УДК 512.562

И. Г. Табакова

# КРАЕВАЯ ЗАДАЧА КЕЛДЫША–СЕДОВА ДЛЯ ЗАДАННОЙ ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЙ ОБЛАСТИ

*Приведено решение задачи Келдыша – Седова для голоморфных функций двух комплексных переменных, указаны необходимые и достаточные условия разрешимости такой задачи. Сформулированы условия, обеспечивающие единственность ее решения.*

В теории краевых задач значительную роль сыграли установленные в 1954 г. А.А. Темляковым [1–4] интегральные представления для функций двух комплексных переменных, аналитических в классе параметрически задаваемых ограниченных выпуклых полных двоякокруговых областей, которые впоследствии были названы интегральными представлениями Темлякова I и II рода (см., например, [5]).

Позднее И.И. Бавриным был установлен ряд интегральных представлений для аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных [6–8].

Пространственная краевая задача Римана была первоначально поставлена в трудах классиков математики Б. Римана, Д. Гильберта, А. Пуанкаре, как единственное теоретическое обобщение одномерной краевой задачи Римана. Однако вскоре обнаружилось, что пространственная задача имеет намного больше теоретических и практических приложений, и она была существенно продвинута работами Ф. Нетера, Т. Карлемана, Племеля.

Задачу линейного сопряжения для трубчатых областей рассмотрел В.С. Владимиров [9], причем краевое условие задавалось не на всей топологической границе, а на некоторой ее части — остове.

Г.Л. Луканкиным [10–14, 15], В.И. Богановым [14], И.Н. Виноградовой [16] были рассмотрены задачи линейного сопряжения для двоякокруговых областей с краевым условием, заданным на окружности особенностей.

Теория краевых задач для голоморфных функций получила свое дальнейшее развитие в работах Х.П. Дзебисова [17], С.Ю. Колягина [18], А.В. Латышева [13, 15], С.В. Рындиной [13] и др.

В настоящей статье исследуется двумерная задача Келдыша – Седова, в которой надо восстановить функцию, аналитическую в биполуплоскости, по значениям ее вещественной и мнимой частей, заданным на двух попарно не пересекающихся объединениях прямоугольников, исчерпывающих $R^2_{x_1x_2}$. Указываются необходимые и достаточные условия разрешимости такой задачи и сформулированы условия, обеспечивающие единственность ее решения, которое дается специальным интегралом типа Коши.

**Задача Келдыша – Седова.** Пусть на оси $x_1 = \mathrm{Re} z_1$ ($x_2 = \mathrm{Re} z_2$) заданы точки $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ ($b_1, b_2, \ldots, b_{2m}$), удовлетворяющие неравенствам $-\infty < a_1 < \ldots < a_p < \ldots < a_{2n} < +\infty$ ($-\infty < b_1 < \ldots$ $\ldots < b_q < \ldots < b_{2m} < +\infty$). Положим

$$\begin{aligned}
&M_0^1 = (-\infty; a_1)\,, \quad M_p^1 = (a_p; a_{p+1})\,,\\
&p = 1, 2, \ldots, 2n-1, \quad M_{2n}^1 = (a_{2n}; +\infty)\,;\\
&M_0^2 = (-\infty; b_1)\,, \quad M_q^2 = (b_q; b_{q+1})\,,\\
&q = 1, 2, \ldots, 2m-1, \quad M_{2m}^2 = (b_{2m}; +\infty)
\end{aligned}$$

и образуем множества

$$M_{pq} = M_p^1 \times M_q^2, \quad p = 0, 1, \ldots, 2n, \quad q = 0, 1, \ldots, 2m,$$

$$M_u = \bigcup_{\substack{p+q=2S\\ 0\leqslant S\leqslant n+m}} M_{pq}, \qquad M_v = \bigcup_{\substack{p+q=2S+1\\ 0\leqslant S\leqslant n+m-1}} M_{pq}.$$

Если функция $f(z_1, z_2) = u(z_1, z_2) + iv(z_1, z_2)$ аналитична в биполуплоскости $D = \{(z_1, z_2)\colon \mathrm{Im}\, z_1 > 0, \quad \mathrm{Im}\, z_2 > 0\}$, то имеет место формула Коши [19]:

$$f(z_1, z_2)g(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint\limits_{\partial K_1 \times \partial K_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)g(\zeta_1, \zeta_2)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)}\, d\zeta_1\, d\zeta_2 =$$

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\left\{\int\limits_{-R_1}^{R_1}\int\limits_{-R_2}^{R_2} + \int\limits_{-R_1}^{R_1}\int\limits_{C_2} + \int\limits_{C_1}\int\limits_{-R_2}^{R_2} + \iint\limits_{C_1\times C_2}\right\} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)g(\zeta_1, \zeta_2)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} d\zeta_1 d\zeta_2; \tag{1}$$

$$(z_1, z_2) \in K_1 \times K_2,$$

где

$$g(z_1, z_2) = g_1(z_1)\, g_2(z_2)\,, \tag{2}$$

$$g_1(z_1) = \prod_{p=1}^{n} \sqrt{\frac{z_1 - a_{2p}}{z_1 - a_{2p-1}}}, \quad g_2(z_2) = \prod_{q=1}^{m} \sqrt{\frac{z_2 - b_{2q}}{z_2 - b_{2q-1}}}$$

и

$$K_j = \{|z_j| < R_j\} \cap \{\mathrm{Im}\, z_j > 0\}\,, \quad C_j = \{|z_j| = R_j\} \cap \{\mathrm{Im}\, z_j \geqslant 0\}\,, \quad j = 1, 2.$$

Следуя работе [11] и используя равенства

$$\frac{f(\zeta_1,\zeta_2)\,g_1(\zeta_1)}{\zeta_1 - z_1} = \frac{f(\zeta_1,\infty) + \varphi_1(\zeta_1,\zeta_2)}{\zeta_1};$$

$$\frac{f(\zeta_1,\zeta_2)\,g_2(\zeta_2)}{\zeta_2 - z_2} = \frac{f(\infty,\zeta_2) + \varphi_2(\zeta_1,\zeta_2)}{\zeta_2};$$

$$\frac{f(\zeta_1,\zeta_2)\,g(\zeta_1,\zeta_2)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} = \frac{f(\infty,\infty) + \varphi_{12}(\zeta_1,\zeta_2)}{\zeta_1\zeta_2},$$

в которых функции $\varphi_1(\zeta_1,\zeta_2)$, $\varphi_2(\zeta_1,\zeta_2)$ и $\varphi_{12}(\zeta_1,\zeta_2)$ таковы, что

$$\lim_{\zeta_1\to\infty}\varphi_1(\zeta_1,\zeta_2) = 0 \quad \forall\,\mathrm{Im}\,z_2 \geqslant 0, \qquad \lim_{\zeta_2\to\infty}\varphi_2(\zeta_1,\zeta_2) = 0 \quad \forall\,\mathrm{Im}\,z_1 \geqslant 0,$$

$$\lim_{\substack{\zeta_1\to\infty\\ \zeta_2\to\infty}}\varphi_{12}(\zeta_1,\zeta_2) = 0,$$

убедимся, что при $R_j \to \infty$, $j = 1,\,2$, формула (1) принимает вид

$$f(z_1,z_2)\,g(z_1,z_2) = (K_{12}fg)(z_1,z_2) + \frac{1}{2}(K_1fg_1)(z_1) + \\ + \frac{1}{2}(K_2fg_2)(z_2) + \frac{1}{4}f(\infty,\infty)\,, \quad (3)$$

где $(z_1,z_2)\in D$ и

$$(K_{12}fg)(z_1,z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\!\!\int_{\Gamma^2}\frac{f(\zeta_1,\zeta_2)\,g(\zeta_1,\zeta_2)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)}d\zeta_1 d\zeta_2;$$

$$(K_1fg_1)(z_1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\zeta_1,\infty)\,g_1(\zeta_1)}{\zeta_1 - z_1}d\zeta_1;$$

$$(K_2fg_2)(z_2) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\infty,\zeta_2,)\,g_2(\zeta_2)}{\zeta_2 - z_2}d\zeta_2.$$

Формула (3) имеет смысл лишь в том случае, если функция $f(\zeta_1,\zeta_2)$ ведет себя определенным образом в бесконечно удаленных точках плоскости $\Gamma^2 = \{(z_1,z_2)\colon \mathrm{Im}\,z_1 = 0,\ \mathrm{Im}\,z_2 = 0\}$. Например, для существования интеграла $(K_{12}fg)(z_1,z_2)$ в несобственном смысле необходимо потребовать, чтобы функция $f(\zeta_1,\zeta_2)$ удовлетворяла условию

$$\lim_{\zeta_1\to\infty} f(\zeta_1,\zeta_2) = \lim_{\zeta_2\to\infty} f(\zeta_1,\zeta_2) = 0. \quad (4)$$

В этом случае формула (3) принимает вид

$$f(z_1,z_2)\,g(z_1,z_2) = (K_{12}fg)(z_1,z_2)\,. \quad (5)$$

Из формулы Коши (5) следует, что при $\operatorname{Im} z_1 > 0$ и $\operatorname{Im} z_2 > 0$ имеют место следующие равенства:

$$0 = \overline{(K_{12} fg)\left(\overline{z_1}, \overline{z_2}\right)}; \tag{6}$$

$$0 = \overline{(K_{12} fg)\left(\overline{z_1}, z_2\right)} \quad \text{и} \quad 0 = \overline{(K_{12} fg)\left(z_1, \overline{z_2}\right)}. \tag{7}$$

Так как функции $g_j(\zeta_j)$, $j = 1, 2$, являются чисто мнимыми (вещественными) на $M^j_{2\delta-1}$ ($M^j_{2\delta}$), $j = 1, 2$, то функция $g(z_1, z_2)$ будет чисто мнимой (вещественной) на $M_{pq}$ при $p + q$ нечетном (четном) и, следовательно, чисто мнимой (вещественной) на $M_v$ ($M_u$).

Складывая левые и правые части равенств (5) и (6), найдем, что

$$f(z_1, z_2)\, g(z_1, z_2) = \left(K_{12}\left(fg + \overline{fg}\right)\right)(z_1, z_2) =$$

$$= 2 \sum_{\substack{p+q=2S \\ 0 \leqslant S \leqslant n+m}} (K^{pq} ug)(z_1, z_2) + 2i \sum_{\substack{p+q=2S+1 \\ 0 \leqslant S \leqslant n+m-1}} (K^{pq} vg)(z_1, z_2) \equiv$$

$$\equiv 2 (K_u ug)(z_1, z_2) + 2i (K_v vg)(z_1, z_2), \tag{8}$$

где положено

$$(K^{pq} h)(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{M_{pq}} \int \frac{h(\zeta_1, \zeta_2)\, d\zeta_1 d\zeta_2}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)},$$

$$(K_u h)(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{M_u} \int \frac{h(\zeta_1, \zeta_2)\, d\zeta_1 d\zeta_2}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)}.$$

Формула (8) — искомая. Обратимся к условиям (7), сложив которые, получим

$$0 = (K_u ug)\left(z_1, \overline{z_2}\right) + i (K_v vg)\left(z_1, \overline{z_2}\right), \quad (z_1, z_2) \in D. \tag{9}$$

Фиксируя целые числа $r$ и $e$ и предполагая, что $r + e$ четно, выделяем в сумме (9) интегралы $K^{pq}$, у которых либо $p = r$, либо $q = e$, и представляем формулу (9) следующим образом:

$$0 = (K^{re} ug)\left(z_1, \overline{z_2}\right) +$$

$$+ \sum_{S=\left[\frac{r+1}{2}\right]}^{n+m} \left(K^{r,es-r} ug\right)\left(z_1, \overline{z_2}\right) + i \sum_{S=\left[\frac{r}{2}\right]}^{n+m-1} \left(K^{r,es-r+1} vg\right)\left(z_1, \overline{z_2}\right) +$$

$$+ \sum_{S=\left[\frac{e+1}{2}\right]}^{n+m} \left(K^{es-e,e} ug\right)\left(z_1, \overline{z_2}\right) + i \sum_{S=\left[\frac{e}{2}\right]}^{n+m-1} \left(K^{es-e-1} vg\right)\left(z_1, \overline{z_2}\right) +$$

$$+ \sum_{\substack{p+q=2S \\ 0\leqslant S\leqslant n+m}}{}' (K^{pq} ug)(z_1, \overline{z_2}) + i \sum_{\substack{p+q=2S+1 \\ 0\leqslant S\leqslant n+m-1}}{}' (K^{pq} vg)(z_1, \overline{z_2}), \quad (10)$$

где суммы со штрихом содержат остальные слагаемые, не вошедшие в предыдущие суммы.

Перейдя к пределу в выражении (10) при $(z_1, z_2) \to (t_1, t_2) \in M_{re}$ и тем самым применив формулы Сохоцкого к интегралу $(K^{re} ug)(z_1, \overline{z_2})$ по обеим переменным, а к интегралам второй (третьей) строки формулы (10) по первому (второму) аргументу, затем снова объединим однотипные слагаемые и, выделив вещественную и мнимую части, получим

$$u(t_1, t_2)\, g(t_1, t_2) - 4\,(K_u ug)(t_1, t_2) =$$

$$= i \sum_{S=\left[\frac{e}{2}\right]}^{n+m-1} (S_{e,es-e+1} vg)(t_1, t_2) - i \sum_{S=\left[\frac{r}{2}\right]}^{n+m-1} (S_{1,es-r+1} vg)(t_1, t_2), \quad (11)$$

$$(S_{1,r} ug)(t_1, t_2) - (S_{e,r} ug)(t_1, t_2) - \sum_{S=\left[\frac{e+1}{2}\right]}^{n+m} (S_{e,es-e} ug)(t_1, t_2) +$$

$$+ \sum_{S=\left[\frac{r+1}{2}\right]}^{n+m} (S_{1,2s-r} ug)(t_1, t_2) = 4i\,(K_v vg)(t_1, t_2)\,, \quad r+e=2s,$$

где

$$(S_{1,\beta} h)(t_1, t_2) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{M'_\beta} \frac{h(\zeta_1, t_2)}{\zeta_1 - t_1} d\zeta_1, \;\; (S_{2,\alpha} h)(t_1, t_2) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{M^2_\alpha} \frac{h(t_1, \zeta_2)}{\zeta_2 - t_2} d\zeta_2.$$

Теперь, предполагая, что $r+e$ нечетно, и рассуждая, как и выше, получаем

$$v(t_1, t_2)\, g(t_1, t_2) - 4\,(K_v vg)(t_1, t_2) =$$

$$= i \sum_{S=\left[\frac{r+1}{2}\right]}^{n+m} (S_{1,2s-r} ug)(t_1, t_2) - i \sum_{S=\left[\frac{e+1}{2}\right]}^{n+m} (S_{2,es-e} ug)(t_1, t_2),$$

$$(S_{2,e} vg)(t_1, t_2) - (S_{1,r} vg)(t_1, t_2) - \sum_{S=\left[\frac{e}{2}\right]}^{n+m-1} (S_{e,es-e+1} vg)(t_1, t_2) +$$

$$+ \sum_{S=\left[\frac{r}{2}\right]}^{n+m-1} (S_{1,2s-r+1} vg)(t_1, t_2) =$$

$$= 4i\,(K_u ug)(t_1, t_2)\,, \quad r+e=2s+1. \quad (12)$$

Отсюда вытекает важная

***Лемма 1.*** Если функция $f(z_1, z_2) = u(z_1, z_2) + iv(z_1, z_2)$ аналитична в биполуплоскости $D$, удовлетворяет условиям (4) и $f(x_1, x_2) \in \in \mathrm{H}(M_{pq})$ при всех $p$, $q$, то имеет место формула Коши (8), а предельные значения $u(x_1, x_2)$ и $v(x_1, x_2)$ ее вещественной и мнимой частей удовлетворяют условиям (11) и (12).

1. Двумерную задачу Келдыша – Седова [11] сформулируем так: найти функцию $f(z_1, z_2)$, аналитическую в биполуплоскости $D$ и удовлетворяющую на $\Gamma^2$ краевому условию

$$\mathrm{Re} f(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2), \quad \forall (x_1, x_2) \in M_u,$$

$$\mathrm{Im} f(x_1, x_2) = \varphi(x_1, x_2), \quad \forall (x_1, x_2) \in M_v,$$

где вещественная функция $\varphi(x_1, x_2)$ удовлетворяет условию Гёльдера на каждом множестве $M_{pq}$, допускает разрывы на прямых $x_1 = a_p$, $p = 1, 2, \ldots, 2n$, и $x_2 = b_q$, $q = 1, 2, \ldots, 2m$, и исчезает во всех бесконечно удаленных точках $\Gamma^2$ так, что

$$|\varphi(x_1, x_2)| \leqslant \frac{C}{|x_1|^{\lambda_1} |x_2|^{\lambda_2}}, \quad 0 \leqslant \lambda_1, \quad \lambda_2 < 1, \quad C > 0.$$

Если $M_u = \Gamma^2$, а $M_v = \varnothing$, то задача Келдыша – Седова превращается в задачу Шварца, которая разрешима лишь в том случае, если заданная функция $\varphi(x_1, x_2)$ удовлетворяет необходимому и достаточному условию разрешимости [20]:

$$\left(V_{12}^{-1} \varphi\right)(x_1, x_2) = 0 \ \text{ при } \ x_1 > 0, \quad x_2 < 0.$$

Следовательно, задача Келдыша – Седова не разрешима, если заданная функция $\varphi(x_1, x_2)$ не удовлетворяет дополнительным условиям. Положим

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2)|_{M_u} &= u(x_1, x_2), \\ \varphi(x_1, x_2)|_{M_v} &= v(x_1, x_2) \end{aligned}\right\}$$

и, учитывая лемму 1, потребуем, чтобы заданные функции $u(x_1, x_2)$ и $v(x_1, x_2)$ удовлетворяли условиям (11) и (12).

2. Покажем, что при выполнении условий (11) и (12) задача Келдыша – Седова имеет единственное решение $f(z_1, z_2)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $$\lim_{z_1 \to \infty} f(z_1, z_2) = \lim_{z_2 \to \infty} f(z_1, z_2) = 0; \tag{13}$$

2) функции

$$f(z_1, z_2), \int\limits_{a_{2p}}^{Z_1} f(z_1, z_2)\, dz_1, \int\limits_{b_{2q}}^{Z_2} f(z_1, z_2)\, dz_2, \int\limits_{a_{2p}}^{Z_1} \int\limits_{b_{2q}}^{Z_2} f(z_1, z_2)\, dz_1 dz_2 \tag{14}$$

ограничены в достаточно малых окрестностях соответственно точек

$$(a_{2p-1}, b_{2q-1}), \quad (a_{2p}, b_{2q-1}), \quad (a_{2p-1}, b_{2q}) \quad \text{и} \quad (a_{2p}, b_{2q}),$$

$$p = 1, 2, \ldots, 2n, \quad q = 1, 2, \ldots, 2m.$$

Подставим заданные функции $u(x_1, x_2)$ и $v(x_1, x_2)$ в формулу Коши (8) и покажем, что эта формула дает решение задачи Келдыша – Седова. Пусть $(z_1, z_2) \to (t_1, t_2) \in M_{re}$, $r + e = 2s$, тогда, рассуждая, как и при выводе формулы (10) из (8), получаем

$$\begin{aligned} f(t_1, t_2)\, g(t_1, t_2) &= \\ &= \frac{1}{2}\left\{u(t_1, t_2)\, g(t_1, t_2) + (S_{1,r}ug)(t_1, t_2) + (S_{2,e}ug)(t_1, t_2)\right\} + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{S=\left[\frac{e+1}{2}\right]}^{n+m}(S_{2,2s-e}ug)(t_1, t_2) + \frac{1}{2}\sum_{S=\left[\frac{r+1}{2}\right]}^{n+m}(S_{1,2s-r}ug)(t_1, t_2) + \\ &+ \frac{i}{2}\sum_{S=\left[\frac{e}{2}\right]}^{n+m-1}(S_{2,2s-e-1}vg)(t_1, t_2) + \frac{i}{2}\sum_{S=\left[\frac{r}{2}\right]}^{n+m-1}(S_{1,2s-r+1}vg)(t_1, t_2) + \\ &+ 2(K_u ug)(t_1, t_2) + 2i(K_v vg)(t_1, t_2). \qquad (15) \end{aligned}$$

Учитывая равенства (11) и (12), делим обе части равенства (15) на $g(t_1, t_2)$ и находим

$$\begin{aligned} f(t_1, t_2) = u(t_1, t_2) &+ \left(S_{1,r}u(\zeta_1, t_2)\frac{g_1(\zeta_1)}{g_1(t_1)}\right)(t_1, t_2) + \\ &+ \sum_{S=\left[\frac{r+1}{2}\right]}^{n+m}\left(S_{1,2s-r}u(\zeta_1, t_2)\frac{g_1(\zeta_1)}{g_1(t_1)}\right)(t_1, t_2) + \\ &+ i\sum_{S=\left[\frac{r}{2}\right]}^{n+m-1}\left(S_{1,2s-r+1}v(\zeta_1, t_2)\frac{g_1(\zeta_1)}{g_1(t_1)}\right)(t_1, t_2). \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\mathrm{Re} f(t_1, t_2) = u(t_1, t_2), \quad (t_1, t_2) \in M_u.$$

Аналогично рассуждая, найдем, что

$$\mathrm{Im}\, f(t_1, t_2) = v(t_1, t_2), \quad (t_1, t_2) \in M_v.$$

Таким образом, доказана

***Теорема.*** Задача Келдыша – Седова имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям (13), (14) в том и только том случае, если заданные вещественные функции $u(x_1, x_2)$ и $v(x_1, x_2)$ удовлетворяют условиям (11) и (12).

3. Однородная задача Келдыша – Седова равносильна следующей задаче о скачке:

$$f^{++}(\zeta_1, \zeta_2) = -f^{--}(\zeta_1, \zeta_2) \quad \left(\equiv -\overline{f^{++}(\zeta_1, \zeta_2)}\right), \quad (\zeta_1, \zeta_2) \in M_u,$$

$$f^{++}(\zeta_1, \zeta_2) = f^{--}(\zeta_1, \zeta_2) \quad \left(\equiv \overline{f^{++}(\zeta_1, \zeta_2)}\right), \quad (\zeta_1, \zeta_2) \in M_v.$$

Решением такой задачи, исчезающим в бесконечно удаленных точках, является функция (см. [11, 21])

$$h(z_1, z_2) = h_1(z_1) h_2(z_2) =$$
$$= \frac{i\left(\alpha_0 + \alpha_1 z_1 + ... + \alpha_{n-1} z_1^{n-1}\right)\left(\beta_0 + \beta_1 z_2 + ... + \beta_{m-1} z_2^{m-1}\right)}{\sqrt{\prod\limits_{p=1}^{n}(z_1 - a_{2p-1})(z_1 - a_{2p})}\sqrt{\prod\limits_{q=1}^{m}(z_2 - b_{2q-1})(z_2 - b_{2q})}},$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ и $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1}$ — вещественные постоянные.

В самом деле, $\operatorname{Re} h = 0$ на $M_u$, $\operatorname{Im} h = 0$ на $M_v$ и $h(z_1, z_2) \to 0$ при $z_1 \to \infty$ или $z_2 \to \infty$. Отсюда следует

***Лемма 2.*** Решение $f(z_1, z_2)$ задачи Келдыша – Седова, исчезающее на бесконечности, с ограниченным интегралом

$$\int^{Z_1}\int^{Z_2} f(z_1, z_2)\, dz_1 dz_2$$

в окрестностях всех точек $(a_p,\ b_q)$ определяется по формуле

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{2(\pi i)^2 g(z_1, z_2)} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\zeta_1, \zeta_2)\,\psi(\zeta_1, \zeta_2)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} d\zeta_1 d\zeta_2 + h(z_1, z_2),$$

где положено

$$\psi(\zeta_1, \zeta_2) = \begin{cases} u(\zeta_1, \zeta_2), & (\zeta_1, \zeta_2) \in M_u, \\ iv(\zeta_1, \zeta_2), & (\zeta_1, \zeta_2) \in M_v. \end{cases}$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Т е м л я к о в А. А. Интегральное представление функций двух комплексных переменных // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1957. – Т. XXI. – С. 89–92.
2. Т е м л я к о в А. А. Интегральные представления функций двух комплексных переменных // ДАН СССР. – 1958. – Т. 120. – Вып. 5. – С. 976–979.
3. Т е м л я к о в А. А. Интегральные представления // ДАН СССР. – 1959. – Т. 129. – Вып. 5. – С. 986–988.
4. Т е м л я к о в А. А. Интегральные представления // ДАН СССР. – 1960. – Т. 131. – Вып. 2. – С. 263–264.

5. Ф у к с Б. А. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. – М.: Физматгиз, 1962.
6. Б а в р и н И. И. Интегральные представления голоморфных функций многих комплексных переменных // ДАН СССР. – 1966. – Т. 169. – Вып. 3. – С. 495–498.
7. Б а в р и н И. И. Общие интегральные представления голоморфных функций // ДАН СССР. – 1967. – Т. 172. – Вып. 6. – С. 1251–1253.
8. Б а в р и н И. И. Общие интегральные представления голоморфных функций многих комплексных переменных // ДАН СССР. – 1968. – Т. 181. – Вып. 2. – С. 247–250.
9. В л а д и м и р о в В. С. Методы теории функций многих комплексных переменных. – М.: Наука, 1964. – 365 с.
10. Л у к а н к и н Г. Л. О поведении интеграла типа Темлякова I рода в точках остова области *D* типа *A* // ДАН СССР. – 1965. – Т. 161. – Вып. 1. – С. 39–42.
11. Л у к а н к и н Г. Л. О некоторых краевых задачах для функций двух комплексных переменных // Ученые записки МОПИ. – М.: Изд-во МОПИ им. Н.К. Крупской. – 1970. – Т. 269. – Вып. 14. – С. 23–48.
12. Л у к а н к и н Г. Л. О задачах линейного сопряжения функций двух комплексных переменных // Сб. тр. “Математический анализ и теория функций”. – М.: Изд-во МОПИ им. Н.К. Крупской. – 1973. – Вып. 1. – С. 10–24.
13. Л у к а н к и н Г. Л., Л а т ы ш е в А. В., Р ы н д и н а С. В. Граничная задача для одного класса линейных релаксационных нестационарных уравнений // Известия МАИ ВШ. – 2001. – Т. 2. – Вып. 16. – С. 94–101.
14. Б о г а н о в В. И., Л у к а н к и н Г. Л. Интеграл типа Темлякова и его предельные значения // ДАН СССР. – 1967. – Т. 176. – Вып. 1. – С. 16-19.
15. Л а т ы ш е в А. В., Л у к а н к и н Г. Л. Краевые задачи теории функций комплексного переменного. – М.: МГОУ, 2003. – 102 с.
16. В и н о г р а д о в а И. Н. О решении некоторых краевых задач // Сб. тр. “Теория функций, функциональный анализ и их приложения”. – М.: Изд-во МОПИ им. Н.К. Крупской. – 1973. – Вып. 15. – С. 198–216.
17. Д з е б и с о в Х. П. Интегральные представления и краевые задачи в многомерном комплексном анализе. – М.: Наука, 2005. – 255 с.
18. К о л я г и н С. Ю. Об аналитичности интеграла типа Темлякова // Сб. научн. тр. МПГУ. Сер. “Естественные науки”. – М.: Прометей. – 1999. – С. 12–13.
19. Г о ф м а н К. Банаховы пространства аналитических функций. – М.: Гостехиздат. – 1963. – 441 с.
20. Г а х о в Ф. Д. Краевые задачи. – М.: Физматгиз. – 1963. – 543 с.
21. А й з е н б е р г Л. А. Интегральное представление функций, голоморфных в выпуклых областях пространства $\mathrm{C}^2$ // ДАН СССР. – 1963. – Т. 151. – Вып. 7. – С. 1247–1249.

Статья поступила в редакцию 31.01.2007

Ирина Геннадьевна Табакова родилась в 1982 г., окончила МПГУ в 2004 г. Канд. физ.-мат. наук, автор 7 научных работ в области комплексного анализа.

I.G. Tabakova (b. 1982) graduated from the Moscow State Pedagogical University in 2004. Ph. D. (Phys.-Math.), author of 7 publications in the field of analysis of complex-valued variables.