УДК 539.3

Ю. И. Димитриенко, М. Ю. Иванов

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ[1]

Предложена модель нелинейных динамических процессов переноса в периодических пористых средах, основанная на методе асимптотического осреднения. Сформулирована так называемая локальная задача газовой динамики для описания локальных процессов переноса в одной поре и предложен приближенно-аналитический метод решения локальной задачи. Приведен пример численной реализации метода.

В настоящее время особый интерес представляют нелинейные высокоскоростные процессы переноса в пористых системах. Так, в связи с созданием динамических амортизирующих систем, основанных на принципе поглощения энергии за счет фазовых превращений, возникла проблема моделирования нелинейных высокоскоростных течений жидкости в пористых системах. Нелинейные процессы фильтрации в настоящее время практически еще не изучены, обычно применяются лишь эмпирические нелинейные модели, связывающие скорость с градиентом давления в пористой среде. В работах [1–4] предложен новый подход к нелинейным задачам газовой динамики в пористых системах, основанный на методе асимптотических разложений для уравнений в частных производных, заданных в областях с быстроосциллирующими границами [1, 5, 6]. Показано, что в отличие от линейных задач в пористых системах [7, 8], характерных для медленных процессов переноса, описание высокоскоростных течений основано на решении нелинейных связанных локальных и глобальных задач переноса. Для их решения необходима разработка специального нового метода, поскольку существующие методы расчета параметров локальных потоков [9] достаточно приближенны и, как правило, не учитывают таких важных особенностей течения, как периодичность потоков по границам ячеек периодичности, влияние геометрической формы поры и др. Цель настоящей работы — разработка нового метода решения, основанного на модели асимптотических приближений для нелинейных процессов переноса в пористых средах.

Математическая постановка задачи. Рассмотрим пористый материал периодической структуры (рис. 1), поры которого заполнены вязкой сжимаемой совершенной жидкостью (газом).

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 06-08-01448а.

Введем следующие обозначения: l_0 — характерный линейный размер ячейки периодичности (ЯП) V_ξ; x_0 — характерный глобальный размер всей пористой области V; t_0 — характерное время; $v_0 = x_0/t_0$ — характерная скорость; $\kappa = l_0/x_0 \ll 1$ — малый параметр; $\boldsymbol{\xi} = \bar{\mathbf{x}}/\kappa$ — безразмерные локальные координаты, изменяющееся в пределах ячейки периодичности V_ξ; $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/x_0$ — глобальные координаты.

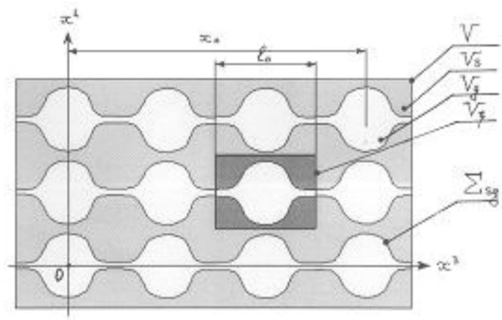


Рис. 1. Схема периодической структуры пористого материала

Движение вязкого нетеплопроводного газа в пористой среде, занимающей область V, в рамках сделанных допущений описывается системой уравнений Навье–Стокса, которая в безындексной форме вместе с условиями прилипания на твердой поверхности имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_{\bar{x}} \cdot \rho \mathbf{v} = 0, \quad \bar{\mathbf{x}} \in V; \\ \dfrac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla_x \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p\mathbf{E}) = \nabla_x \cdot \boldsymbol{\sigma}_v; \\ \dfrac{\partial}{\partial t} \rho \left(e + \dfrac{v^2}{2} \right) + \nabla_x \cdot \rho \mathbf{v} \left(e + \dfrac{v^2}{2} + \dfrac{p}{\rho} \right) = \nabla_x \cdot (\boldsymbol{\sigma}_v \cdot \mathbf{v}); \\ \boldsymbol{\sigma}_v = \mu_1 (\nabla_x \cdot \mathbf{v}) \mathbf{E} + \mu_2 (\nabla_x \otimes \mathbf{v} + \nabla_x \otimes \mathbf{v}^{\mathrm{T}}); \\ p = R\rho\theta; \quad e = c_V \theta; \quad \mathbf{v}\,|_\Sigma = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\rho, \mathbf{v}, p, e, \theta$ – плотность, вектор скорости, давление, внутренняя энергия и температура жидкости; $\boldsymbol{\sigma}_v$ — тензор вязких напряжений;

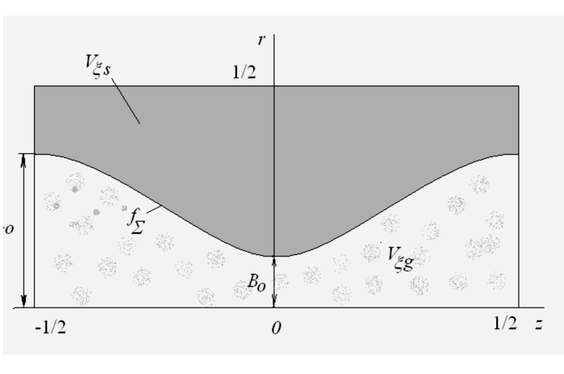


Рис. 2. Ячейка периодичности V_ξ пористого материала

μ_1, μ_2 — коэффициенты вязкости, которые полагаются "малыми", т.е представимыми в виде $\mu_\alpha = \mu_\alpha^0 \kappa^2$; c_V, R — соответственно теплоемкость при постоянном объеме и газовая постоянная; ∇_x – набла-оператор Гамильтона, который в декартовом базисе имеет следующий вид [10]: $\nabla_x = \partial/\partial \mathbf{x} = \mathbf{e}^i \partial/\partial x^i$.

Все функции $\Omega = \{\rho, \mathbf{v}, \theta, \ldots\}$, входящие в систему (1), полагаются квазипериодическими, т.е. они зависят от трех аргументов: $\Omega = \Omega\left(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\xi}, t\right)$ [1], $\bar{\mathbf{x}} \in V$, $\boldsymbol{\xi} \in V_\xi$ "медленно" изменяются относительно аргумента $\bar{\mathbf{x}}$ и являются однопериодическими по второму аргументу $\boldsymbol{\xi}$: $\Omega\left(\bar{\mathbf{x}}, \xi^1, \xi^2, -\dfrac{1}{2}, t\right) = \Omega\left(\bar{\mathbf{x}}, \xi^1, \xi^2, \dfrac{1}{2}, t\right)$ и т.д. для всех ξ^i. Условия периодичности далее обозначаются как $[[\Omega]] = 0$. Дифференцирование квазипериодических функций выполняется в соответствии с правилом дифференцирования сложной функции:

$$\nabla_x \Omega\left(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\xi}, t\right) \to \nabla_{\bar{x}} \Omega\left(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\xi}, t\right) + \frac{1}{\kappa} \nabla_\xi \Omega\left(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\xi}, t\right), \tag{2}$$

где $\nabla_{\bar{x}}, \nabla_\xi$ — операторы Гамильтона по координатам $\bar{\mathbf{x}}$ и $\boldsymbol{\xi}$ соответственно.

Введем оператор среднего значения $\langle \cdot \rangle$ по ЯП V_ξ для квазипериодических по локальным координатам $\boldsymbol{\xi} \in V_\xi$ функций Ω [1]:

$$\langle \Omega \rangle = \frac{1}{\varphi_q |V_\xi|} \int\limits_{V_\xi} \Omega d\tilde{V}_\xi, \tag{3}$$

где $\varphi_q = \dfrac{1}{|V_\xi|} \displaystyle\int\limits_{V_{\xi q}} d\tilde{V}_{\xi q}$ — объемная доля жидкости в ЯП (пористость), а $|V_\xi|$ — объем ЯП V_ξ.

В соответствии с методом асимптотического осреднения ([4]) функции системы уравнений (1) представляются асимптотическими рядами по малому параметру κ:

$$\Omega\left(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\xi}, t\right) = \Omega^{(0)}\left(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\xi}, t\right) + \kappa \Omega^{(1)}\left(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\xi}, t\right) + \kappa^2 \Omega^{(2)}\left(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\xi}, t\right) + \ldots . \tag{4}$$

Используя правила дифференцирования сложной функции (3), путем подстановки выражений (4) в систему уравнений (1) и приведения слагаемых при одинаковых степенях малого параметра κ получаем последовательность так называемых локальных задач газовой динамики на ЯП V_ξ. Собирая члены при степени κ^{-1}, получаем локальную задачу газовой динамики нулевого уровня на ячейке периодичности:

$$
\begin{cases}
\nabla_\xi \cdot \rho^{(0)}\mathbf{v}^{(0)} = 0; \\
\nabla_\xi \cdot \left(\rho^{(0)}\mathbf{v}^{(0)} \otimes \mathbf{v}^{(0)} + p^{(0)}\mathbf{E}\right) = 0; \\
\nabla_\xi \cdot \left(\rho^{(0)}\left(c_V\theta^{(0)} + \dfrac{v^{(0)2}}{2}\right) + p^{(0)}\right)\mathbf{v}^{(0)} = 0; \\
p^{(0)} = R\rho^{(0)}\theta^{(0)}, \ \ \boldsymbol{\xi} \in V_{\xi g}; \ \ \mathbf{v}^{(0)}\cdot\mathbf{n}^{(0)} = 0, \ \ \boldsymbol{\xi} \in \Sigma_{\xi sg}; \ \ [[\Omega]] = 0; \\
\left\langle \rho^{(0)}\mathbf{v}^{(0)} \right\rangle = \bar{\rho}\bar{\mathbf{v}}, \ \ \left\langle \rho^{(0)} \right\rangle = \bar{\rho}, \ \ \left\langle \theta^{(0)} \right\rangle = \bar{\theta},
\end{cases}
\tag{5}
$$

в которой неизвестными функциями являются плотность $\rho_g^{(0)}$, вектор скорости $\mathbf{v}_g^{(0)}$ и температура $\theta_g^{(0)}$ в нулевом приближении. Задача (5) похожа на исходную (1), однако отличается от нее тем, что: 1) решение ищется только на ячейке периодичности, поэтому кроме условий на твердой поверхности в задачу (5) входят условия периодичности; 2) вследствие малости вязкости задача (5) не содержит вязких напряжений, т.е. она представляет собой систему уравнений Эйлера; 3) задача (5) относится к установившимся процессам, так как не содержит производных по t. Кроме того, к задаче (5) присоединяются дополнительные условия нормировки — условия на средние значения функций, где величины $\bar{\rho}\left(\bar{\mathbf{x}}, t\right)$, $\bar{\mathbf{v}}\left(\bar{\mathbf{x}}, t\right)$ и $\bar{\theta}\left(\bar{\mathbf{x}}, t\right)$ представляют собой средние по ЯП плотность, вектор скорости и темепература жидкости. Они являются внешними данными задачи (5), т.е. полагаются заданными и зависят только от глобальных координат $\bar{\mathbf{x}}$ и t. Вследствие условий нормировки задача (5) относится к интегродифференциальному типу. Это обстоятельство, а также наличие условий периодичности затрудняет применение большинства широко распространенных численных методов решения локальной задачи газовой динамики (5). Ее решение к настоящему времени удалось получить только для очень простой геометрической формы поры — цилиндра [2].

Далее рассмотрен новый метод нахождения численно-аналитического решения задачи (5) для ЯП с криволинейной геометрией пор.

Система уравнений Эйлера (5) допускает два первых интеграла — адиабату Пуассона и интеграл Бернулли вдоль линии тока. Следовательно, в нулевом приближении локальный процесс переноса в поре является адиабатическим, а задача (5) путем стандартных преобразований [11] может быть представлена в эквивалентом виде:

$$
\begin{cases}
\nabla_\xi \cdot \rho^{(0)}\mathbf{v}^{(0)} = 0; \\
\mathbf{v}^{(0)} \times (\nabla_\xi \times \mathbf{v}^{(0)}) = \nabla_\xi i^*; \\
\dfrac{v^2}{2} + c_p\theta = \dfrac{v_*^2}{2} + c_p\theta^* = i^* \\
\dfrac{p^{(0)}}{p_*} = \left(\dfrac{\rho^{(0)}}{\rho_*}\right)^\gamma, \quad \dfrac{\theta^{(0)}}{\theta_*} = \left(\dfrac{\rho^{(0)}}{\rho_*}\right)^{\gamma-1}; \\
\mathbf{v}^{(0)} \cdot \mathbf{n}^{(0)} = 0, \quad \boldsymbol{\xi} \in \Sigma_{\xi sg}; \quad [[\Omega]] = 0; \\
\left\langle \rho^{(0)}\mathbf{v}^{(0)} \right\rangle = \bar{\rho}_{\bar{\mathbf{v}}}, \quad \left\langle \rho^{(0)} \right\rangle = \bar{\rho}, \quad \left\langle \theta^{(0)} \right\rangle = \bar{\theta}.
\end{cases}
\qquad (6)
$$

Первое уравнение системы (6) — уравнение неразрывности, второе — векторное уравнение установившегося движения газа в форме Громеки–Лемба, третье — интеграл Бернулли, четвертое и пятое — адиабата Пуассона и уравнение баротропии (оба являются следствием уравнения энергии и уравнения состояния). В системе (5) независимы только шесть скалярных уравнений. Здесь введены обозначения: p_*, ρ_*, θ_*, v_*, i_* — постоянные интегрирования, входящие в число неизвестных (независимы из них только три), и зависящие от линии тока; $v = |\mathbf{v}^{(0)}|$ — модуль вектора скорости. Для постоянных интегрировния справедливы соотношения

$$
p^* = \rho^* c_p \theta^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_V}, \quad R = c_p - c_V. \qquad (7)
$$

Осесимметричная локальная задача. В ЯП V_ξ кроме указанных выше локальных декартовых координат ξ^i введем цилиндрические локальные координаты r, ψ, z, связанные с ξ^i соотношениями [10] $\xi^1 = r\cos\psi$; $\xi^2 = r\sin\psi$; $\xi^3 = z$ ($\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\psi, \mathbf{e}_z$ — физический базис цилиндрической системы координат). Положим далее, что пора в ЯП имеет осесиммметричную форму с осью симметрии Oz и обозначим $r = f_\Sigma(z)$ функцию формы поверхности $\Sigma_{\xi sg}$ контакта жидкости с твердым телом в ЯП. В цилиндрической системе координат формула (3) примет вид

$$
\langle \Omega \rangle = \frac{2\pi}{|V_{\xi g}|} \int_0^{f_\Sigma} \int_{-1/2}^{1/2} \Omega\,(r, z)\, r dr dz. \qquad (8)
$$

Положим, что входные данные задачи (5) согласованы с осесимметричной одноканальной структурой пор, т.е. являются одномерными и соответствуют течению жидкости в направлении оси Oz: $\bar{\rho}\,(\bar{x}^3, t)$, $\bar{\mathbf{v}}{=}\bar{v}_z\,(\bar{x}^3, t)\,\mathbf{e}_z$ и $\bar{\theta}\,(\bar{x}^3, t)$. В этом случае решение задачи (6) также будет обладать осевой симметрией: $\rho^{(0)}\,(r, z)$, $\mathbf{v}^{(0)} = v_r^{(0)}\,(r, z)\,\mathbf{e}_r +$ $+ v_z^{(0)}\,(r, z)\,\mathbf{e}_z$ и $\theta^{(0)}\,(r, z)$, т.е. будет зависеть от двух координат: r и z.

Введем безразмерные неизвестные функции в задаче (6):

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho^{(0)}}{\bar{\rho}}; \quad \tilde{\theta} = \frac{\theta^{(0)}}{\bar{\theta}}; \quad \tilde{v}_r = \frac{v_r^{(0)}}{\bar{a}}; \quad \tilde{v}_z = \frac{v_z^{(0)}}{\bar{a}}, \tag{9}$$

где $\bar{a} = \sqrt{\gamma R\bar{\theta}}$ — осредненная скорость звука жидкости. Тогда задача (6) в цилиндрической системе координат принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\left(\tilde{\rho}\tilde{v}_z\right)}{\partial z} + \dfrac{\partial\left(\tilde{\rho}\tilde{v}_r\right)}{\partial r} + \dfrac{\tilde{\rho}\tilde{v}_r}{r} = 0; \\ \left(\dfrac{\partial\tilde{v}_r}{\partial z} - \dfrac{\partial\tilde{v}_z}{\partial r}\right)\tilde{v}_z = \dfrac{\partial\tilde{i}^*}{\partial r}; \\ -\left(\dfrac{\partial\tilde{v}_r}{\partial z} - \dfrac{\partial\tilde{v}_z}{\partial r}\right)\tilde{v}_r = \dfrac{\partial\tilde{i}^*}{\partial z}; \\ \dfrac{\tilde{v}^2}{2} + \gamma_1\tilde{\theta} = \dfrac{\tilde{v}_*^2}{2} + \gamma_1\tilde{\theta}^* = \tilde{i}^*; \\ \dfrac{\tilde{p}}{\tilde{p}^*} = \dfrac{\tilde{\rho}\tilde{\theta}}{\tilde{\rho}^*\tilde{\theta}^*}; \quad \dfrac{\tilde{\theta}}{\tilde{\theta}^*} = \left(\dfrac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}^*}\right)^{\gamma-1}; \\ \langle\tilde{\rho}\tilde{v}_r\rangle = 0, \quad \langle\tilde{\rho}\tilde{v}_z\rangle = \bar{M}, \quad \langle\tilde{\rho}\rangle = 1; \\ \left\langle\tilde{\theta}\right\rangle = 1; \quad \left(\tilde{v}_r n_r + \tilde{v}_z n_z\right)|_{\Sigma_{\xi sg}} = 0, \end{cases} \tag{10}$$

где $\gamma_1 = \gamma/(\gamma-1)$; $\tilde{v}^2 = \tilde{v}_r^2 + \tilde{v}_z^2$; $\bar{\mathrm{M}} = \bar{v}_z/\bar{a}$ — усредненное число Маха. Интегральное условие $\langle\tilde{\rho}\tilde{v}_r\rangle = 0$ задачи (10) связано с одноканальной структурой макропор, так как $\bar{v}_r = 0$.

Задача (10) содержит только один внешний параметр — безразмерное число Маха $\bar{M}$ и одну константу γ_1, следовательно, ее решение можно представить в следующем обобщенном виде:

$$\Omega_\beta = \Omega_\beta\left(\xi^i, \gamma_1, \bar{M}\right), \tag{11}$$

где $\Omega_\beta = \left\{\tilde{\rho}, \tilde{v}_r, \tilde{v}_z, \tilde{\theta}\right\}$. Предположим теперь, что получено решение задачи (10) для нескольких значений чисел Маха $\bar{M}$: $\bar{M}_0 < \bar{M}_1 < \ldots < \bar{M}_\alpha < \ldots < \bar{M}_n$, т.е. определен $n+1$ набор функций вида (11), а именно $\Omega_{\beta\alpha} = \Omega_{\beta\alpha}\left(\xi^i, \gamma_1, \bar{M}_\alpha\right)$. Тогда для произвольного значения $\bar{M}_\alpha$, $\alpha = \overline{0,n}$, можно использовать сплайн-интерполяцию, например, третьей степени

$$\Omega_\beta\left(\xi^i, \gamma_1, \bar{M}\right) = \sum_{\omega=0}^{3} \Omega_{\beta\omega}\left(\xi^i, \gamma_1\right)\bar{M}^\omega, \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} &\Omega_{\beta\omega}\left(\xi^i, \gamma_1\right) = \Omega_{\beta\omega\alpha}\left(\xi^i, \gamma_1\right), \quad \text{если} \ \ \bar{M}_{\alpha-1} < \bar{M} < \bar{M}_\alpha, \\ &\omega = \overline{0,3}, \quad \beta = \overline{1,4}, \quad \alpha = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{13}$$

При фиксированных значениях $\boldsymbol{\xi}^i$ и γ_1 коэффициенты $\Omega_{\beta\omega\alpha}(\xi^i, \gamma_1)$ находятся стандартным способом вычисления сплайн-функций. Такой метод решения локальной задачи предполагает, что задача (10) решается n раз, затем в памяти ЭВМ формируются и хранятся $16n$ двумерных массивов $\Omega_{\beta\omega\alpha}(\xi^i, \gamma_1)$ для каждого значения параметра γ_1.

Отметим, что для нахождения осредненной скорости $\bar{\mathbf{v}}(\bar{\mathbf{x}}, t)$ жидкости в методе формулируется специальная осредненная задача [2, 3]. В силу нелинейности локальной (10) и осредненной задач, они, вообще говоря, связаны и формально должны быть решены совместно. В предложенном методе оказывается возможным "развязывание" указанных задач за счет создания банков данных с решением локальной задачи (10), в которых накапливаются массивы $\Omega_{\beta\omega\alpha}\left(\boldsymbol{\xi}^i, \gamma_1\right)$ для различных значений γ_1 и геометрических форм пор, а затем проводится решение осредненной задачи с использованием этих банков данных.

Метод решения локальной задачи. Для решения задачи (10) применим следующий приближенный метод, который основан на следующих допущениях:

1. Все трубки тока в поре в ЯП пропорциональны поверхности $\Sigma_{\xi sg}$ контакта поры с твердой фазой $r = f_\Sigma(z)$, т.е. имеют вид $r = f_r(z) = f_\Sigma(z) r/A_0$, где A_0 — радиус поры при $z = -1/2$.

2. Модуль вектора скорости $\tilde{v}$ зависит только от осевой координаты z: $\tilde{v} = v(z)$ (здесь и далее, для простоты, символ "$\tilde{}$"опущен).

3. Вместо уравнения неразрывности рассматриваем интегральное уравнение закона сохранения массы для произвольной подобласти $V'_\xi \subset V_\xi$:

$$\int\limits_{V'_\xi} \nabla_\xi \cdot \rho \mathbf{v} dV_\xi = 0.$$

Компоненты вектора скорости имеют вид

$$v_r = v(z)\sin\varphi(r, z); \quad v_z = v(z)\cos\varphi(r, z). \tag{14}$$

Здесь $\varphi(r, z)$ — угол между касательной к линии тока и осью Oz, который в силу допущения 1 является известной величиной и определяется только функцией $f_r(z)$ по формулам [10]:

$$\sin\varphi(r, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_r(z))^2}}; \quad \cos\varphi(r, z) = \frac{f'_r(z)}{\sqrt{1 + (f'_r(z))^2}}. \tag{15}$$

Модуль вектора скорости $v = v(z)$ является неизвестной функцией и подлежит определению. Выбирая в качестве V'_ξ часть всей ЯП, ограниченную плоскостями $z = \text{const}$, с учетом граничных условий на твердой стенке и допущений 1 и 3 получаем, как и в стандартной одномерной теории, условие постоянства скоростного напора жидкости в каждом сечении ЯП:

$$\int\limits_0^{f_\Sigma} \rho(z)v_z(r,z)rdr = \bar{Q} = \text{ const}, \quad \forall z. \tag{16}$$

Проинтегрируем уравнение (16) по z от $-1/2$ до $1/2$ и умножим получившееся выражение на $1/|V_{\xi g}|$, тогда с учетом интегрального условия $\langle\tilde{\rho}\tilde{v}_z\rangle = \bar{M}$ системы (10) получим

$$\bar{M} = \langle\rho v_z\rangle = \frac{2\pi}{|V_\xi|}\int\limits_{-1/2}^{1/2} \rho\left(z\right) v\left(z\right) \int\limits_0^{f_\Sigma} \cos\varphi(r,z) r dr dz = \frac{\bar{Q}}{|V_\xi|}. \tag{17}$$

Отсюда находим, что $\bar{Q} = \bar{M}\,|V_{\xi g}|$.

Пусть L — линия тока в ЯП V_ξ (см. рис. 2), начинающаяся от плоскости $z = -1/2$. Выберем два сечения ЯП, для которых $z = -1/2$ и $z =$ const. Выберем в качестве значений $p_*, \rho_*, \theta_*, v_*$, i^* газодинамические параметры, соответсвующие плоскости $z = -1/2$, тогда вдоль линии тока L из интеграла Бернулли, уравнения баротропии и адиабаты Пуассона системы (10) получим следующие соотношения:

$$\frac{\theta}{\theta^*} = \frac{v_{\max}^2 - v^2}{v_{\max}^2 - v_*^2}; \tag{18}$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \left(\frac{v_{\max}^2 - v^2}{v_{\max}^2 - v_*^2}\right)^{1/(\gamma-1)}; \tag{19}$$

$$\frac{p}{p^*} = \left(\frac{\rho}{\rho^*}\right)^\gamma = \left(\frac{v_{\max}^2 - v^2}{v_{\max}^2 - v_*^2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}. \tag{20}$$

Здесь $v_{\max}$ обозначено максимальное значение модуля вектора скорости, которое достигается на линии тока

$$v_{\max} = \sqrt{2\gamma_1\theta^* + v_*^2}. \tag{21}$$

Из формул (18)–(20) следует, что температура, плотность и давление в поре не зависят от координаты r, они зависят только от z, поскольку определяются модулем вектора скорости. Из формул (18)–(20) также получаем

$$\begin{cases} \theta = \theta^* G\left(v\right); \qquad p = p^* H\left(v\right); \\ \rho = \rho^* \tilde{F}\left(v\right); \qquad \rho^* = \rho F\left(v\right), \end{cases} \tag{22}$$

где обозначены функции модуля вектора скорости:

$$F(v)=\left(\frac{v_{\max}^2-v_*^2}{v_{\max}^2-v^2}\right)^{1/(\gamma-1)};$$
$$\tilde F(v)=1/F(v);\quad G(v)=[F(v)]^{1-\gamma};\quad H(v)=[F(v)]^{-\gamma}. \tag{23}$$

Выражая $v_{\max}$ через θ^* по формуле (21), приходим к следующему представлению функции $F(v)$:

$$F(v)=F(v,\theta*,v_*)=\left(\frac{2\gamma_1\theta^*}{2\gamma_1\theta^*+v_*^2-v^2}\right)^{1/(\gamma-1)}. \tag{24}$$

Применяя оператор осреднения (8) к первому и третьему выражениям в (22), с учетом интегральных условий из (10) для ρ,θ получаем, что должны выполняться следующие соотношения:

$$\begin{cases}\theta^*\langle G(v)\rangle=1;\\ \rho^*\langle\tilde F(v)\rangle=1,\end{cases} \tag{25}$$

поскольку θ^* и ρ^* не зависят от z. Кроме того, имеет место следующее соотношение, вытекающее из (16) и (22):

$$S(z)=\bar M|V_{\xi g}|F(v)/(\rho^*v), \tag{26}$$

где $S(z)=2\pi\int\limits_0^{f_\Sigma(z)}\cos\varphi(r,z)r\,dr$. Таким образом, имеем систему уравнений (25) и (26) относительно трех неизвестных констант (ρ^*, θ^*, v_*) и функции $v(z)$. Исключая из этой системы ρ^* с помощью второго соотношения (25), приходим к следующей системе:

$$\begin{cases}1-\theta^*\langle G(v)\rangle=0;\\[2mm] \bar M|V_{\xi g}|-\dfrac{v_*S(-1/2)}{\langle\tilde F(v)\rangle}=0;\\[2mm] \bar M|V_{\xi g}|F(v)-\dfrac{vS}{\langle\tilde F(v)\rangle}=0.\end{cases} \tag{27}$$

Здесь второе уравнение получено из третьего для $z=-1/2$, при котором $F(v)=F(v_*)=1$ согласно (23). После определения величин θ^*, v_* и v плотность ρ^* вычисляем по второй из формул, а p^* по формуле (7). Плотность ρ, температура θ и давление p определяем по формулам (22).

Анализ решения локальной задачи. В зависимости от геометрии поровой области $V_{\xi g}$, величины осредненного числа Маха $\bar M$ и коэффициента Пуассона γ можно получать различные решения локальной

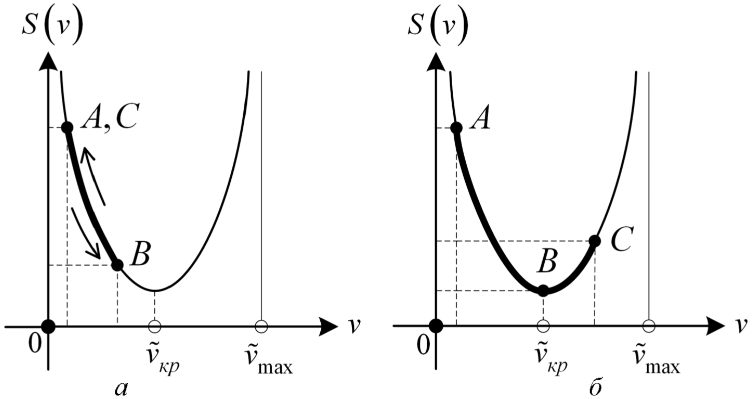


Рис. 3. Решения для дозвукового (*а*) и сверхзвукового (*б*) течения

задачи (10) — для дозвукового и сверхзвукового течения. Для рассмотрения этих решений рассмотрим третье уравнение в (27), из которого следует, что

$$S(v) = \bar{M}\,|V_{\xi g}|\,F(v)\left\langle \tilde{F}(v)\right\rangle_g \Big/ v. \tag{28}$$

Функция зависимости площади сечения S поровой области $V_{\xi g}$ от модуля скорости v имеет локальный минимум в точке $v = \tilde{v}_{\text{кр}} = [(\gamma-1)/(\gamma+1)]^{1/2}\tilde{\nu}_{\max}$ (левее и правее которой ветви кривой направлены вверх, пересечений с осью абсцисс нет) и две асимптоты: $v = 0$ и $v = \tilde{v}_{\max}$.

Если в поре реализуется дозвуковой режим течения, то скорости частиц жидкости лежат на левой ветви кривой $S(v)$, газодинамические параметры — периодические функции локальной координаты z (рис. $3, a$). Если же в поре течение становится сверхзвуковым, то периодического решения локальной задачи (10) не существует. Иначе говоря, трансзвуковое решение является переходным. Наличие перехода определяется значением массового расхода $\bar{Q}$ и функцией $S(z)$.

Численный метод решения локальной задачи. Для численного решения системы уравнений (27), фактически представляющей собой нелинейное интегральное уравнение относительно функции $v(z)$, введем на отрезке $[-1/2;\,1/2]$ оси Oz сетку узлов $z_m = -1/2 + m/n, m = 0, \ldots, n$, n — целое число. Тогда разностная аппроксимация оператора осреднения (8) для случая функции $\Omega(z)$, зависящей только от z, будет иметь следующий вид:

$$\langle\Omega\rangle \approx \frac{\pi h}{2|V_{\xi g}|}\sum_{m=1}^{n}\left[\Omega_{m-1} f_{\Sigma}^2(z_{m-1}) + \Omega_m f_{\Sigma}^2(z_m)\right], \tag{29}$$

где $h = z_m - z_{m-1}$.

Подставляя (29) в (27) и записывая эти уравнения в узлах сетки, получаем следующую нелинейную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных значений функций в узлах сетки $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{n+2})^{\text{т}} = (\theta^*, v_*, v_1, \ldots, v_m, \ldots, v_n)^{\text{т}}$:

$$\Phi(\eta) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_1(\eta_1, ..., \eta_{n+2}) = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_{n+2}(\eta_1, ..., \eta_{n+2}) = 0, \end{cases} \tag{30}$$

где $\varphi_1 = 1 - \theta^* \langle G(v) \rangle$;

$$\varphi_j = \bar{M} |V_{\xi g}| F(v_{j-2}) - \frac{v_{j-2} S\left(z_{j-2}^3\right)}{\left\langle \tilde{F}(v) \right\rangle}, \ j = \overline{2, n+2}, \quad \text{если} \quad v_0 = v_*.$$

Система (30) решается численно методом Ньютона:

$$\eta_p^{(s+1)} = \eta_p^{(s)} - \left[\left(A_p^l \right)^{(s)} \right]^{-1} \varphi_l^{(s)}, \tag{31}$$

где $p = \overline{1, n+2}$ — номер неизвестной в координатном столбце η; s — номер итерации; l — индекс суммирования (номер строки в матрице Якоби); A_p^l — элементы матрицы Якоби, из которых ненулевые

$$\begin{gathered} A_1^1 = -\langle G(v) \rangle_g; \quad A_j^j = \frac{\bar{M} |V_{\xi g}|}{\gamma - 1} F^\gamma(v_{j-2}) \frac{v_{j-2}}{\gamma_1 \theta *} - \frac{S\left(z_{j-2}^3\right)}{\left\langle \tilde{F}(v) \right\rangle}, \\ j = \overline{2, n+2}; \\ A_1^j = \frac{\bar{M} |V_{\xi g}|}{\gamma - 1} F^\gamma(v_{j-2}) \frac{v_*^2 - v_{j-2}^2}{2\gamma_1 (\theta *)^2}, \ j = \overline{3, n+2}; \\ A_2^j = \frac{\bar{M} |V_{\xi g}|}{1 - \gamma} F^\gamma(v_{j-2}) \frac{v_*}{\gamma_1 \theta *}, \ j = \overline{3, n+2}. \end{gathered} \tag{32}$$

В методе Ньютона при вычислении элементов A_p^l матрицы Якоби на s-й итерации введена модификация, заключающаяся в том, что средние значения $\langle G(v) \rangle$ и $\langle \tilde{F}(v) \rangle$ получаются путем подстановки в формулу (29) для $\Omega = \{G(v), \tilde{F}(v)\}$ сеточных значений модуля скорости v частиц жидкости, взятых с итерации $s - 1$.

Пример численной реализации метода. В качестве примера численной реализации метода была рассмотрена пористая среда, поры которой заполнены воздухом ($c_p = 1{,}006$ кДж/(кг·K), $\gamma = 1{,}2$, $R = 0{,}168$ кДж/(кг·K)). Характерные геометрические и газодинамические параметры были выбраны следующими: $x_0 = 1$ м, $t_0 = 1$ с, $v_0 = x_0/t_0$, плотность $\rho_0 = 10$ кг/м^3, температура $\theta_0 = 293{,}15$ K, давление $p_0 = \rho_0 v_0^2$. Функция формы f_Σ (см. рис. 2) поровой обла-

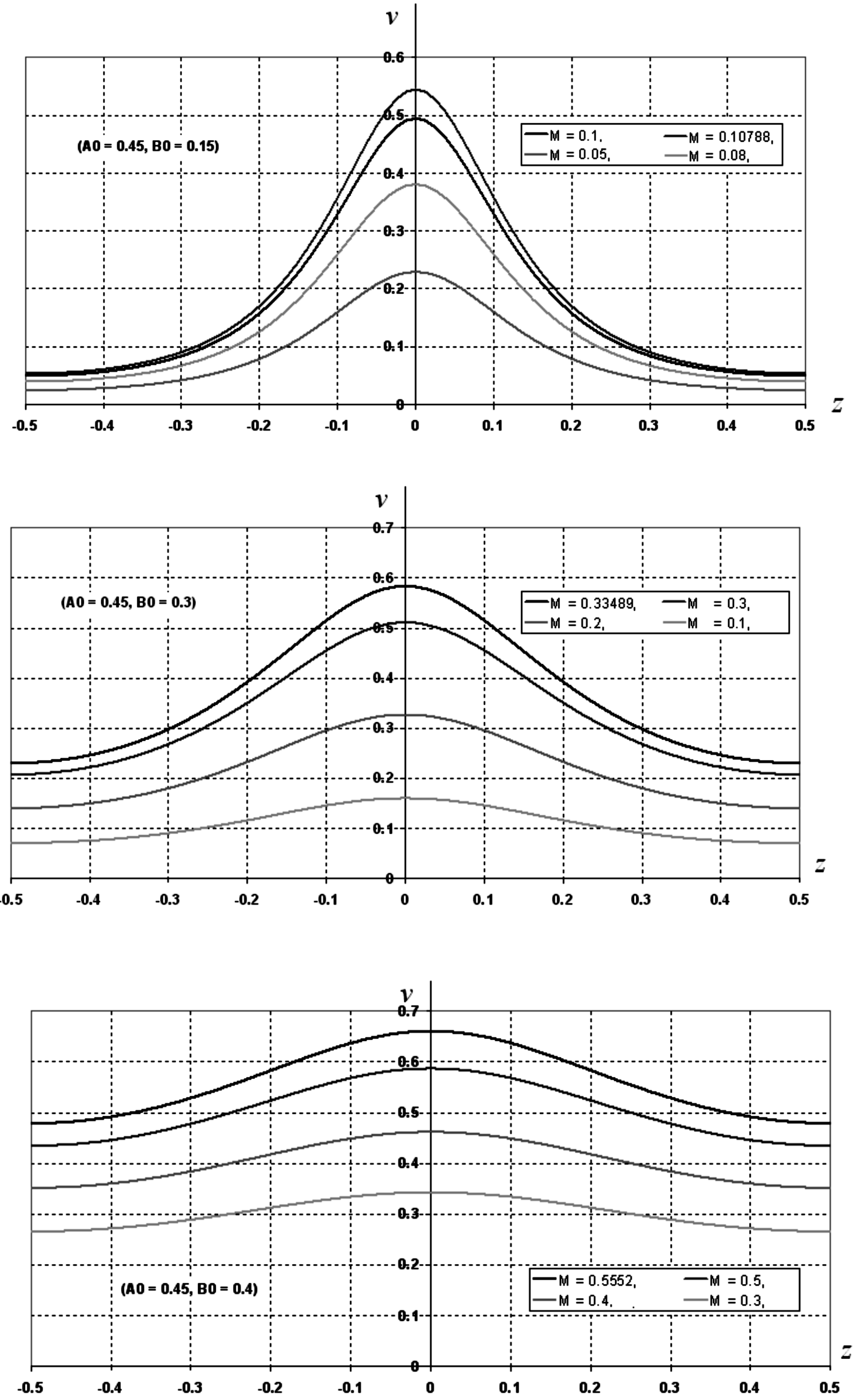
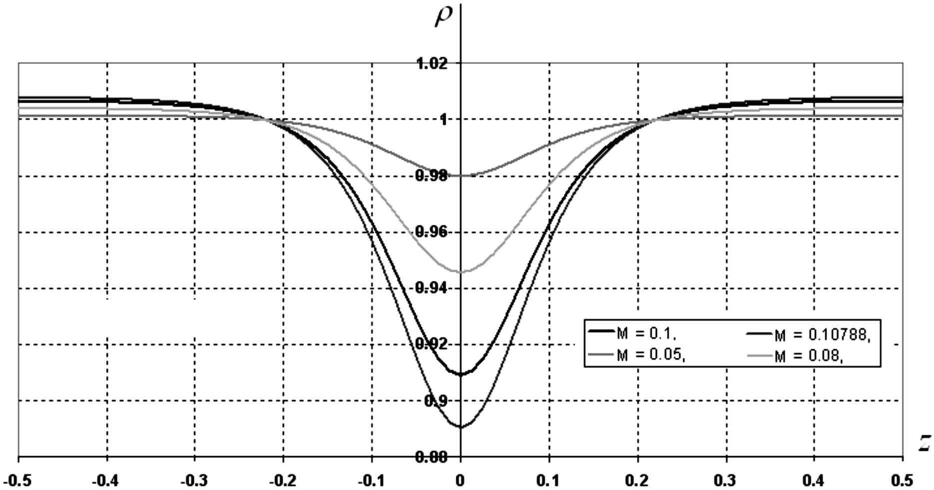


Рис. 4. Зависимость безразмерного модуля скорости v от осевой координаты поры z для различных чисел $\bar{M}$ и значений геометрических параметров A_0, B_0



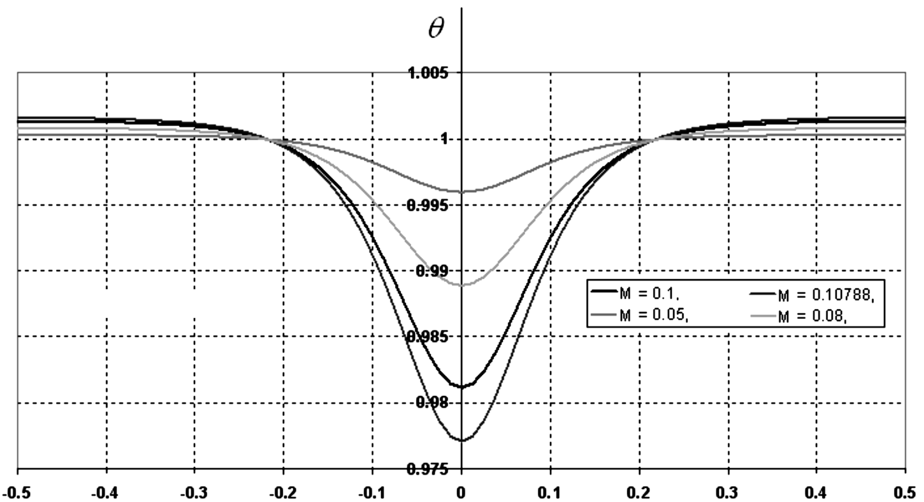


Рис. 5. Зависимость безразмерной плотности ρ и температуры θ от осевой координаты поры z для различных чисел M и значений геометрических параметров $A_0 = 0{,}45$, $B_0 = 0{,}15$

сти $V_{\xi g}$ была выбрана в виде $f_\Sigma(z) = \dfrac{A_0 + B_0}{2} - \dfrac{A_0 - B_0}{2}\cos(2\pi z)$, где $z \in [-1/2;\, 1/2]$; $A_0 =$ const, $B_0 =$ const, для которых $0 < B_0 \leqslant \leqslant A_0 \leqslant 1/2$.

На рис. 4 и 5 приведены результаты решения локальной задачи (10) для различных значений осредненных чисел Маха $\bar{M} \in \left(0; \bar{M}_{\max}\right]$, где $\bar{M}_{\max}$ — верхняя грань допустимого множества $\left(0; \bar{M}_{\max}\right]$ чисел Маха $\bar{M}$, при которых периодическое решение существует, если геометрическая форма поровой области $V_{\xi g}$ фиксирована. Так, для $A_0 = 0{,}45$ и $B_0 = 0{,}15$ $\bar{M}_{\max} = 0{,}10788$, для $A_0 = 0{,}45$ и $B_0 = 0{,}3$ $\bar{M}_{\max} = 0{,}33489$.

На рис. 6 на плоскости значений (A_0, B_0) геометрических параметров поры показаны области существования периодического решения

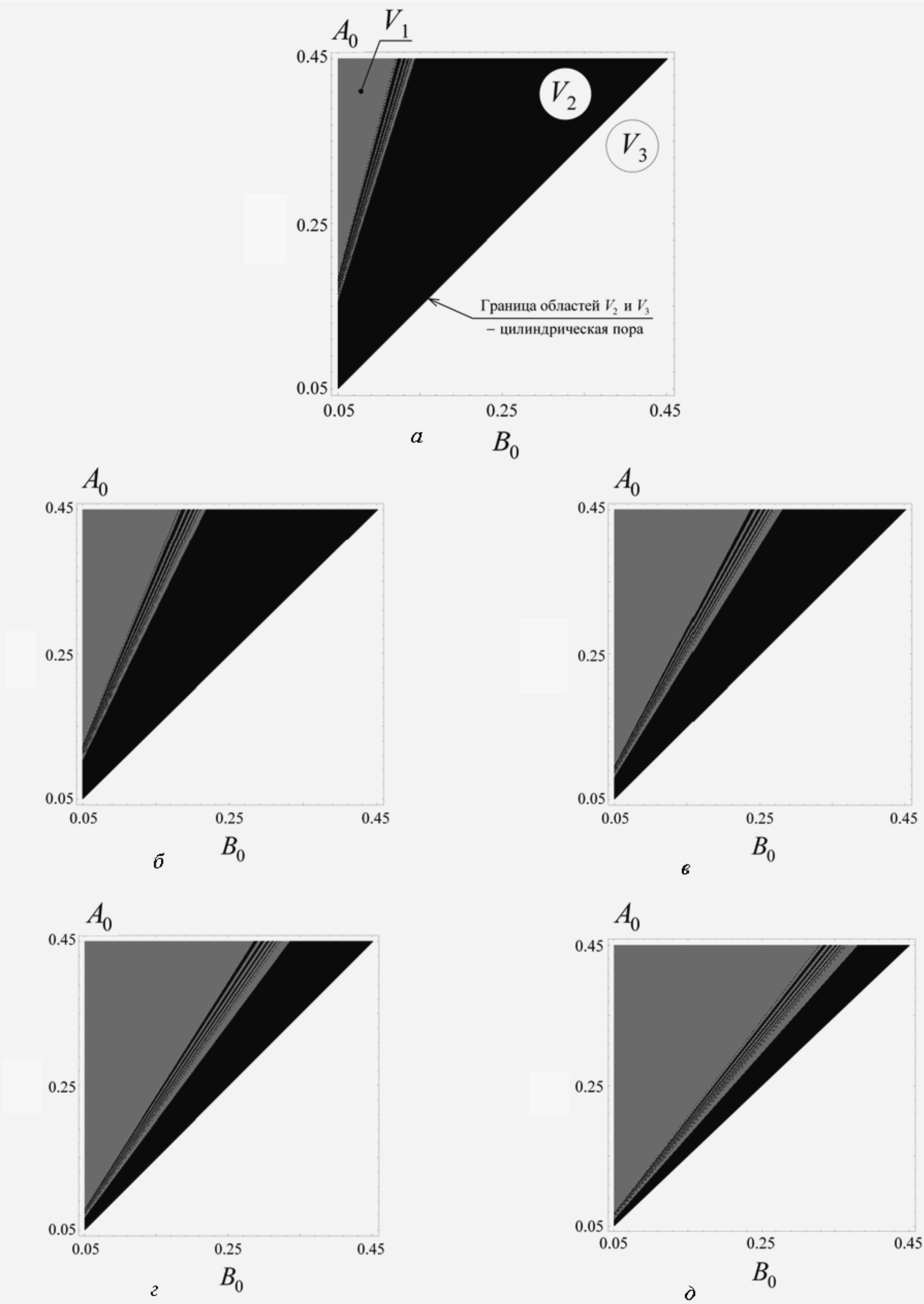


Рис. 6. Области существования периодического решения (показаны темным цветом) при различных значениях числа $\bar{M}$ и геометрических параметров (A_0, B_0):
а–д — $\bar{M}$ равно соответственно 0; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5

задачи (10) при $\gamma_1 = 6$ и осредненных числах Маха $\bar{M} \in \{0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4;\ 0,5\}$. Из этих рисунков видно, что уменьшение площади критического сечения поровой области $V_{\xi g}$ при увеличении числа Маха $\bar{M}$ приводит к уменьшению (исчезновению) периодического решения локальной задачи (10).

Выводы. Предложен приближенно-аналитический метод решения локальной задачи газовой динамики для периодически-пористой газонаполненной среды, который позволяет вычислять параметры газового потока в отдельной поре в зависимости от скорости движения осредненного газового потока и геометрических параметров поры. Установлено, что в зависимости от геометрической формы пор возможно существование как дозвуковых, так и сверхзвуковых режимов движения локального потока, а трансвуковой режим не возможен.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Д и м и т р и е н к о Ю. И. Механика композиционных материалов при высоких температурах. – М.: Машиностроение, 1997. – 368 с.
2. D i m i t r i e n k o Y u. I. Dynamic Transport Phenomena in Porous Polymer Materials Under Impulse Thermal Effects. – Transport in Porous Media. – V. 35. – 1999. – P. 299–326.
3. Д и м и т р и е н к о Ю. И., И в а н о в М. Ю. Разработка численного метода решения локальной задачи нелинейной фильтрации в периодических пористых средах. – В сб.: Современные естественно-научные и гуманитарные проблемы. – М.: Логос, 2005. – С. 469–478.
4. Д и м и т р и е н к о Ю. И., И в а н о в М. Ю. Разработка метода асимптотического осреднения для решения нелинейных задач фильтрации в периодических пористых средах. – В сб.: Математика в современном мире / Под ред. Ю.А. Дробышева. – Калуга.: Изд-во КГПУ. – 2004. – С. 155–163.
5. С а н ч е с - П а л е н с и я Э. Неоднородные среды и теория колебаний: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 472 с.
6. Б а х в а л о в Н. С., П а н а с е н к о Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. – М.: Наука. – 1984.
7. Д и м и т р и е н к о Ю. И., Г л а з и к о в М. Л. Моделирование процессов фильтрации в периодических пористых средах. – Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Естественные науки”. – № 1. – 2003. – С. 59–71.
8. Д и м и т р и е н к о Ю. И., Г л а з и к о в М. Л. Разработка метода асимптотического осреднения для решения задач газовой динамики в пористых средах. – В сб.: Математика в современном мире / Под ред. Ю.А. Дробышева. – Калуга.: Изд-во КГПУ. – 2004. – С. 163–177.
9. Н и г м а т у л и н Р. И. Динамика многофазных сред. Ч. I. – М.: Наука, 1987. – 464 с.
10. Д и м и т р и е н к о Ю. И. Тензорное исчисление. – М.: Наука. – 2001. – 575 с.
11. С е д о в Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. – М.: Наука. – 1976. – 552 с.

Статья поступила в редакцию 23.04.2007