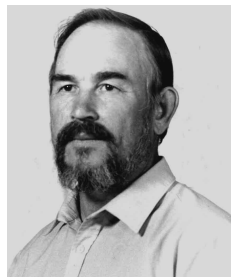


Кирилл Федотович Комков родился в 1938 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1966 г. Канд. техн. наук, доцент военного технического университета. Автор более 30 публикаций в области механики материалов.

K.F. Komkov (b. 1938) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1966. Ph. D. (Eng.), assoc. professor of the Military and Technical University. Author of more than 30 publications in the field of mechanics of materials.



---

УДК 533.6.013.42

С. В. К а ш и р и н, Г. А. Щ е г л о в

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ РЕЗОНАНСОВ ТРУБОПРОВОДА, ВОЗБУЖДАЕМЫХ УПРУГИМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ СЕЧЕНИЯ**

*Исследованы параметрические колебания гидроупругой системы, представляющей собой длинный прямой, заглушенный с одной стороны, трубопровод, заполненный вязкой несжимаемой средой и нагруженный внутренним давлением, имеющим как постоянную, так и переменную составляющие. Изучены параметрические резонансы, вызываемые изменением момента инерции сечения и погонной массы жидкости, которые возникают из-за малых деформаций поперечного сечения трубы под действием переменного давления. В первом приближении найдены границы области неустойчивости параметрических резонансов и условия их существования, и исследовано влияние параметров трубопровода на области неустойчивости резонанса.*

Трубопроводы относятся к числу наиболее ответственных элементов конструкции летательных аппаратов. Требование уменьшения массы трубопроводов связано с уменьшением толщины их стенок. Для трубопроводов с тонкими стенками важен вопрос о влиянии податливости поперечного сечения трубы на динамику трубопровода с протекающей по нему жидкостью. В частности, актуальна задача исследования параметрических колебаний трубопровода.

Известны работы по исследованию параметрических резонансов трубопровода возбуждаемых потоком жидкости с малой пульсацией скорости потока [1, 2]. В работе [3] изучались параметрические колебания трубопровода, возбуждаемые одновременно пульсирующим потоком жидкости и переменной продольной силой. В указанных работах форма поперечного сечения трубы считалась неизменной. Цель

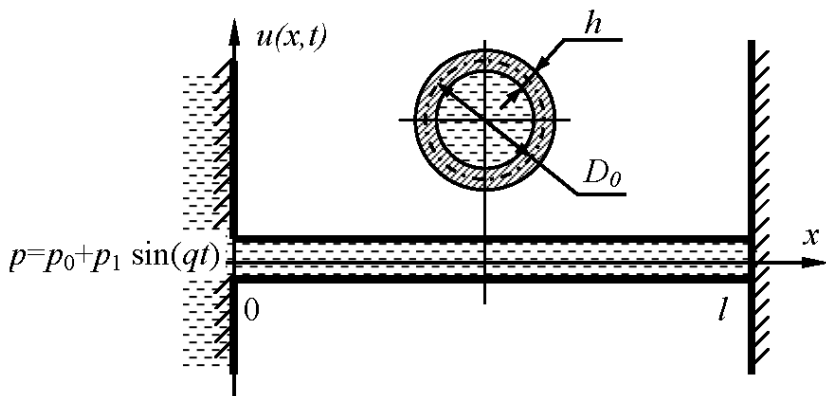


Рис. 1. Трубопровод, нагруженный внутренним давлением

настоящего исследования — оценить влияние деформаций поперечного сечения трубы под действием пульсаций внутреннего давления в трубопроводе как еще одного дестабилизирующего фактора, вызывающего параметрические колебания.

В гидравлических схемах различных технических систем, например в двигательных установках летательных аппаратов, коммуникациях наземных стартовых комплексов, в энергетическом оборудовании, имеются участки трубопроводов, временно перекрытые клапанами или другой запорной арматурой. При этом часто наблюдаются интенсивные пульсации давления перед закрытым клапаном, возникающие при работе гидроагрегатов, в связи с чем возникает необходимость расчета колебаний трубопровода, находящегося перед клапаном.

Рассматривается прямой участок трубопровода длиной  $l$ , заполненный вязкой несжимаемой средой, имеющей плотность  $\rho_v$  (рис. 1). Поскольку среда вязкая, трение между стенками трубы и средой отсутствует. Труба имеет постоянное круглое сечение (средний диаметр  $D_0$ , толщина стенки  $h$ ) и большое удлинение  $l/D_0 > 30$ . Выход трубопровода заглушен, среда по трубопроводу не движется. На входе в трубопровод создается избыточное давление, имеющее как постоянную, так и переменную составляющие, изменяющиеся по гармоническому закону с частотой  $q$ :

$$p = p_0 + p_1 \sin(qt). \quad (1)$$

Условия закрепления трубы (заделка двух краев, см. рис. 1) исключают действие на трубопровод продольной силы (сжимающей или растягивающей).

Уравнение малых поперечных колебаний трубопровода с учетом влияния инерции вращения поперечного сечения имеют вид [4]

$$EJ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \xi_1 J \frac{\partial^5 u}{\partial x^4 \partial t} + \xi_2 \frac{\partial u}{\partial t} + (\rho + m) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + J \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} = 0, \quad (2)$$

где  $u(x, t)$  — поперечные перемещения элемента трубы;  $E$  — модуль упругости материала трубы;  $J$  — момент инерции поперечного сечения;  $\rho$  — погонная масса среды;  $m$  — погонная масса трубы;  $\xi_1, \xi_2$  — коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования. Для уравнения (2) заданы граничные условия:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad u'(0, t) = 0, \quad u'(l, t) = 0. \quad (3)$$

Поскольку среда, заполняющая трубу, несжимаемая, изменение давления на входе мгновенно распространяется по трубе. Так как исследуются только низшие тона колебаний трубы большого удлинения, соответствующие поперечным перемещениям трубопровода как балки постоянного сечения, можно пренебречь инерцией оболочки при ее деформации под действием внутреннего давления, которая проявляется на более высоких тонах колебаний. Взаимодействие упругой стенки трубы с жидкостью не учитывается. Приближенно считается, что деформации трубы следуют в фазе за изменением давления и трубопровод деформируется как цилиндр, нагруженный внутренним давлением, и радиальное перемещение может быть определено по формуле, приведенной в работе [5]. В предположении, что отношение  $h/D_0 \ll 1$ , приращение диаметра под действием внутреннего давления определяется соотношением

$$D = D_0 + 2 \frac{p D_0^2}{4 E h}.$$

С учетом (1) получаем зависимость диаметра трубы от времени

$$D = D_c + D_p \sin(qt), \quad (4)$$

где

$$D_c = D_0 + \frac{p_0 D_0^2}{2 E h}; \quad D_p = \frac{p_1 D_0^2}{2 E h}.$$

Рассматриваем малые изменения диаметра. Вводим малый параметр

$$\varepsilon = \frac{D_p}{D_c} = \frac{D_0 p_1}{2 E h + D_0 p_0} \ll 1.$$

Исследование параметрических колебаний будем проводить асимптотическим методом в первом приближении [6]. Выражение (4) принимает вид

$$D = D_c (1 + \varepsilon \sin(qt)). \quad (5)$$

Изменение диаметра трубы приводит к изменению момента инерции сечения  $J$  и погонной массы среды  $\rho$ . С точностью до величин, имеющих первый порядок малости, выражения для них записываются как

$$J = J_0 [1 + 3\varepsilon \sin(qt)]; \quad (6)$$

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon \rho_1 \sin(qt), \quad (7)$$

где введены обозначения

$$J_0 = \frac{\pi h D_c^3}{8}; \quad \rho_0 = \rho_v \frac{\pi (D_c - h)^2}{4}; \quad \rho_1 = \rho_v \frac{\pi D_c^2}{2} \left(1 - \frac{h}{D_c}\right).$$

Коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования

$$\xi_1 = \varepsilon E k_1; \quad \xi_2 = \varepsilon k_2 \quad (8)$$

также считаются малыми.

Решение уравнения малых колебаний (2) находим в виде

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(t) w_j(x),$$

где для приближенного описания форм колебаний использованы функции Крылова  $w_j(x)$ , удовлетворяющие граничным условиям (3). После подстановки в уравнение (2) зависимостей (6)–(8), решение ищем методом Бубнова–Галеркина. Соответствующие интегралы обозначаем как

$$\int_0^l w_j(x) w_j(x) dx = a_j; \quad \int_0^l w_j(x) w_j^{1V} dx = b_j, \quad \int_0^l w_j(x) w_j' dx = c_j.$$

С точностью до величин порядка  $\varepsilon$  уравнения движения принимают вид

$$\ddot{\varphi}_j + \omega_j^2 \varphi_j = -3\varepsilon \omega_j^2 \sin(qt \varphi_j) - \varepsilon \omega_j \delta_j \dot{\varphi}_j - \varepsilon (\beta_j + \mu_j) \sin(qt \ddot{\varphi}_j), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_j^2 &= [E J_0 b_j] [(m + \rho_0) a_j + J_0 c_j]^{-1}; \\ \delta_j &= [k_1 E J_0 b_j + k_2 a_j] [(m + \rho_0) a_j + J_0 c_j]^{-1} \omega_j^{-1}; \\ \beta_j &= \rho_1 a_j [(m + \rho_0) a_j + J_0 c_j]^{-1}; \\ \mu_j &= J_0 c_j [(m + \rho_0) a_j + J_0 c_j]^{-1}. \end{aligned}$$

Анализ уравнения (9) показывает, что в первом приближении возможны только основные параметрические резонансы  $q = 2\omega_j$ , области неустойчивости которых с точностью до величин порядка  $\varepsilon$  определяются неравенствами:

$$2\omega_j \left[1 - \frac{\varepsilon}{4} \sqrt{\gamma_j^2 - 4\delta_j^2}\right] < q < 2\omega_j \left[1 + \frac{\varepsilon}{4} \sqrt{\gamma_j^2 - 4\delta_j^2}\right]. \quad (10)$$

Здесь  $\gamma_j = (\beta_j + \mu_j) - 3$  – амплитуда параметрического возбуждения. Как следует из выражения (10), факторами параметрического возбуждения являются изменение момента инерции сечения (которое

по формуле (6) определяется коэффициентом 3), изменение погонной массы среды в деформированном трубопроводе ( $\beta_j$ ) и влияние инерции вращения поперечного сечения ( $\mu_j$ ), которое, как показывает анализ коэффициентов (9), для тонкостенного ( $h \ll D_c$ ) трубопровода является малым ( $\mu_j \ll \beta_j$ ) из-за малости момента инерции сечения  $J_0$ .

Условие существования области неустойчивости определяется неравенством  $\gamma_j^2 > 4\delta_j^2$ , где коэффициент демпфирования имеет вид

$$\delta_j = \frac{k_1 E J_0 b_j}{(m + \rho_0) a_j \omega_j} + \frac{k_2 a_j}{(m + \rho_0) a_j \omega_j} = k_1 \omega_j + \frac{k_2}{(m + \rho_0) \omega_j}.$$

В случае  $h \ll D_c$  условие существования области неустойчивости можно записать через параметры трубопровода:

$$\frac{D_0}{h} < \left| \frac{4}{5} \frac{m_v}{\rho_v} \frac{(2\omega_1 k_1 - 3)}{5 - 2\omega_1 k_1} \right|.$$

Для анализа ширины зоны неустойчивости рассмотрим пример расчета трубопровода со следующими параметрами:  $m_v = 2600 \text{ кг/м}^3$ ;  $E = 7,1 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ;  $\rho_v = 1000 \text{ кг/м}^3$ ;  $l = 1 \text{ м}$ ;  $D_0 = 0,02 \text{ м}$ ;  $h = 0,0005 \text{ м}$ ;  $k_1 = k_2 = 0$ ;  $p_0 = 10 \cdot 10^5 \text{ Па}$ ;  $p_1 = 6 \cdot 10^5 \text{ Па}$ . Для трубопровода получены значения коэффициентов  $\varepsilon = 1,69 \cdot 10^{-4}$ ,  $m = 0,0817$ ,  $\rho_0 = 0,298$ ,  $\rho_1 = 0,613$ ,  $J_0 = 1,572 \cdot 10^{-9}$ .

Запишем функции Крылова для заданных граничных условий:

$$w_j(x) = \cos(K_j x) - \text{ch}(K_j x) + \lambda_j (\sin(K_j x) - \text{sh}(K_j x)); \quad j = 1, 2;$$

$$K_1 = 4,73; \quad K_2 = 7,85; \quad \lambda_1 = -0,983; \quad \lambda_2 = -1,001.$$

Соответствующие интегралы и коэффициенты имеют следующие значения:  $a_1 = a_2 = 1,000$ ;  $b_1 = 500,56$ ;  $b_2 = 3803,54$ ;  $c_1 = -12,30$ ;  $c_2 = -46,05$ ;  $\delta_1 = \delta_2 = 0$ ;  $\beta_1 = \beta_2 = 1,61$ ;  $\mu_1 = 1,53 \cdot 10^{-7}$ ;  $\mu_2 = 5,7 \times 10^{-7}$ ;  $\gamma_1 = \gamma_2 = -1,39$ .

Для первых двух частот собственных колебаний  $\omega_1 = 383,2 \text{ 1/с}$ ;  $\omega_2 = 1056,3 \text{ 1/с}$  параметрические резонансы и области неустойчивости

$$q_1 = 2\omega_1 = 766,4 \mp 0,045 \text{ 1/с}; \quad q_2 = 2\omega_2 = 2112,6 \mp 0,124 \text{ 1/с}.$$

Для трубопроводов с малым моментом инерции  $J_0$  неравенство для области неустойчивости можно переписать в виде

$$2\omega_j \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{4} \sqrt{\gamma^2 - 4\delta_j^2} \right] < q < 2\omega_j \left[ 1 + \frac{\varepsilon}{4} \sqrt{\gamma^2 - 4\delta_j^2} \right], \quad (11)$$

где  $\gamma = \rho_1 / (m + \rho_0) - 3 = \frac{2D_c}{(D_c - h)(1 + m/\rho_0)} - 3$ .

Максимальная ширина области неустойчивости имеет место при  $k_1 = k_2 = 0$ , тогда

$$2\omega_j \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{4} \left| \frac{2D_c}{(D_c - h)(1 + m/\rho_0)} - 3 \right| \right] < q < 2\omega_j \left[ 1 + \frac{\varepsilon}{4} \left| \frac{2D_c}{(D_c - h)(1 + m/\rho_0)} - 3 \right| \right]. \quad (12)$$

При малой толщине стенки трубы ( $D_c - h \approx D_c$ ) выражение (12) упрощается

$$2\omega_j \left[ 1 - \frac{\varepsilon}{4} \left| \frac{2}{(1 + m/\rho_0)} - 3 \right| \right] < q < 2\omega_j \left[ 1 + \frac{\varepsilon}{4} \left| \frac{2}{(1 + m/\rho_0)} - 3 \right| \right]. \quad (13)$$

Погрешность вычислений зоны неустойчивости по формуле (13) по сравнению с (12) при соблюдении условия  $h/D_0 \leq \frac{17 - 3m/\rho_0}{2(1 + 3m/\rho_0)}$  не превышает 5%. Из уравнения (13) следует, что область неустойчивости будет шире, когда погонная масса трубы больше погонной массы жидкости. При условии  $m/\rho_0 \ll 1$  ширина области неустойчивости становится равной  $\varepsilon/2$  и выражение (10) еще более упрощается:

$$2\omega_j \left[ 1 - \frac{D_0 p_1}{8 E h + 4 D_0 p_0} \right] < q < 2\omega_j \left[ 1 + \frac{D_0 p_1}{8 E h + 4 D_0 p_0} \right]. \quad (14)$$

Формулу (14) можно применять, если  $D_0/h \leq 20(1 + 4m_v/\rho_v)$ . При этом погрешность вычислений не превышает 5% по сравнению с формулой (12).

Численное интегрирование системы дифференциальных уравнений (9) подтвердило наличие найденных в первом приближении областей неустойчивости параметрических резонансов. Для толщин стенки трубы  $h_1 = 0,5$  мм,  $h_2 = 0,2$  мм,  $h_3 = 0,1$  мм получены значения частот параметрических резонансов и зон неустойчивости, приведенные в таблице.

Таблица

Толщина стенки, мм	1-й тон колебаний, 1/с	2-й тон колебаний, 1/с
0,5	$2\omega_1 = 766,4 \mp 0,045$	$2\omega_2 = 2112,6 \mp 0,124$
0,2	$2\omega_1 = 512,3 \mp 0,064$	$2\omega_2 = 1412,3 \mp 0,175$
0,1	$2\omega_1 = 369,4 \mp 0,085$	$2\omega_2 = 1018,9 \mp 0,235$

По результатам исследования можно сделать следующие выводы о действии деформаций поперечного сечения трубы, вызываемых пульсациями внутреннего давления в трубопроводе в качестве дестабилизирующего фактора, вызывающего параметрические колебания. С учетом принятых допущений деформации стенок трубопровода в первом приближении вызывают при рассмотренных граничных условиях

только основные параметрические резонансы. Ширина области неустойчивости зависит от соотношения погонных масс трубы и жидкости и лежит в пределах  $[\varepsilon/2; 3\varepsilon/2]$ , где порядок малого параметра  $\varepsilon$  определяется отношением амплитуды пульсаций давления к модулю упругости материала трубы. Влияние рассмотренного механизма параметрического возбуждения возрастает с уменьшением толщины стенки и увеличением длины трубопровода.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Челомей С. В. О динамической устойчивости упругих систем при протекании через них пульсирующей жидкости // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1984. – № 5.
2. Феодосьев В. И. О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости // Инж. сб. Т. 10.
3. Челомей С. В., Щеглов Г. А. О динамической устойчивости прямого трубопровода нагруженного переменной осевой силой при протекании через него пульсирующей жидкости // Известия АН РФ. Механика твердого тела. – 1998. – № 6. – С. 175–184.
4. Светлицкий В. А. Механика стержней: Учеб. для вузов. Ч. II. Динамика. – М.: Высш. шк., 1987. – 304 с.
5. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 592 с.
6. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974.

Статья поступила в редакцию 28.06.2008

Сергей Владимирович Каширин родился в 1982 г., окончил МГТУ им. Баумана в 2005 г. Аспирант кафедры “Аэрокосмические системы” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор четырех научных работ в области теории колебаний, гидроупругости и устойчивости движения.

S.V. Kashirin (b. 1982) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2005. Post-graduate of “Aerospace Systems” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 4 publications in the field of theory of oscillations, hydroelasticity and motion stability.

Георгий Александрович Щеглов родился в 1972 г., окончил в 1996 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Аэрокосмические системы” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 21 научной работы в области динамики и прочности космических летательных аппаратов.

G.A. Shcheglov (b. 1972) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 1996. Ph. D. (Phys.-Math.), assoc. professor of “Aerospace Systems” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 21 publications in the field of dynamics and strength of spacecrafts.

