УДК 512.562

И. Г. Табакова

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ШВАРЦА ДЛЯ ЗАДАННОЙ ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЙ ОБЛАСТИ

Приведено решение задачи Шварца для голоморфных функций двух комплексных переменных, указаны необходимые и достаточные условия ее разрешимости.

Теория краевых задач для голоморфных функций многих комплексных переменных является быстро развивающейся ветвью многомерного комплексного анализа в связи с широким применением результатов исследований как в математике (сингулярные и бисингулярные интегральные уравнения, уравнения типа свертки и др.), так и при рассмотрении большого числа прикладных задач в теории упругости, гидродинамики и аэродинамики, дифракции, теории массового обслуживания, в теории переноса частиц и т.д.

Первоначально возникла пространственная краевая задача Римана в трудах классиков математики Б. Римана, Д. Гильберта, А. Пуанкаре как единственное чисто теоретическое обобщение одномерной краевой задачи Римана.

Теория краевых задач для голоморфных функций получила свое дальнейшее развитие в работах В.С. Владимирова [3], Г.Л. Луканкина [10–14], В.И. Боганова [1], И.Н. Виноградовой [2], Х.П. Дзебисова [5, 6], С.Ю. Колягина, А.В. Латышева [8, 14], С.В. Рындиной [14], О.В. Лобановой [9], А.Л. Краснощекова [7] и др.

В настоящей статье исследуется задача Шварца для биполуплоскости, указываются необходимые и достаточные условия разрешимости такой задачи и проведено сопоставление этих условий с аналогичными условиями в задаче Шварца для бикруга. Здесь же рассмотрен аналог задачи Дирихле для бигармонической функции с кусочно-постоянными предельными значениями, заданными на прямоугольниках, исчерпывающих $R_{x_1 x_2^2}$. С помощью этой задачи получен простой аналог двумерного интеграла Кристоффеля–Шварца.

Задача Шварца. Как известно [6], задача Шварца для бикруга формулируется следующим образом: найти функцию $F(w_1, w_2) = u + iv$, голоморфную в бикруге $B_2 = \{(w_1, w_2) : |w_1| < 1, |w_2| < 1\} = \nabla^+ \times \Delta^+$ по вещественной функции $u(t_1, t_2)$, заданной и непрерывной по Гельдеру на остове $T^2 = \{(t_1, t_2) : |t_1| = 1, |t_2| = 1\}$ границы круга B_2.

Необходимые и достаточные условия разрешимости этой задачи таковы [6]:

$$(Ku)(w_1, w_2) = \begin{cases} (Ku)(w_1, 0), (w_1, w_2) \in \nabla^- \times \Delta^+; \\ (Ku)(0, w_2), (w_1, w_2) \in \nabla^+ \times \Delta^-, \end{cases} \tag{1}$$

где $\nabla^{\pm} = \{|w| \leqslant 1\}$ и

$$(Ku)(w_1, w_2) \equiv \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint\limits_{T^2} \frac{u(\tau_1, \tau_2)}{(\tau_1 - w_1)(\tau_2 - w_2)} d\tau_1 d\tau_2.$$

При выполнении условий разрешимости (1) решение задачи Шварца для бикруга дает формула

$$F(w_1, w_2) = 2(Ku)(w_1, w_2) - (Ku)(0, 0) + iC, \tag{2}$$

где C — произвольная вещественная постоянная.

Задачу Шварца для биполуплоскости

$$D = \{(Z_1, Z_2) : \mathrm{Im} Z_1 > 0, \mathrm{Im} Z_2 > 0\}$$

сформулируем так: найти функцию $\varPhi(z_1, z_2) = u + iv$, голоморфную в D и непрерывную на $\hat{\varGamma}^2 = \varGamma^2 \cup \{(\infty, \infty)\}$, где $\Gamma^2 = \{(Z_1, Z_2) : \mathrm{Im} Z_1 = 0, \quad \mathrm{Im} Z_2 = 0\}$ — остов границы ∂D, по ее вещественной части $\gamma(x_1, x_2) \in \hat{W} \cap H\left(\hat{\Gamma}^2\right)$, где $\hat{W}$ — кольцо непрерывных на $\hat{\varGamma}^2$ функций,

$$\mathrm{Re} \varPhi \,|_{\hat{\varGamma}^2} \equiv U \,|_{\hat{\varGamma}^2} = \gamma. \tag{3}$$

Принимая во внимание, что каждую непрерывную функцию $g(x_1, x_2)$, определенную на $\varGamma^2$, можно задать с помощью структурной формулы [4]

$$g(x_1, x_2) = g_{12} + g_1(x_2) + g_2(x_1) + g_0(x_1, x_2), \tag{4}$$

где

$$g(\infty, x_2) = g_{12} + g_1(x_2); \quad g(x_1, \infty) = g_{12} + g_2(x_1); \quad g(\infty, \infty) = g_{12},$$

перепишем граничное условие (3) в виде четырех соотношений:

$$\left. \begin{array}{l} U_{12} = \gamma_{12}; \\ \mathrm{Re} \varPhi_j(x_{3-j}) = \gamma_j(x_{3-j}), \quad j = 1,\ 2, \\ \mathrm{Re} \varPhi_0(x_1, x_2) = \gamma_0(x_1, x_2). \end{array} \right\} \tag{5}$$

Положим

$$\varphi_j(\xi_{3-j}) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \gamma_j(x_{3-j}) e^{-ix_{3-j}\xi_{3-j}} dx_{3-j} \equiv \left(V_{3-j}^{-1} \gamma_j\right)(\xi_{3-j}), \quad j = 1,\ 2, \tag{6}$$

$$\varphi_0(\xi_1,\xi_2) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\int\limits_{-\infty}^{\infty} \gamma_0(x_1,x_2) e^{-i(x_1\xi_1+x_2\xi_2)} dx_1 dx_2 \equiv \left(V_{12}^{-1}\gamma_0\right)(\xi_1,\xi_2). \quad (7)$$

Так как $\gamma_j(x_{3-j}), j = 1, 2$ и $\gamma_0(x_1,x_2)$ — по условию вещественные функции, то используя формулы (6) и (7), найдем, что $\overline{\varphi_j(-\xi_{3-j})} = \varphi_j(\xi_{3-j}), \quad j = 1, 2$ и $\overline{\varphi_j(-\xi_1,-\xi_2)} = \varphi_0(\xi_1,\xi_2)$. Поэтому $\gamma_j(x_{3-j})$, $j = 1, 2$, и $\gamma_0(x_1,x_2)$ можно представить соответственно в виде

$$\gamma_j(x_{3-j}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_j(\xi_{3-j}) e^{ix_{3-j}\xi_{3-j}} d\xi_{3-j}, \; j = 1, 2 \quad (8)$$

и

$$\gamma_0(x_1,x_2) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\left\{\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} + \int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{0}\right\}\varphi_0(\xi_1,\xi_2) e^{i(x_1\xi_1+x_2\xi_2)} d\xi_1 d\xi_2. \quad (9)$$

Из разложения (9) видно, что для того, чтобы функция $\gamma(x_1,x_2)$ была предельным значением при $(z_1,z_2) \to (x_1,x_2)$, где $(z_1,z_2) \in D$, $(x_1,x_2) \in \varGamma^2$, вещественной части функции, голоморфной в D, необходимо и достаточно, чтобы

$$\gamma_0(\xi_1,\xi_2) = \left(V_{12}^{-1}\gamma_0\right)(\xi_1,\xi_2) = 0 \;\text{ при }\; \xi_1 > 0, \;\; \xi_2 < 0 \quad (10)$$

или, что то же самое,

$$\varphi_0(\xi_1,\xi_2) = \left(V_{12}^{-1}\gamma_0\right)(\xi_1,\xi_2) = 0 \;\text{ при }\; \xi_1 < 0, \;\; \xi_2 > 0. \quad (11)$$

При выполнении условия (10)

$$\gamma_0(x_1,x_2) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\varphi_0(\xi_1,\xi_2) e^{i\left(x_1\xi_1+x_2\xi_2\right)} d\xi_1 d\xi_2. \quad (12)$$

Исходя из (8) и (11), учитывая формулы (6) и (7) и равенства

$$\int\limits_0^{\infty} e^{iz_j\xi_j} d\xi_j = \frac{i}{z_j}, j = 1, 2, \quad \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} e^{i(z_1\xi_1+z_2\xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 = -\frac{1}{z_1 z_2},$$

справедливые при $\operatorname{Im} z_j > 0, \; j = 1, 2$, получим формулы Пуассона

$$U_j(z_{3-j}) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \gamma_j(\xi_{3-j}) \operatorname{Re}\frac{1}{i(\xi_{3-j} - z_{3-j}}) d\xi_{3-j} =$$

$$= \frac{y_{3-j}}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_j(\xi_{3-j}) d\xi_{3-j}}{y_{3-j}^2 + (\xi_{3-j} - x_{3-j})^2} \equiv (\varPi_{3-j}\gamma_j)(z_{3-j}), \quad j = 1,\, 2; \quad (13)$$

$$U_0(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi^2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \gamma_0(\xi_1, \xi_2) \operatorname{Re} \frac{-1}{(\xi_1 - z_1)(\xi_2 - z_2)} d\xi_1 d\xi_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \gamma_0\left(\xi_1, \xi_2\right) \frac{y_1 y_2 - \left(\xi_1 - x_1\right)\left(\xi_2 - x_2\right)}{\left[y_1^2 + \left(\xi_1 - x_1\right)^2\right]\left[y_2^2 + \left(\xi_2 - x_2\right)^2\right]} d\xi_1 d\xi_2. \quad (14)$$

Учитывая равенство

$$\frac{y}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{y^2 + (t - x)^2} = 1,$$

получим формулу Пуассона

$$U\left(z_1, z_2\right) = \left(\varPi_{12}\gamma\right)\left(z_1, z_2\right) -$$

$$- \frac{1}{2\pi^2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{y_1 y_2 - \left(\xi_1 - x_1\right)\left(\xi_2 - x_2\right)}{\left[y_1^2 + \left(\xi_1 - x_1\right)^2\right]\left[y_2^2 + \left(\xi_2 - x_2\right)^2\right]} \gamma_0\left(\xi_1, \xi_2\right) d\xi_1 d\xi_2, \quad (15)$$

где

$$\left(\varPi_{12}\gamma\right)\left(z_1, z_2\right) = \frac{y_1 y_2}{\pi^2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_0\left(\xi_1, \xi_2\right) d\xi_1 d\xi_2}{\left[y_1^2 + \left(\xi_1 - x_1\right)^2\right]\left[y_2^2 + \left(\xi_2 - x_2\right)^2\right]},$$

соответствующую исходной задаче Шварца (3).

Исходя из формул (12) и (13), убедимся также, что имеют место формулы Шварца

$$\varPhi_j\left(z_{3-j}\right) = \left(K_{3-j}\gamma_j\right)\left(z_{3-j}\right) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_j\left(\xi_{3-j}\right) d\xi_{3-j}}{\xi_{3-j} - z_{3-j}}, \quad j = 1,\, 2,$$

$$\varPhi_0\left(z_1, z_2\right) = \left(K_{12}\gamma_0\right)\left(z_1, z_2\right) = \frac{1}{2(\pi i)^2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_0\left(\xi_1, \xi_2\right) d\xi_1 d\xi_2}{\left(\xi_1 - w_1\right)\left(\xi_2 - w_2\right)},$$

а решение исходной задачи Шварца (3) дает формула

$$\varPhi\left(z_1, z_2\right) = \left(K_{12}\gamma\right)\left(z_1, z_2\right) - \frac{1}{2}\left(K_{12}\gamma_0\right)\left(z_1, z_2\right) + iC. \quad (16)$$

Итак, имеет место

Теорема 1. Задача Шварца для биполуплоскости разрешима тогда и только тогда, когда заданная функция $\gamma\left(x_1, x_2\right) \in W \cap H\left(\hat{\Gamma}^2\right)$

удовлетворяет условию (10). При выполнении условия (10) решение задачи дает интеграл Шварца (15).

Установим связь условий разрешимости (1) и (10) задач Шварца для бикруга и биполуплоскости. Используя отображение

$$\left(W_1 = \frac{z_1 - i}{z_1 + i}, W_2 = \frac{z_2 - i}{z_2 + i}\right) : D \to B,$$

которое устанавливает взаимно однозначное соответствие точек биполуплоскости D и бикруга $B = \{(W_1, W_2) : |W_1| < 1,\ |W_2| < 1\}$, отобразим область $\nabla^- \times \Delta^+$ на область $D^{-+} = \{(z_1, z_2) :\ \mathrm{Im} z_1 < 0,\ \mathrm{Im} z_2 > 0\}$ а первому равенству условий (1) придадим следующий вид:

$$M(\gamma) \equiv \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2}{(\xi_1 - z_1)(\xi_2 - z_2)(\xi_1 + 1)(\xi_2 - 1)} = 0, \qquad (17)$$

где $\gamma(\xi_1, \xi_2) = u\left[t_1(\xi_1), t_2(\xi_2)\right]$. Принимая во внимание представление (4), перепишем равенство (16):

$$\frac{\gamma_{12}}{4} - \frac{1}{4\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_2(\xi_1) d\xi_1}{\xi_1 + i} - \frac{1}{4\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_1(\xi_2) d\xi_2}{\xi_2 - i} +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_1(\xi_2) d\xi_2}{\xi_2 - z_2} + M(\gamma_0) = 0. \qquad (18)$$

Так как $(-i, i) \in D^{-+}$, то, полагая $z_1 = -i, {}^{z}_{2} = i$, из последнего равенства найдем, что

$$\frac{\gamma_{12}}{4} - \frac{1}{4\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_2(\xi_1)\, d\xi_1}{\xi_1 + i} + \frac{1}{4\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_1(\xi_2)\, d\xi_2}{\xi_2 - i} = 0. \qquad (19)$$

Вычитая (18) из (17), получаем

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_1(\xi_2)\, d\xi_2}{\xi_2 - i} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_1(\xi_2)\, d\xi_2}{\xi_2 - z_2} + M(\gamma_0) = 0. \qquad (20)$$

Далее, если $z_1 = -i$ и $(-i, z_2) \in D^{-+}$, то из равенства (19) будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_1(\xi_2)\, d\xi_2}{\xi_2 - z_2} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_1(\xi_2)\, d\xi_2}{\xi_2 - i} = 0. \qquad (21)$$

Вычитая (20) из (19), получаем

$$M(\gamma_0) = 0. \qquad (22)$$

Так как при $\mathrm{Im} z_1 < 0$ и $\mathrm{Im} z_2 > 0$ справедливы равенства

$$\frac{1}{\xi_1 - z_1} = \frac{1}{i}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-i(\xi_1 - z_1)t_1} dt_1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{\xi_2 - z_2} = \frac{1}{i}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-i(\xi_2 - z_2)t_2} dt_2, \qquad (23)$$

то подставляя (22) в (21) и меняя порядок интегрирования, будем иметь

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} X(t_1, t_2)\, e^{i(z_1 t_1 + z_2 t_2)} dt_1 dt_2 = 0, \quad \forall (z_1, z_2) \in D^{-+}, \qquad (24)$$

где

$$X(t_1, t_2) = \\ = \begin{cases} 0, (t_1 > 0) \cup (t_2 < 0); \\ \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\gamma_0(\xi_1, \xi_2)}{(\xi_1 + i)(\xi_2 - i)} e^{-i(\xi_1 t_1 + \xi_2 t_2)} d\xi_1 d\xi_2, \ (t_1 < 0) \cap (t_2 > 0). \end{cases} \qquad (25)$$

Из (23) следует, что при $t_1 > 0, \ t_2 > 0$ имеет место равенство

$$f(t_1, t_2) \equiv \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_0(\xi_1, \xi_2)}{(\xi_1 + i)(\xi_2 - i)} e^{-i(\xi_1 t_1 + \xi_2 t_2)} d\xi_1 d\xi_2 = \\ = e^{-t_1 + t_2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_0(\xi_1, \xi_2)}{(\xi_1 + i)(\xi_2 - i)} e^{-i[(\xi_1 + i)t_1 + (\xi_2 - i)t_2]} d\xi_1 d\xi_2 = 0.$$

Вычислив комбинацию

$$f + f'_{t_1} - f'_{t_2} - f''_{t_1 t_2} \equiv 0,$$

убедимся, что при $t_1 > 0$, $t_2 < 0$

$$\left(V_{12}^{-1}\gamma_0\right)(t_1, t_2) = 0.$$

Итак, из условий разрешимости задачи Шварца для бикруга вытекают условия разрешимости такой же задачи для биполуплоскости.

Из полученных результатов следует

Лемма 1. Пусть функция $u(t_1, t_2) \in H(T^2)$ и удовлетворяет условиям (1). Тогда если функция $\gamma(x_1, x_2) = u\left[\dfrac{x_1 - i}{x_2 + i}, \dfrac{x_2 - i}{x_2 + i}\right] \in \hat{W}$, то она удовлетворяет условиям (10).

Пусть $M = \left[\alpha \leqslant \xi_1 \leqslant \beta,^{\delta} \leqslant \xi_2 \leqslant \sigma\right]$,

$$\gamma\left(\xi_1, \xi_2\right) = \begin{cases} \gamma_{12} + \gamma_1\left(\xi_2\right) + \gamma_2\left(\xi_1\right), \left(\xi_1, \xi_2\right) \in M; \\ 0, \quad \left(\xi_1, \xi_2\right) \in R^2_{\xi}/M, \end{cases} \tag{26}$$

и, значит, $\gamma_0\left(\xi_1, \xi_2\right) = 0$, тогда из формулы Пуассона (14) имеем

$$\begin{aligned} u\left(z_1, z_2\right) = \frac{\gamma_{12}}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{\beta - x_1}{y_1} - \operatorname{arctg}\frac{\alpha - x_1}{y_1}\right) \times \\ \times \left(\operatorname{arctg}\frac{\sigma - x_2}{y_2} - \operatorname{arctg}\frac{\delta - x_2}{y_2}\right) + \\ + \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{\beta - x_1}{y_1} - \operatorname{arctg}\frac{\alpha - x_1}{y_1}\right)\left(\mathit{\Pi}_2\gamma_1\right)\left(z_2\right) + \\ + \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sigma - x_2}{y_2} - \operatorname{arctg}\frac{\delta - x_2}{y_2}\right)\left(\mathit{\Pi}_1\gamma_2\right)\left(z_1\right). \end{aligned}$$

В частности, если

$$\gamma_0\left(\xi_1, \xi_2\right) = \begin{cases} \gamma_{12}, \quad \left(\xi_1, \xi_2\right) \in M; \\ 0, \quad \left(\xi_1, \xi_2\right) \in R^2_{\xi}, \end{cases} \tag{27}$$

то

$$\begin{aligned} u\left(z_1, z_2\right) = \frac{\gamma_{12}}{\pi^2}\left(\operatorname{arctg}\frac{\beta - x_1}{y_1} - \operatorname{arctg}\frac{\alpha - x_1}{y_1}\right) \times \\ \times \left(\operatorname{arctg}\frac{\delta - x_2}{y_2} - \operatorname{arctg}\frac{\sigma - x_2}{y_2}\right). \end{aligned}$$

Введем далее [10] углы φ_α и φ_β (ψ_δ и ψ_σ), образованные соответственно векторами $z_1 - \alpha$ и $z_1 - \beta$ ($z_2 - \delta$ и $z_2 - \sigma$) с действительной осью x_1 (x_2), с помощью которых последнюю формулу можно записать так:

$$u\left(z_1, z_2\right) = \frac{\gamma_{12}}{\pi^2}\left(\varphi_\beta - \varphi_\alpha\right)\left(\psi_\sigma - \psi_\delta\right) \equiv \frac{\gamma_{12}}{\pi^2}\omega_1\omega_2, \tag{28}$$

где $\omega_1 = \varphi_\alpha - \varphi_\beta, \quad \omega_2 = \psi_\delta - \psi_\sigma$. Отсюда, если $\gamma\left(\xi_1, \xi_2\right)$ определяется по формуле (25) ((26)), то формула Шварца (15) имеет вид

$$\begin{aligned} f\left(z_1, z_2\right) = \frac{\gamma_{12}}{\left(\pi i\right)^2}\ln\frac{\beta - z_1}{\alpha - z_1}\ln\frac{\sigma - z_2}{\delta - z_2} + \\ + \frac{1}{\pi i}\ln\frac{\beta - z_1}{\alpha - z_1}\left(K_2\gamma_1\right)\left(z_2\right) + \frac{1}{\pi i}\ln\frac{\sigma - z_2}{\delta - z_2}\left(K_1\gamma_2\right)\left(z_1\right) \end{aligned}$$

$$\left(f\left(z_1, z_2\right) = \frac{\gamma_{12}}{\left(\pi i\right)^2}\ln\frac{\beta - z_1}{\alpha - z_1}\ln\frac{\sigma - z_2}{\delta - z_2}\right).$$

Пусть теперь заданы точки $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(-\infty < a_1 < \ldots < a_n = \infty)$ и $b_1, b_2, \ldots, b_m$ $(-\infty < b_1 < \ldots < b_m = \infty)$, принадлежащие соответственно действительным осям x_1 и x_2.

Рассмотрим следующую задачу Дирихле: найти в D бигармоническую функцию $u(z_1, z_2)$, принимающую на прямоугольниках $M_{ij} = \{[a_{i-1}, a_i), [b_{j-1}, b_j)\}$ постоянные значения u_{ij}.

Используя формулу (27), убедимся, что решение этой задачи имеет вид

$$u(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \frac{u_{ij}}{\pi^2}(\varphi_{j+1} - \varphi_i)(\psi_{j+1} - \varphi_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\pi^2}(u_{i-1j-1} - u_{ij-1} - u_{i-1j} + u_{ij})\varphi_i\psi_j + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\pi}(u_{i-1m} - u_{im})\varphi_i +$$
$$+ \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\pi}(u_{nj-1} - u_{nj})\psi_j + u_{nm}, \quad (29)$$

где

$$\varphi_0 = \psi_0 = 0,^{\varphi}_{n+1} = \psi_{m+1} = \pi.$$

Следовательно, справедлива

Лемма 2. Решение задачи Дирихле для функции, бигармонической в биполуплоскости D, принимающей кусочно-постоянные значения u_{ij} на прямоугольниках M_{ij}, определяется по формуле (28). В частности, если

$$\Delta u_{ij} = u_{i-1j-1} - u_{ij-1} - u_{i-1j} + u_{ij} = 0,$$

то $u_{ij} = u_{i0} - u_{0j} - u_{00}$, а формула (28) становится более простой:

$$u(z_1, z_2) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\pi}(u_{i-10} - u_{i0})\varphi_i + \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\pi}(u_{0j-1} - u_{0j})\psi_j + u_{nm}. \quad (30)$$

Теперь рассмотрим двумерный аналог задачи Кристоффеля–Шварца: найти функцию $f(z_1, z_2)$, голоморфную в D, такую, что при каждом фиксированном z_1 (z_2) она отображает верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im} z_2 > 0$ $(\mathrm{Im} z_1 > 0)$ на внутренность ограниченного многоугольника Δ_2 (Δ_1) с углами $\beta_k\pi$ $(\alpha_j\pi)$, где $0 < \beta_k, \alpha_j \leqslant 2$, $k = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, предполагая, что известны точки b_k (a_j) действительной оси x_2 (x_1), соответствующие вершинам многоугольника Δ_2 (Δ_1).

Для решения задачи введем в рассмотрение функцию

$$u(z_1, z_2) = \arg f''_{z_1z_2}(z_1, z_2) = \mathrm{Im} \ln f''_{z_1z_2}(z_1, z_2),$$

и будем искать ее с помощью формулы (29). Полагая [10]

$$u_{j-10} - u_{j0} = (\alpha_j - 1)\pi, \quad u_{0k-1} - u_{0k} = (\beta_k - 1)\pi, \quad u_{mn} = 0,$$

из формулы (29) будем иметь

$$u(z_1,z_2)=\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j-1)\varphi_j+\sum_{k=1}^{m}(\beta_k-1)\psi_k+\theta=$$
$$=\theta+\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j-1)\arg(z_1-a_j)+\sum_{k=1}^{m}(\beta_k-1)\arg(z_2-b_k).$$

По известной мнимой части $u\left(z_1,z_2\right)$ восстанавливаем аналитическую функцию

$$\ln f''_{z_1 z_2}\left(z_1,z_2\right)=$$
$$=\ln C_0+i\theta+\sum_{j=1}^{n}\left(\alpha_j-1\right)\ln\left(z_1-a_j\right)+\sum_{k=1}^{m}\left(\beta_k-1\right)\ln\left(z_2-b_k\right).$$

Отсюда потенцированием и интегрированием находим, что

$$f\left(z_1,z_2\right)=CF_1\left(z_1\right)F\left(z_2\right)+\varphi_1\left(z_1\right)+\varphi_2\left(z_2\right)+C_1, \tag{31}$$

где

$$F_1\left(z_1\right)=\int\limits_{z_1^0}^{z_1}\prod_{j=1}^{n}\left(z_1-a_j\right)^{\alpha_j-1}dz_1,\quad F_2\left(z_2\right)=\int\limits_{z_2^0}^{z_2}\prod_{k=1}^{m}\left(z_2-b_k\right)^{\beta_k-1}dz_2, \tag{32}$$

$C=C_0e^{i\theta},C_1,u,z_1^0,z_2^0$ — некоторые постоянные, а $\varphi_1\left(z_1\right)$ и $\varphi_2\left(z_2\right)$ — произвольные аналитические функции, такие, что $\varphi_j\left(z_j^0\right)=0$.

Из формулы (30) следует, что

$$f\left(z_1^0,z_2\right)=\varphi_2\left(z_2\right)+C_1, f\left(z_1,z_2^0\right)=\varphi_1\left(z_1\right)+C_1.$$

По условию функция $f\left(z_1^0,z_2\right)\left(f\left(z_1,z_2^0\right)\right)$ также должна отображать верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im}z_2>0\left(\mathrm{Im}z_1>0\right)$ на внутренность ограниченного многоугольника $\Delta_2\left(\Delta_1\right)$, поэтому [10]

$$\varphi_2\left(z_2\right)=\lambda_2F_2\left(z_2\right)\quad\left(\varphi_1\left(z_1\right)=\lambda_1F_1\left(z_1\right)\right),$$

где $\lambda_2\left(\lambda_1\right)$ — некоторая постоянная. Отсюда следует

Лемма 3. Решение двумерной задачи Кристоффеля–Шварца дает функция

$$f\left(z_1,z_2\right)=CF_1\left(z_1\right)F_2\left(z_2\right)+\lambda_1F_1\left(z_1\right)+\lambda_2F_2\left(z_2\right)+C_1=$$
$$=C\left(F_1\left(z_1\right)+\mu_1\right)\left(F_2\left(z_2\right)+\mu_2\right),$$

где C,μ_1,μ_2 — произвольные комплексные числа, а $F_j\left(z_j\right)$, $j=1,\,2$, определяются по формулам (31).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б о г а н о в В. И. Некоторые свойства интегралов типа Темлякова // Ученые записки Моск. обл. пед. ин-та. – М.: Изд-во МОПИ им. Н.К. Крупской. – 1967. – Т. 188. – Вып. 11. – С. 29–55.
2. В и н о г р а д о в а И. Н. О решении некоторых краевых задач // Сб. тр. “Теория функций, функциональный анализ и их приложения”. – М.: Изд-во МОПИ им. Н.К. Крупской. – 1973. – Вып. 15. – С. 198–216.
3. В л а д и м и р о в В. С. Методы теории функций многих комплексных переменных. – М.: Наука. – 1964. – 365 с.
4. Г о ф м а н К. Банаховы пространства аналитических функций. – М.: Гостехиздат. – 1963. – 441 с.
5. Д з е б и с о в Х. П. Интегральные представления аналитических функций в неограниченных областях с определяющими многообразиями // Владикавказ. мат. журн. – 2003. – Т. 5. – Вып. 2. – С. 10–17.
6. Д з е б и с о в Х. П. Интегральные представления и краевые задачи в многомерном комплексном анализе. – М.: Наука. – 2005. – 255 с.
7. К р а с н о щ е к о в А. Л. О решении некоторых краевых задач // Сб. тр. “Математический анализ и теория функций”. – М.: Изд-во МОПИ им. Н.К. Крупской. – 1977. – Вып. 8. – С. 55–73.
8. Л а т ы ш е в А. В., Л у к а н к и н Г. Л. Краевые задачи теории функций комплексного переменного. – М.: МГОУ. – 2003. – 102 с.
9. Л о б а н о в а О. В. Постановка и решение некоторых краевых задач // Сб. тр. “Математический анализ и теория функций”. – М.: Изд-во МОПИ им. Н.К. Крупской. – 1976. – Вып. 6. – С. 70–88.
10. Л у к а н к и н Г. Л. О некоторых краевых задачах для функций двух комплексных переменных // Ученые записки Моск. обл. пед. ин-та. – М.: Изд-во МОПИ им. Н.К. Крупской. – 1970. – Т. 269. – Вып. 14. – С. 23–48.
11. Л у к а н к и н Г. Л. О задачах линейного сопряжения функций двух комплексных переменных // Сб. тр. “Математический анализ и теория функций”. – М.: Изд-во МОПИ им. Н.К. Крупской. – 1973. – Вып. 1. – С. 10–24.
12. Л у к а н к и н Г. Л. Задачи линейного сопряжения в пространстве C^2 // Сб. научн. тр. “Многомерный комплексный анализ и его приложения”. – Деп. ВИНИТИ 29.12.1991. – № 4899-В91. – С. 3–14.
13. Л у к а н к и н Г. Л. Пространственная задача линейного сопряжения // Вестник МАИ ВШ. – 1999. – Т. 4. – Вып. 6. – С. 82–89.
14. Л у к а н к и н Г. Л., Л а т ы ш е в А. В., Р ы н д и н а С. В. Граничная задача для одного класса линейных релаксационных нестационарных уравнений // Известия МАИ ВШ. – 2001. – Т. 2. – Вып. 16. – С. 94–101.

Статья поступила в редакцию 15.03.2007

Ирина Геннадьевна Табакова родилась в 1982 г., окончила МПГУ в 2004 г. Канд. физ.-мат. наук, автор 8 научных работ в области комплексного анализа.

I.G. Tabakova (b. 1982) graduated from the Moscow State Pedagogical University in 2004. Ph. D. (Phys.-Math.), author of 8 publications in the field of analysis of complex-valued variables.