac{\partial F_{zz}}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial z}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F_{rz}}{\partial t} = \frac{\partial v_r}{\partial z}; \quad \frac{\partial F_{zr}}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial r}.$$

Здесь $T_{11} = T_{rr}$, $T_{22} = T_{\varphi\varphi}$, $T_{33} = T_{zz}$ и T_{rz} — физические компоненты тензора \mathbf{T} в актуальной конфигурации, а $e_{11} = e_{rr}$, $e_{22} = e_{\varphi\varphi}$, $e_{33} = e_{zz}$ и e_{rz} — физические компоненты тензора скоростей деформаций \mathbf{D} ; $P_{11} = P_{rr}$, $P_{22} = P_{\varphi\varphi}$, $P_{33} = P_{zz}$ и P_{rz} — физические компоненты тензора Пиолы–Кирхгофа \mathbf{P} :

$$\begin{aligned} P_{rr} &= \Delta(T_{rr}F_{rr} + T_{rz}F_{rz}), & P_{\varphi\varphi} &= \Delta(T_{\varphi\varphi}F_{\varphi\varphi}), \\ P_{zz} &= \Delta(T_{rz}F_{zr} + T_{zz}F_{zz}), & P_{rz} &= \Delta(T_{rr}F_{zr} + T_{rz}F_{zz}), \\ P_{zr} &= \Delta(T_{rz}F_{rr} + T_{zz}F_{rz}); & \Delta &= F_{\varphi\varphi}(F_{rr}F_{zz} - F_{rz}F_{zr}); \\ e_{rr} &= \frac{\partial v_r}{\partial r}F_{rr} + \frac{\partial v_z}{\partial r}F_{zr}; & e_{\varphi\varphi} &= \frac{v_r}{r}F_{\varphi\varphi}; & e_{zz} &= \frac{\partial v_r}{\partial z}F_{rz} + \frac{\partial v_z}{\partial z}F_{zz}; \\ e_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r}F_{rz} + \frac{\partial v_z}{\partial z}F_{zr} + \frac{\partial v_z}{\partial r}F_{rr} + \frac{\partial v_r}{\partial z}F_{zz} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Полагаем, что ударник — изотропное упругое тело, т.е. у него пластические деформации отсутствуют ($\varepsilon_{ij}^p = 0$), а слои преграды соответствуют модели упругопластической трансверсально-изотропной либо изотропной среды. Для трансверсально-изотропных слоев определяющие соотношения (6) в физических координатах для осесимметричного случая записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{rr}^p}{\partial t} &= \frac{1}{2}S_2(T_{rr} + T_{\varphi\varphi} - H_2(\varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{\varphi\varphi}^p)) + \frac{1}{2}S_3(T_{rr} - T_{\varphi\varphi} - H_3(\varepsilon_{rr}^p - \varepsilon_{\varphi\varphi}^p)); \\ \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}^p}{\partial t} &= \frac{1}{2}S_2(T_{rr} + T_{\varphi\varphi} - H_2(\varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{\varphi\varphi}^p)) - \frac{1}{2}S_3(T_{rr} - T_{\varphi\varphi} - H_3(\varepsilon_{rr}^p - \varepsilon_{\varphi\varphi}^p)); \\ \frac{\partial \varepsilon_{zz}^p}{\partial t} &= S_1(T_{zz} - H_1\varepsilon_{zz}^p), & \frac{\partial \varepsilon_{rz}^p}{\partial t} &= S_4(T_{rz} - H_4\varepsilon_{rz}^p). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь

$$S_\gamma = \sum_{\beta=1}^N \frac{1}{Y_\gamma} \frac{d\lambda_\beta}{dt} \frac{\partial f_\beta}{\partial Y_\gamma}; \quad \gamma = 1, \dots, 4; \quad (14)$$

$$Y_1 = T_{zz} - H_1\varepsilon_{zz}^p, \quad Y_2 = T_{rr} + T_{\varphi\varphi} - H_2(\varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{\varphi\varphi}^p),$$

$$Y_3 = (1/\sqrt{2}) |T_{rr} - T_{\varphi\varphi} - H_2(\varepsilon_{rr}^p - \varepsilon_{\varphi\varphi}^p)|, \quad Y_4 = (1/\sqrt{2}) |T_{rz} - H_4\varepsilon_{rz}^p|.$$

Для функций H_γ примем модель степенного упрочнения:

$$H_1 = H_1^0 |\varepsilon_{zz}^p|^{-n_1}, \quad H_2 = H_2^0 |\varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{zz}^p|^{-n_2}, \quad (15)$$

$$H_3 = H_3^0 |\varepsilon_{rr}^p - \varepsilon_{zz}^p|^{-n_3}, \quad H_4 = H_4^0 |\varepsilon_{rz}^p|^{-n_4},$$

где H_γ^0 и n_γ — константы.

Для трансверсально-изотропной среды со слоистой структурой, ортогональной к оси OX^3 , функции f_γ зададим в форме [10]

$$N = 2, \quad 2f_1 = (Y_1/\sigma_{1S})^2 - 1 = 0, \quad 2f_2 = \sum_{\gamma=3}^4 (Y_\gamma/\sigma_{\gamma S})^2 - 1 = 0, \quad (16)$$

где $\sigma_{\gamma S}$ – пределы текучести. Тогда

$$S_\gamma = (1/\sigma_{\gamma S}^2)\partial\lambda_\gamma/\partial t, \quad \gamma = 1, \dots, 4. \quad (17)$$

Для изотропных слоев определяющие соотношения (6) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{rr}^p}{\partial t} &= \frac{1}{3}S(2T_{rr} - T_{\varphi\varphi} - T_{zz} - H\varepsilon_{rr}^p); \\ \frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}^p}{\partial t} &= \frac{1}{3}S(2T_{\varphi\varphi} - T_{rr} - T_{zz} - H\varepsilon_{\varphi\varphi}^p); \\ \frac{\partial \varepsilon_{zz}^p}{\partial t} &= \frac{1}{3}S(2T_{zz} - T_{rr} - T_{\varphi\varphi} - H\varepsilon_{zz}^p); \\ \frac{\partial \varepsilon_{rz}^p}{\partial t} &= S(T_{rz} - H\varepsilon_{rz}^p); \quad S = \frac{\dot{\lambda}}{\sigma_S^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Параметр нагружения для изотропных сред находим из уравнения

$$\dot{\lambda} = \pm \frac{Y_p^* \sigma_S}{\sqrt{3}}; \quad (19)$$

$$Y_p^{*2} = \frac{1}{2} \left((\dot{\varepsilon}_{rr}^p - \dot{\varepsilon}_{zz}^p)^2 + (\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^p - \dot{\varepsilon}_{zz}^p)^2 + (\dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^p - \dot{\varepsilon}_{rr}^p)^2 + 6(\dot{\varepsilon}_{rz}^p)^2 \right).$$

Параметр упрочнения H также задается в степенном виде

$$H = H_0 Y_P^{-n_0}, \quad (20)$$

$$Y_P^2 = \frac{1}{2} \left((\varepsilon_{rr}^p - \varepsilon_{zz}^p)^2 + (\varepsilon_{\varphi\varphi}^p - \varepsilon_{zz}^p)^2 + (\varepsilon_{\varphi\varphi}^p - \varepsilon_{rr}^p)^2 + 6(\varepsilon_{rz}^p)^2 \right),$$

где H_γ^0 и n_γ – константы, а уравнение поверхности пластичности соответствует модели Губера–Мизеса

$$f = \frac{1}{3} \left(\frac{Y_H}{\sigma_S} \right)^2 - 1, \quad (21)$$

в которой

$$\begin{aligned} Y_H^2 &= \frac{1}{2} \left((T_{rr} - T_{zz} - H(\varepsilon_{rr}^p - \varepsilon_{zz}^p))^2 + (T_{\varphi\varphi} - T_{zz} - H(\varepsilon_{\varphi\varphi}^p - \varepsilon_{zz}^p))^2 + \right. \\ &\quad \left. + (T_{zz} - T_{\varphi\varphi} - H(\varepsilon_{zz}^p - \varepsilon_{\varphi\varphi}^p))^2 + 6(T_{rz} - H\varepsilon_{rz}^p)^2 \right). \end{aligned}$$

Обе системы уравнений (11)-(13) и (11), (12), (18) являются замкнутыми относительно 17 функций ($u_r, u_z, v_r, v_z, F_{rr}, F_{zz}, F_{rz}, F_{zr}, F_{\varphi\varphi}, T_{rr}, T_{zz}, T_{rz}, T_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{rr}^p, \varepsilon_{zz}^p, \varepsilon_{\varphi\varphi}^p, \varepsilon_{rz}^p$), зависящих от r, z и t .

Численный метод решения задачи. Вводя координатные столбцы, элементами которых являются величины, стоящие под знаками производных в системе (11)–(13):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U} &= (u_r, u_z, r\rho v_r, r\rho v_z, F_{rr}, F_{zz}, F_{rz}, F_{zr}, F_{\varphi\varphi}, T_{rr}, \\
 &\quad T_{zz}, T_{rz}, T_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{rr}^p, \varepsilon_{zz}^p, \varepsilon_{\varphi\varphi}^p, \varepsilon_{rz}^p)^T; \\
 \mathbf{F} &= (0, 0, rP_{rr}, rP_{zr}, v_r, 0, 0, v_z, 0, v_r, v_r, v_r, v_r, 0, 0, 0, 0)^T; \\
 \mathbf{K} &= (0, 0, -1, -1, -1, 0, 0, -1, 0, -M_{1111}F_{rr}, -M_{1133}F_{rr}, \\
 &\quad -M_{1313}F_{rz}, -M_{1122}F_{rr}, 0, 0, 0, 0)^T; \\
 \mathbf{G} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, v_z, v_z, v_v, v_z, 0, 0, 0, 0)^T; \\
 \mathbf{S} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -M_{1111}F_{zr}, \\
 &\quad -M_{1133}F_{zr}, -M_{1212}F_{rr}, -M_{1122}F_{zr}, 0, 0, 0, 0)^T; \\
 \mathbf{W} &= (0, 0, rP_{rz}, rP_{zz}, 0, v_z, v_r, 0, 0, v_z, v_z, v_z, v_z, 0, 0, 0, 0)^T; \quad (22) \\
 \mathbf{L} &= (0, 0, -1, -1, 0, -1, -1, 0, -1, \\
 &\quad -M_{1133}F_{zz}, -M_{3333}F_{zz}, -M_{1313}F_{zr}, -M_{2233}F_{zz}, 0, 0)^T; \\
 \mathbf{V} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, v_r, v_r, v_r, v_r, 0, 0, 0, 0)^T; \\
 \mathbf{N} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -M_{1133}F_{rz}, \\
 &\quad -M_{3333}F_{rz}, -M_{1313}F_{zz}, -M_{2233}F_{rz}, 0, 0, 0, 0)^T; \\
 \mathbf{P} &= (v_r, v_z, -P_{\varphi\varphi}, -P_{zr}, 0, 0, 0, 0, v_r/r, P_{10}, \\
 &\quad P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{15}, P_{16}, P_{17})^T,
 \end{aligned}$$

представим систему уравнений (11)–(13) в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \bar{\mathbf{K}} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial r} + \bar{\mathbf{S}} \cdot \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial r} + \bar{\mathbf{L}} \cdot \frac{\partial \mathbf{W}(\mathbf{U})}{\partial z} + \bar{\mathbf{N}} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{U})}{\partial z} = \mathbf{P}(\mathbf{U}), \quad (23)$$

где \mathbf{U} – столбец неизвестных; $\bar{\mathbf{K}}, \bar{\mathbf{L}}, \bar{\mathbf{N}}, \bar{\mathbf{S}}$ – диагональные матрицы, ненулевыми элементами которых являются элементы столбцов $\mathbf{K}, \mathbf{L}, \mathbf{N}, \mathbf{S}$, а $\mathbf{P}(\mathbf{U})$ – столбец правой части, элементы которого $P_{14} \dots P_{17}$ определяются правой частью уравнений (13), а $P_{10} \dots P_{13}$ имеют вид

$$\begin{aligned}
 P_{10} &= M_{1122}F_{\varphi\varphi}v_r/r - M_{1111}P_{14} - M_{1122}P_{16} - M_{1133}P_{15}; \\
 P_{11} &= M_{2233}F_{\varphi\varphi}v_r/r - M_{3311}P_{14} - M_{3333}P_{16} - M_{2233}P_{15}; \\
 P_{12} &= M_{2222}F_{\varphi\varphi}v_r/r - M_{1122}P_{14} - M_{2233}P_{16} - M_{2222}P_{15}; \\
 P_{13} &= -2M_{1313}P_{17}.
 \end{aligned} \quad (24)$$

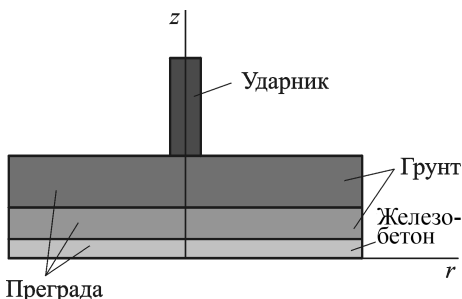


Рис. 1. Схема взаимодействия ударника с многослойной преградой

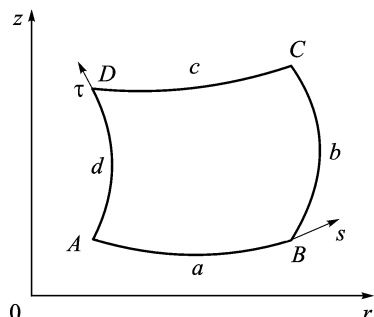


Рис. 2. Адаптивная система координат

Для численного решения системы (23) с граничными и начальными условиями (9), (10) введем для области решения V (рис. 1) адаптивную разностную регулярную сетку, образованную четырехугольными криволинейными ячейками (рис. 2), которую далее будем называть ленточной адаптивной сеткой (ЛАС). В работе [13] приведен алгоритм построения ЛАС, согласно которому область V представляется в виде совокупности “крупных” криволинейных четырехугольников V_i . В каждой области V_i вводят параметрические координаты (s, τ) , связанные с уравнениями четырех кривых, ограничивающих этот четырехугольник, и определяют преобразование

$$z = f_z(s, \tau), \quad r = f_r(s, \tau), \quad (25)$$

преобразующее криволинейный четырехугольник V_i в квадрат $V_{st} = [0, 1] \times [0, 1]$. Если заданы стороны a, b, c, d криволинейного четырехугольника V_i в координатах (z, r) как функции аргументов s, τ

$$\begin{cases} z = z_a(s), \\ r = r_a(s), \end{cases} \quad \begin{cases} z = z_b(\tau), \\ r = r_b(\tau), \end{cases} \quad \begin{cases} z = z_c(s), \\ r = r_c(s), \end{cases} \quad \begin{cases} z = z_d(\tau), \\ r = r_d(\tau) \end{cases} \quad (26)$$

с условиями согласования этих кривых

$$\begin{cases} z_a(1) = z_b(0), r_a(1) = r_b(0), z_b(1) = z_c(1), r_b(1) = r_c(1), \\ z_c(0) = z_d(1), r_c(0) = r_d(1), z_d(0) = z_a(0), r_d(0) = r_a(0), \end{cases} \quad (27)$$

то преобразование (25) имеет вид

$$\begin{cases} f_z(s, \tau) = P_z(s, \tau) - (P_z(0, \tau) - z_d(\tau))(1-s) - s(P_z(1, \tau) - z_b(\tau)); \\ f_r(s, \tau) = P_r(s, \tau) - (P_r(0, \tau) - r_d(\tau))(1-s) - s(P_r(1, \tau) - r_b(\tau)), \end{cases} \quad (28)$$

где

$$\begin{cases} P_z(s, \tau) = (1 - \tau)z_a(s) + \tau z_c(s), \\ P_r(s, \tau) = (1 - \tau)r_a(s) + \tau r_c(s). \end{cases} \quad (29)$$

Вычисляем матрицу Якоби

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial z} & \frac{\partial \tau}{\partial z} \\ \frac{\partial s}{\partial r} & \frac{\partial \tau}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial r}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial \tau} & \frac{\partial r}{\partial \tau} \end{pmatrix}^{-1}. \quad (30)$$

для перехода от координат (s, τ) к координатам (z, r) .

В данной работе функции (29) аппроксимировали кубическими сплайнами, заданными опорными точками. В каждом из криволинейных четырехугольников V_i введена локальная разностная сетка, затем отдельные сетки для каждого четырехугольника объединены в единую разностную сетку, охватывающую всю область V .

Отличительная особенность алгоритма построения разностной сетки состоит в том, что узлы единой разностной сетки пронумерованы единым списком (сетка при этом описывается ленточным образом) и их характеристики (координаты в системах (z, r) и (s, τ) , элементы обратной матрицы Якоби, номера соседних узлов) представлены единым списком. Кроме того, в сеточных массивах помещена информация о номерах соседних четырех узлов, которым присвоены индексы L_j, R_j, B_j, U_j , обозначающие номера соседей j -го узла слева, справа, снизу и сверху соответственно (рис. 3). Координаты узла сетки при таком подходе обозначаются как (S_j, T_j) , разностные аппроксимации функции $f(s, \tau)$ — как $f_j = f(S_j, T_j)$, а разностные аппроксимации производных принимают следующий вид (например, правая разность):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(r_j, z_j)}{\partial r} &\approx \frac{f_{R_j} - f_j}{S_{R_j} - S_j} Q_{11j} + \frac{f_{U_j} - f_j}{T_{U_j} - T_j} Q_{12j}; \\ \frac{\partial f(r_j, z_j)}{\partial z} &\approx \frac{f_{R_j} - f_j}{S_{R_j} - S_j} Q_{21j} + \frac{f_{U_j} - f_j}{T_{U_j} - T_j} Q_{22j}. \end{aligned} \quad (31)$$

Такую разностную аппроксимацию функций и производных использовали для построения разностной схемы системы уравнений (23). Был применен один из наиболее экономичных по затратам машинного времени конечно-разностный метод решения системы (23) — метод типа Мак-Кормака [13], состоящий из четырех этапов; во введенных обозначениях он принимает следующий вид.

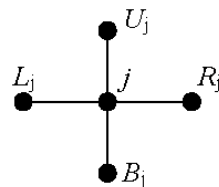


Рис. 3. Узел разностной сетки с четырьмя соседними узлами в ЛАС

Этап 1. Предиктор

$$U_j^{n+1/2} = U_j^n - \frac{\Delta t}{2} \bar{K}_j^n \left(\frac{F(U_{R_j}^n) - F(U_j^n)}{S_{R_j} - S_j} Q_{21j} + \frac{F(U_{U_j}^n) - F(U_j^n)}{T_{U_j} - T_j} Q_{22j} \right) - \frac{\Delta t}{2} \bar{S}_{i,j}^n \left(\frac{G(U_{R_j}^n) - G(U_j^n)}{S_{R_j} - S_j} Q_{21j} + \frac{G(U_{U_j}^n) - G(U_j^n)}{T_{U_j} - T_j} Q_{22j} \right) - \frac{\Delta t}{2} \bar{L}_{i,j}^n \left(\frac{W(U_{R_j}^n) - W(U_j^n)}{S_{R_j} - S_j} Q_{11j} + \frac{W(U_{U_j}^n) - W(U_j^n)}{T_{U_j} - T_j} Q_{12j} \right) - \frac{\Delta t}{2} \bar{N}_{i,j}^n \left(\frac{V(U_{R_j}^n) - V(U_j^n)}{S_{R_j} - S_j} Q_{11j} + \frac{V(U_{U_j}^n) - V(U_j^n)}{T_{U_j} - T_j} Q_{12j} \right). \quad (32)$$

Этап 2. Корректор

$$\tilde{U}_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left(U_j^{n+1/2} + U_j^n \right) - \frac{\Delta t}{2} \bar{K}_j^n \left(\frac{F(U_j^n) - F(U_{L_j}^n)}{S_j - S_{L_j}} Q_{21j} + \frac{F(U_j^n) - F(U_{B_j}^n)}{T_j - T_{B_j}} Q_{22j} \right) - \frac{\Delta t}{2} \bar{S}_{i,j}^n \left(\frac{G(U_j^n) - G(U_{L_j}^n)}{S_j - S_{L_j}} Q_{21j} + \frac{G(U_j^n) - G(U_{B_j}^n)}{T_j - T_{B_j}} Q_{22j} \right) - \frac{\Delta t}{2} \bar{L}_{i,j}^n \left(\frac{W(U_j^n) - W(U_{L_j}^n)}{S_j - S_{L_j}} Q_{11j} + \frac{W(U_j^n) - W(U_{B_j}^n)}{T_j - T_{B_j}} Q_{12j} \right) - \frac{\Delta t}{2} \bar{N}_{i,j}^n \left(\frac{V(U_j^n) - V(U_{L_j}^n)}{S_j - S_{L_j}} Q_{11j} + \frac{V(U_j^n) - V(U_{B_j}^n)}{T_j - T_{B_j}} Q_{12j} \right). \quad (33)$$

Этап 3. Учет правой части

$$\tilde{\tilde{U}}_j^{n+1} = \tilde{U}_j^{n+1} + \Delta t P(U_j^n). \quad (34)$$

Этап 4. Сглаживание

$$U_i^{n+1} = \tilde{\tilde{U}}_i^{n+1} + \alpha (U_{R_j}^n + U_{L_j}^n - 4U_j^n + U_{U_j}^n + U_{B_j}^n), \quad (35)$$

где α — коэффициент искусственной вязкости.

Моделирование процесса динамического разрушения и проникания ударника. Приведенные разностные соотношения (31)–(34) позволяют рассчитывать все характеристики ударника и мишени при

непрерывных процессах деформирования, т.е. при отсутствии разрушения. Однако сам процесс проникания ударников в преграду как раз и состоит из стадий зарождения трещин, их распространения и образования отверстия в преграде. При численных расчетах этот процесс моделируется следующим образом.

Этап зарождения трещин. В процессе непрерывного деформирования в каждой расчетной точке ударника и мишени проверяется условие отсутствия разрушения $\pi_\alpha < 1$, где π_α — параметры повреждаемости материала, представляющие собой функции инвариантов тензора истинных напряжений Коши (силовой критерий):

$$\pi_\alpha = \pi_\alpha(Y_\beta(T_{ij})). \quad (36)$$

Инварианты выбираются в соответствии с группой симметрии рассматриваемого материала (изотропные, трансверсально-изотропные или ортотропные). Критерий прочности преграды в этом случае оказывается подобным критериям пластичности, но только пределы текучести в них заменяются на соответствующие пределы прочности. Для трансверсально-изотропных материалов рассмотрим модель, содержащую два параметра повреждаемости:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= (Y_1^+/\sigma_{1T}^*)^2 + (Y_1/\sigma_{1T}^*)^2 + (Y_4/\sigma_{4S}^*)^2; \\ \pi_2 &= (Y_2^+/\sigma_{2T}^*)^2 + (Y_2/\sigma_{2C}^*)^2 + (Y_3/\sigma_{3S}^*)^2, \end{aligned} \quad (37)$$

где $\sigma_{\gamma T}^*$, $\sigma_{\gamma C}^*$, $\sigma_{\gamma S}^*$ — пределы прочности на растяжение, сжатие и сдвиг в соответствующем направлении, а инварианты тензора напряжений определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} Y_1 &= T_{zz}; \quad Y_2 = T_{rr} + T_{\varphi\varphi}; \quad Y_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} |T_{rr} - T_{\varphi\varphi}|; \quad Y_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} |T_{rz}|; \\ Y_1^+ &= \frac{1}{2}(Y_1 + |Y_1|); \quad Y_1^- = \frac{1}{2}(|Y_1| - Y_1); \\ Y_2^+ &= \frac{1}{2}(Y_2 + |Y_2|); \quad Y_2^- = \frac{1}{2}(|Y_2| - Y_2). \end{aligned} \quad (38)$$

В соответствии с этой моделью существуют два независимых параметра повреждаемости, один из которых описывает повреждения в поперечном направлении и при межслойных сдвигах, а другой — в продольном направлении и при продольных сдвигах. Эта модель хорошо описывает эффекты разрушения продольно-поперечно армированных материалов.

Для изотропных сред рассматривается модель с одним параметром повреждаемости, для которого выбрано следующее выражение:

$$\begin{aligned} \pi &= (Y_T^+/\sigma_T^*)^2 + (Y_T/\sigma_C^*)^2 + (Y_T/\sigma_S^*)^2/3; \\ Y_T^+ &= \frac{1}{2}(Y_T + |Y_T|); \quad Y_T^- = \frac{1}{2}(|Y_T| - Y_T); \\ Y_T^2 &= \frac{1}{2} \left((T_{rr} - T_{zz})^2 + (T_{\varphi\varphi} - T_{zz})^2 + (T_{zz} - T_{\varphi\varphi})^2 + 6T_{rz}^2 \right); \\ Y_T &= \frac{1}{3}(T_{rr} + T_{zz} + T_{\varphi\varphi}), \end{aligned} \tag{39}$$

где σ_T^* , σ_C^* , σ_S^* — пределы прочности на растяжение, сжатие и сдвиг, соответственно.

Этап распространения трещин. Если в какой-либо расчетной точке выполняется условие $\pi_\alpha \geq 1$, то это означает, что в локальной окрестности этой точки происходит зарождение макротрещины с последующим ее ростом. При численном расчете зарождение макротрещины моделируется обнулением компонент тензора напряжений Коши в данной расчетной точке: вместо определяющих соотношений упругопластичности (6) в ней задаются условия $T_{ij} = 0$. Распространение трещины в преграде (или ударнике) происходит, если после выполнения предельного условия $\pi_\alpha(x_*^i, t_*) \geq 1$ в точке x_*^i в момент времени t_* в какой-либо из ее соседних точек y_*^i в момент времени $t_* + \Delta t$ реализуется то же самое условие $\pi_\alpha(y_*^i, t_* + \Delta t) \geq 1$. В этом случае происходит прирост трещины на величину $\Delta x_*^i = y_*^i - x_*^i$.

Этап разлета осколков и проникания ударника в образовавшееся отверстие в данной работе не рассматривается.

Результаты численного моделирования. Рассмотрена задача о прямом ударе ударника по многослойной преграде (см. рис. 1), состоящей из трех слоев: первый и второй слои представляли собой грунты различной плотности (изотропные среды), а третий — железобетонную плиту (трансверсально-изотропную среду). Ударник считается изотропной упругой средой.

При расчетах приняты следующие значения констант, характеризующих геометрические размеры преграды и ударника: расчетный радиус преграды $R_{N1} = 2R_0$; радиус ударника $R_{Nl} = 0,2R_0$; длина ударника $Z_{Nk} = 2R_0$; вдоль координаты z толщина первого слоя преграды $Z_{Nd} = R_0$, второго — $Z_{Ne} = 0,3R_0$ и третьего — $Z_{N0} = 0,3R_0$. Константы, характеризующие упругопластические и прочностные свойства ударника и слоев преграды, приведены в табл. 1 и 2. Начальная скорость ударника вдоль оси OZ в момент встречи с преградой при нормальном ударе равна 600 м/с.

На рис. 4–7 приведены некоторые из результатов расчетов. Визуализация расчетов осуществлялась с помощью специально разработанной программы 3-D анимации.

Значения констант материалов ударника и грунта

Характеристика	Ударник	Грунт (1-й слой)	Грунт (2-й слой)
Плотность, г/см ³	2,0	2,0	1,5
Модуль упругости, ГПа	100,0	0,1	10
Динамическая прочность, ГПа:			
на растяжение σ_T^*	0,25	0,005	0,007
на сжатие σ_C^*	0,3	0,01	0,01
при сдвиге σ_S^*	0,2	0,003	0,005
Начальный предел текучести при сдвиге σ_S , ГПа	0,05	0,002	0,002
Параметр пластического упрочнения H_0 , ГПа	0,1	0,001	0,002
Показатель пластического упрочнения n_0	0,9	0,9	0,9

Таблица 2

Значения констант материалов железобетонной плиты преграды

Характеристика	Значение
Средняя плотность, г/см ³	2,5
Модуль упругости, ГПа	10,0
Динамическая прочность на растяжение (сжатие), ГПа:	
σ_{1T}^* (σ_{1C}^*)	0,02 (0,1)
σ_{2T}^* (σ_{2C}^*)	0,1 (0,2)
Динамическая прочность на сдвиг σ_{3S}^* (σ_{4S}^*), ГПа	0,06 (0,01)
Начальные пределы текучести σ_{1S} , σ_{3S} , σ_{4S} , ГПа	0,01; 0,06; 0,007
Параметры пластического упрочнения H_1^0 ; H_2^0 ; H_3^0 ; H_4^0 , ГПа	0,01; 0,07; 0,07; 0,02
Показатели пластического упрочнения n_γ	0,9

Отметим некоторые особенности результатов численного моделирования процесса проникания. Разрушение грунта описывалось путем обнуления соответствующих компонент тензора напряжений в зоне разрушения; имеет место локализация процесса образования трещин в грунте в зоне максимальных сдвиговых напряжений — в окрестности острия ударника.

Аналогичен и характер разрушения железобетонных плит, однако начальная стадия разрушения реализуется, когда ударник еще не успевает полностью проникнуть в грунт. Причина этого — откольное разрушение плиты вследствие прохождения по преграде первичной волны сжатия, которая, отразившись от тыльной ее поверхности, вызывает межслойное разрушение в железобетонной плите. Это разрушение имеет вид межслойной откольной трещины.

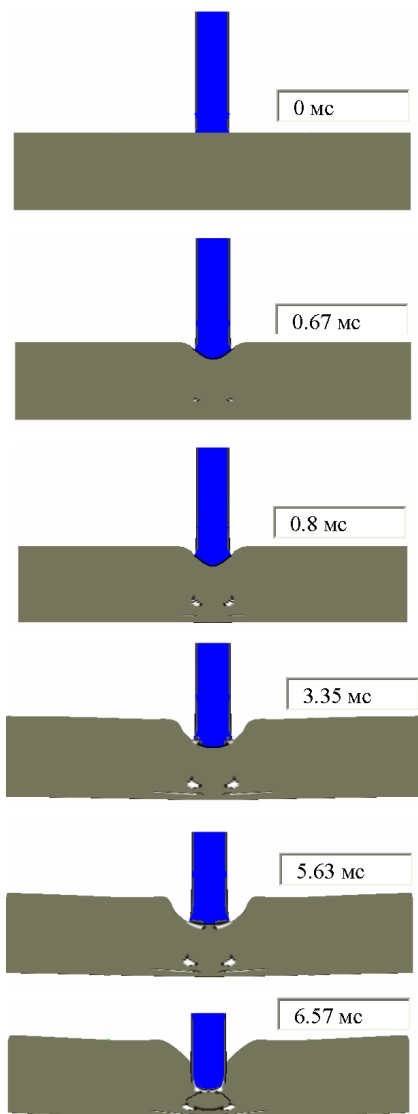


Рис. 4. Картина проникания ударника в многослойную преграду в различные моменты времени

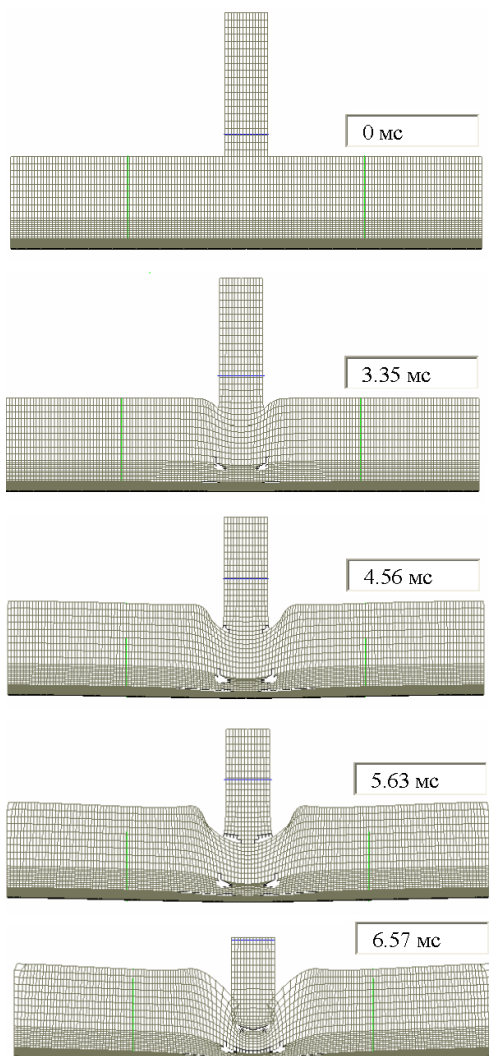


Рис. 5. Разностная сетка для ударника и многослойной преграды в различные моменты времени проникания (с учетом разрушения мишени)

По мере проникания ударника в плиту происходит дополнительное разрушение плиты в зоне максимальных межслойных напряжений, возникающих в окрестности передней части ударника.

Общая картина разрушения преграды представлена на рис. 4, 5.

На рис. 6, 7 показано распределение компоненты тензора напряжений Коши T_{zz} в преграде в различные моменты времени. Нормальная скорость ударника по мере проникания в преграду уменьшается и в момент входа в железобетонную плиту составляет ≈ 387 м/с. После полного проникания в преграду скорость ударника составляет ≈ 253 м/с.

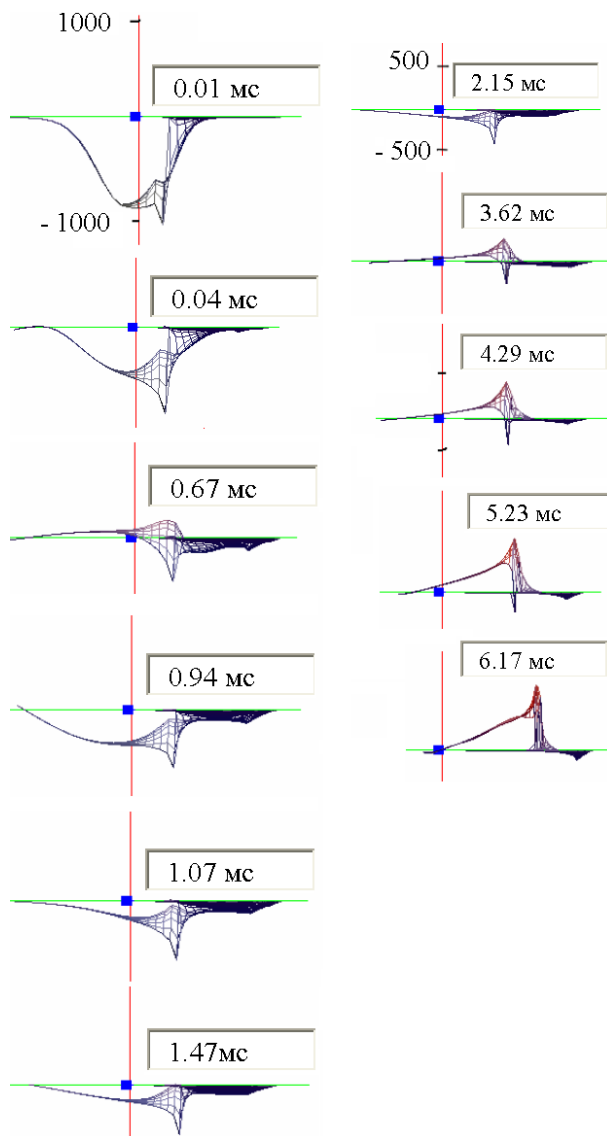


Рис. 6. Распределение напряжений T_{zz} , МПа, в ударнике и преграде вдоль оси OZ (направление удара и проникания) в различные моменты времени

Следует заметить, что с прикладной точки зрения приведенные результаты являются ориентировочными, поскольку методика расчетов содержит в себе определенные аппроксимации, допущения и приближения. Это относится как к выбранной модели материалов преграды и ударника, так и к значениям характеристик материалов (см. табл. 1 и 2), а также к вычислительной погрешности, которая неизбежно присутствует в задачах такого типа.

Выводы. Разработаны математические модели динамического поведения ударников и многослойных анизотропных преград при ударно-проникающих воздействиях с учетом конечных упругопласти-

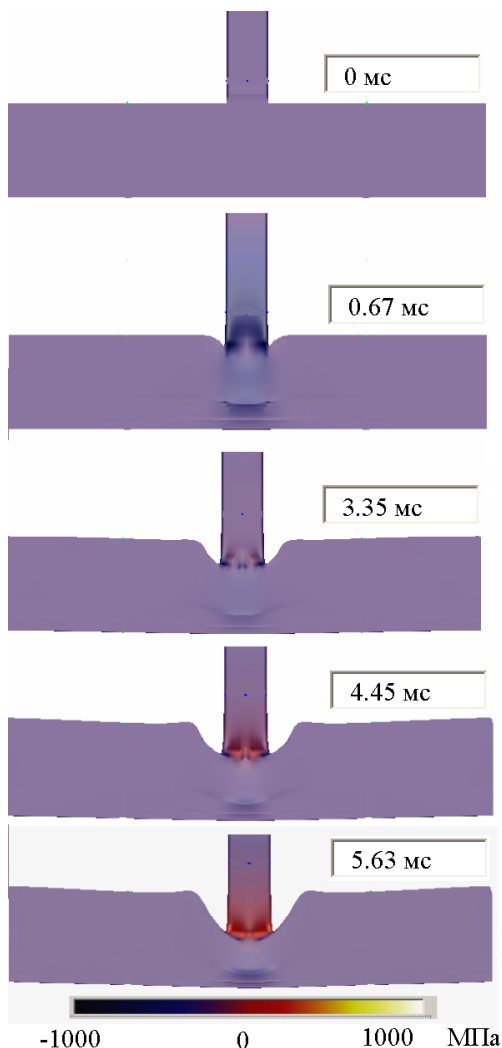


Рис. 7. Поле напряжений T_{zz} , МПа, в ударнике и преграде в различные моменты времени

ческих деформаций и разрушения материалов. Разработана методика для численной реализации разработанных математических моделей и осуществления компьютерного моделирования динамического поведения ударников и многослойных анизотропных преград при ударно-проникающих воздействиях. С помощью разработанной математической модели и программного обеспечения проведено численное моделирование процесса проникания ударника в многослойную преграду. Разработанная методика может служить основой для получения рекомендаций по выбору рациональных конструкций защитных перспективных преград и ударников.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 06-08-01448а и 07-08-00574.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ш е м я к и н Е. И. Динамические задачи теории упругости и пластичности. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та. – 1968.
2. П е т р о в И. Б. Волновые и откольные явления в слоистых оболочках конечной толщины // МТТ. – 1986. – № 4. – С. 118–124.
3. К о н д а у р о в В. И., К у к у д ж а н о в В. Н. Об определяющих уравнениях и численном решении некоторых задач динамики упруго-пластической среды с конечными деформациями // В кн. Численные методы в механике твердого деформируемого тела. – М.: ВЦ АН СССР. – 1978. – С. 84–121.
4. К о н д а у р о в В. И., П е т р о в И. Б., Х о л о д о в А. С. Численное моделирование процесса внедрения жесткого тела вращения в упругопластическую среду // ЖВМ и МФ. – 1984. – № 4. – С. 132–139.
5. К и р и л е н к о Г. А., С а г о м о н я н А. Я. Численное моделирование проникания в грунт // Изв. АН АрмССР. Механика. – 1986. – Т. 39, № 1. – С. 50–54.
6. Р а х м а т у л и н Х. А., С а г о м о н я н А. Я., А л е к с е е в Н. А. Вопросы динамики грунтов. – М.: Изд-во МГУ, 1964.
7. К р а в ч у к А. С., М а й б о р о д а В. П., Х о л и н Н. Н. Высокоскоростное деформирование конструкционных материалов. – М.: Машиностроение, 1986.
8. Б а г д о е в А. Г., В а н ц я н А. А. Проникание тонкого тела в упругие анизотропные среды // Изв. АН АрмССР. Механика. – 1983. – Т. 36, № 6. – С. 23–30.
9. S i m o J. C., M i e h e C. Associative coupled thermoplasticity on finite strains: Formulations, numerical analysis and implementation // Comp. Math. in Appl. Mech. & Eng. – 1992. – V. 98. – P. 94–111.
10. Д и м и т р и е н к о Ю. И. Анизотропная теория конечных упруго-пластических деформаций // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Естественные науки”. – 2003. – № 2. – С. 47–61.
11. Д и м и т р и е н к о Ю. И., Б е л е н о в с к а я Ю. В. Численное моделирование процессов пробивания перспективных материалов // В сб. Аэрокосмические технологии. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2002. – С. 78–84.
12. Д и м и т р и е н к о Ю. И., Б е л е н о в с к а я Ю. В., Д з а г а н и я А. Ю., В л а с к и н А. В. Высокопроизводительное численное моделирование динамических процессов взаимодействия ударников и композитных мишеней // В сб. Аэрокосмические технологии. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2004. – С. 114–116.
13. Д и м и т р и е н к о Ю. И., Д з а г а н и я А. Ю., Б е л е н о в с к а я Ю. В., В л а с к и н А. В. Разработка метода ленточных адаптивных сеток для решения задач динамики больших упруго-пластических деформаций // Сб. Современные естественно-научные и гуманитарные проблемы. – М.: Логос, 2005. – С. 459–469.
14. Д и м и т р и е н к о Ю. И., Д з а г а н и я А. Ю., Б е л е н о в с к а я Ю. В. Моделирование ударно-волновых процессов в композитных броневых материалах // Труды конференции, посвященной 90-летию В.И. Феодосьева. – 2006. – С. 146–149.
15. Д и м и т р и е н к о Ю. И. Тензорное исчисление. – М.: Высш. шк. – 2001. – 575 с.

Статья поступила в редакцию 8.10.2007



Юрий Иванович Дмитриенко родился в 1962 г., окончил в 1984 г. МГУ им. М.В. Ломоносова. Д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой “Вычислительная математика и математическая физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана, действительный член Академии инженерных наук. Автор более 140 научных работ в области вычислительной механики, нелинейного тензорного анализа, термомеханики композитов, математического моделирования в материаловедении.

Yu.I. Dimitrienko (b.1962) graduated from the Lomonosov Moscow State University in 1984. D. Sc. (Phys.-Math.), professor, head of “Computational Mathematics and Mathematical Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University.

Full member of the Russian Academy of Engineering Sciences. Author of more than 140 publications in the field of computational mechanics, nonlinear tensor analysis, thermomechanics of composite materials, mathematical simulation in science of materials.



Андрей Юрьевич Дзагания родился в 1980 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2003 г. Ассистент кафедры “Вычислительная математика и математическая физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор ряда научных работ по численным методам решения динамических задач механики.

A.Yu. Dzaganiya (b. 1980) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2003. Assistant of “Computational Mathematics and Mathematical Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of some publications in the field of numerical methods of solving dynamical problems of mechanics.



Юлия Владимировна Беленовская родилась в 1980 г., окончила МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2003 г. Аспирант кафедры “Вычислительная математика и математическая физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор ряда научных работ по математическому моделированию динамических процессов в твердых телах.

Yu.V. Belenovskaya (b. 1980) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2003. Post-graduate of “Computational Mathematics and Mathematical Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of some publications in the field of mathematical simulation of dynamical processes in rigid bodies.



Милана Владимировна Воронцова родилась в 1980 г., окончила МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2003 г. Аспирант кафедры “Вычислительная математика и математическая физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор ряда научных работ по математическому моделированию быстропротекающих процессов в сплошных средах.

M.V. Vorontsova (b. 1980) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2003. Post-graduate of “Computational Mathematics and Mathematical Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of some publications in the field of mathematical simulation of fast-running processes in continuum.