

И. Н. Алиев, С. О. Юрченко

О НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНАХ НА ЗАРЯЖЕННОЙ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ ДВИЖУЩИХСЯ СРЕД

При решении задачи о распространении волн по заряженной горизонтальной поверхности раздела двух жидкостей в выведенном дисперсионном уравнении получено слагаемое, нелинейное по частоте волны и отношению плотностей жидкостей. Полученное дисперсионное соотношение исследовано в различных предельных случаях. Рассмотрены понятия диспергирующих сред и волн. Предпринята попытка строгой их классификации. Исследованы эффекты влияния электрического поля на эволюцию волновых пакетов.

Результаты исследований последнего десятилетия XX века показали, что в линейной теории поверхностных волн, казалось бы, не осталось неисследованных вопросов. Однако иногда в рамках традиционного подхода удавалось выделить некоторые специфические явления, такие, например, как бифуркационное ветвление решений хорошо известного дисперсионного уравнения движения волн малой амплитуды на поверхности вязкой несжимаемой жидкости без учета [1], а затем и с учетом электрического поля [2], однако в последние годы отмечен повышенный интерес к нелинейной постановке задач исследования указанного явления. Появление ряда диссертаций, тесно связанных с нелинейными эффектами, является подтверждением сказанному (см., например, [3], там же и обширный обзор литературы). При этом, в работах подобной тематики, как правило, рассматриваются линейные волны, дополняемые затем поправками, нелинейными по амплитуде; реже — вопросы эволюции волновых пакетов, несмотря на то, что последние занимают более чем важное место в нелинейной теории. Однако, интересно заметить, что в отличие, например, от нелинейной оптики, многие выводы которой получаются сравнительно простым образом (причем они обозримы и хорошо проверяются на многочисленных экспериментах), в нелинейной теории неустойчивости заряженной поверхности жидкости, к сожалению, результаты, как правило, весьма громоздки, что не позволяет уловить каких-либо значимых закономерностей.

Указанные соображения, а также последние работы авторов [4, 5] говорят о том, что из линейной теории распространения волн на заряженной поверхности раздела движущихся сред конечной глубины

удается извлечь новые результаты, имеющие особое значение для построения нелинейной теории.

Постановка задачи. Очевидно, что в реальной ситуации на поведение заряженной границы жидкости накладываются различные факторы, такие, как вязкость, тяжесть, поверхностное натяжение, влияние электрического поля, фоновое движение одной жидкости по отношению к другой, и не всегда удается выделить вклад отдельных компонентов. Поэтому представляется необходимым одновременное рассмотрение всех стабилизирующих и дестабилизирующих поверхность факторов. В классической постановке рассматривается распространение волн на заряженной границе раздела двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей различных плотностей ρ' , ρ , имеющих толщины h_1 , h_2 верхнего и нижнего горизонтальных слоев соответственно, причем верхняя жидкость — идеальный диэлектрик — движется с постоянной скоростью U , нижняя — вязкая проводящая. Вывод дисперсионного уравнения аналогичен представленному в работе [5], и проводится по методике, описанной в работах [2, 6].

Исходными уравнениями являются уравнения неразрывности и Навье–Стокса, линеаризованные в случае малости амплитуды волны по сравнению с ее длиной:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right); \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) - g; \\ \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial x} &= 0,\end{aligned}$$

где v_x , v_z — горизонтальная и вертикальная компоненты скорости жидкости, g — ускорение свободного падения, p — давление, ν — кинематическая вязкость жидкости.

Для верхней (идеальной) жидкости ищем потенциал поля скоростей в виде [7]

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_1 + \Phi_2; \\ \Phi_1 &\sim \exp [i(kx - \omega t)] \operatorname{ch} [k(h_1 - z)]; \\ \Phi_2 &= Ux,\end{aligned}$$

где U — скорость фонового движения верхней жидкости относительно нижней; k , ω — волновое число и частота синусоидальной волны.

В качестве граничных условий используются условия равенства давлений и нормальных скоростей на границе раздела, а также равенство касательных напряжений нулю на границе контакта с идеальной жидкостью.

Дисперсионное уравнение в случае волн, распространяющихся вправо, имеет вид [4, 5]

$$(2 - \chi)(1 + \operatorname{th}(lh_2) - \chi) + (\Omega(k) + K(k, \omega)) \frac{(\chi - 1) + \frac{\operatorname{th}(lh_2)}{\operatorname{th}(kh_2)}}{\chi} = 2(1 + \operatorname{th}(kh_2)) \sqrt{1 - \chi};$$

$$K(k, \omega) = -\alpha \frac{(Uk - \omega)^2 \operatorname{th}(kh_2)}{v^2 k^4 \operatorname{th}(kh_1)};$$

$$\Omega(k) = \frac{\gamma k^2 - 4\pi\sigma^2 k + (1 - \alpha)\rho g \operatorname{th}(kh_2)}{\rho v^2 k^2} \frac{1}{k};$$

$$\alpha = \frac{\rho'}{\rho}; \quad \chi = \frac{i\omega}{vk^2},$$

где σ — поверхностная плотность электрического заряда проводящей жидкости, γ — совокупный коэффициент поверхностного натяжения.

В силу симметрии задачи при переходе

$$k \rightarrow -k, \quad U \rightarrow -U \quad (1)$$

вид дисперсионного уравнения не должен меняться, поэтому для волн, распространяющихся как вправо, так и влево, получим

$$(2 - \chi)(1 + \operatorname{th}(lh_2) - \chi) + (\Omega(k) + K(k, \omega)) \times \frac{(\chi - 1) + \frac{\operatorname{th}(lh_2)}{|\operatorname{th}(kh_2)|}}{\chi} = 2(1 + |\operatorname{th}(kh_2)|) \sqrt{1 - \chi}; \quad (2)$$

$$K(k, \omega) = -\alpha \frac{(Uk - \omega)^2}{v^2 k^4} \left| \frac{\operatorname{th}(kh_2)}{\operatorname{th}(kh_1)} \right|;$$

$$\Omega(k) = \frac{\gamma k^2 - 4\pi\sigma^2 |k| + (1 - \alpha)\rho g}{\rho v^2 k^2} \left| \frac{\operatorname{th}(kh_2)}{k} \right|.$$

Как нетрудно убедиться, дисперсионное соотношение (2) получено в линейном приближении по амплитуде волны (все слагаемые, пропорциональные квадрату амплитуды, отбрасывались) и инвариантно относительно преобразований (1).

Важнейшим свойством нелинейных диспергирующих волн является то, что в дисперсионное соотношение, связывающее частоту и волновое число, входит амплитуда [8].

При фоновом движении верхней жидкости квадратичная поправка по амплитуде не появляется, равно как и для давления p^E электрического поля при известном потенциале поля [9] над колеблющейся

поверхностью заряженного проводника

$$\begin{aligned}\varphi &= 4\pi\sigma (a \exp [i (kx - \omega t) - kz] - z), \\ p^E &= -\frac{E^2}{8\pi} = -\frac{(\nabla\varphi)^2}{8\pi} = -2\pi\sigma^2(1 + 2ak \exp [i (kx - \omega t)] + \\ &+ a^2k^2 \exp [2i (kx - \omega t)] + a^2 (ik)^2 \exp [2i (kx - \omega t)]) = \\ &= -2\pi\sigma^2 - 4\pi\sigma^2k\xi,\end{aligned}$$

где E — напряженность электрического вблизи поверхности проводящей жидкости, φ — потенциал электрического поля.

Из сказанного следует, что выражение (2) не будет дополняться поправками, связанными с электрическим полем и движением верхней жидкости, зависящими от амплитуды, что полностью согласуется с линейной теорией, описанной в работе [8].

Общие свойства дисперсионных соотношений. Дисперсионные эффекты сразу после открытия Расселом уединенной волны и первых работ Рэлея и Буссинеска, Стокса, Кортвега, Де-Фриза, а позднее — Бюргерса, Хопфа и Коуэла, стали стержнем дискуссий, на который нанизывались самые различные проблемы исследований нелинейных волн (см., например, [10–12]). Однако несмотря на большое число работ, посвященных данной тематике, и широкий спектр приложений, в множестве классических изданий нет однозначного определения диспергирующих волн и их классификации по дисперсионным свойствам. Можно предложить классификацию волн по характеру изменения фазовой скорости при длине волны, стремящейся к бесконечности. Так, волна называется недиспергирующей, если $\frac{\omega(k)}{k} = c_0$, c_0 — постоянная; слабодиспергирующей, если $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\omega(k)}{k} = c_0$, $c_0 \neq 0$, и диспергирующей, если не существует конечного предела $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\omega(k)}{k}$.

Еще более неясным остается понятие диспергирующей среды, которое, по-видимому, является несколько некорректным. Дело в том, что диспергировать могут только волны в среде, но окончательное дисперсионное соотношение формируется исходя из физических уравнений среды и множества допущений и требований, которые накладываются на характер движения среды, причем гипотезы о ее свойствах при различных допущениях могут не меняться. К примеру, при одних условиях волна может быть диспергирующей, а при других — слабодиспергирующей. Ярким примером тому являются гравитационные и капиллярные волны на поверхности бесконечно глубокой емкости с жидкостью и емкости конечной глубины: при бесконечно глубокой емкости капиллярные и гравитационные волны являются диспергирующими, а для жидкости в емкости конечной глубины эти же волны

являются слабодиспергирующими. Более того, при определенном сочетании капиллярной постоянной и глубины емкости дисперсии может и не быть вовсе. При этом среда остается неизменной. Можно, конечно, подразумевать под диспергирующими среды, допускающие существование диспергирующих волн, но такая классификация не дает предварительной информации, а требует решения задачи определения дисперсионного соотношения, о главных свойствах которого пойдет речь далее.

Выясним общие свойства законов дисперсии для линейных систем, которые в общем случае для волн, бегущих вправо, запишем в неявном виде как

$$G(\omega, k) = 0, \\ \xi \sim \exp[i(kx - \omega t)].$$

Тогда переход к дисперсии волн, бегущих влево, может быть осуществлен как

$$k \rightarrow -k \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}[-\omega] \rightarrow -\operatorname{Re}[\omega], \\ \operatorname{Im}[-\omega] \rightarrow \operatorname{Im}[\omega], \end{cases} \quad (3) \\ \xi \sim \exp[i(-kx - \omega t)] = \exp[-i(kx - (-\omega t))].$$

Сохранение знака мнимой части не случайно и связано с фундаментальными свойствами распределения энергии в системе, так как частоту можно представить в виде

$$\omega = \tilde{\omega} + i\beta.$$

Переход (3) сохраняет знак коэффициента затухания, т.е. условие устойчивости (или неустойчивости) волны во времени и характер обмена энергией в исследуемой системе. Итак, из проведенных рассуждений следует

$$G(\operatorname{Re}[\omega] + i\operatorname{Im}[\omega], -k) = G(-\operatorname{Re}[\omega] + i\operatorname{Im}[\omega], k).$$

Если рассматривать только действительную частоту и коэффициент затухания и если существует обратная функция G^{-1} , то

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(-k) &= \operatorname{Re}[G^{-1}[G(\operatorname{Re}[\omega] + i\operatorname{Im}[\omega], -k)]] = \\ &= \operatorname{Re}[G^{-1}[G(-\operatorname{Re}[\omega] + i\operatorname{Im}[\omega], k)]] = -\tilde{\omega}(k), \\ \beta(-k) &= \operatorname{Im}[G^{-1}[G(\operatorname{Re}[\omega] + i\operatorname{Im}[\omega], -k)]] = \\ &= \operatorname{Im}[G^{-1}[G(-\operatorname{Re}[\omega] + i\operatorname{Im}[\omega], k)]] = \beta(k). \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, из общих соображений мы получили подтверждение очень важного и известного следствия — частота волнового движения является нечетной функцией по отношению к волновому числу k , а коэффициент затухания — четной.

Следует особо отметить, что условие (4) является значительно более сильным, чем простое требование нечетного или четного характера разложения ω по степеням k , так как допускает четные и нечетные продолжения для любых показателей степени p :

$$f(k) = k^p, \quad f_1(k) = |k|^p, \quad f_2(k) = k |k|^{p-1}.$$

Как нетрудно заметить, для любых показателей степени p , $f_1[k]$ является четной функцией, а $f_2[k]$ — нечетной, к примеру, затухание Ландау ионно-звуковых волн в плазме описывается дисперсией вида [10, 11]

$$\omega = c_0 k - \beta k^3 - i\delta |k|,$$

где коэффициенты перед степенями волнового числа k — некоторые вещественные числа.

На показатель степени p тоже накладывается одно важное ограничение: в связи с инвариантностью относительно системы отсчета любое выражение $\omega(k)$ должно обращаться в нуль при $k \rightarrow 0$, откуда следует $p > 0$.

Запишем теперь в общем виде дисперсионное соотношение для волн, бегущих как вправо, так и влево, в виде

$$\begin{aligned} P(\omega, k) &= 0; \\ P(\omega, k) &= G(\omega, k) G(\omega, -k). \end{aligned} \tag{5}$$

Полученные результаты следуют уже из соображений вещественности [8, 10], так как исходная система физических уравнений движения среды вещественна, а мнимая единица i может появиться лишь в результате подстановки члена, пропорционального $\exp[i(kx - \omega t)]$. Поэтому в этом случае закон дисперсии определяет зависимость переменной $i\tilde{\omega}$ от ik в виде нечетной функции. По тем же причинам, разложение коэффициента затухания является четной функцией k .

Для законов дисперсии нелинейных волн характерна зависимость частоты волны не только от значения волнового числа, но и от амплитуды волны, и заранее построить ряд их особенностей относительно разного рода преобразований не удастся, что, по-видимому, само по себе является главной замечательной особенностью таких соотношений и множества явлений, охватываемых ими.

Зная дисперсионное соотношение в виде (5), можно восстановить дифференциальное уравнение, которому соответствует уравнение линейной бегущей волны.

Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами можно записать в виде

$$G\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi = 0,$$

где G — некоторый многочлен. При подстановке в это уравнение элементарного решения вида $\varphi \propto \exp[i(\omega t - kx)]$ дифференцирование приведет к появлению множителей $i\omega$ и $-ik$. Поэтому дисперсионное соотношение имеет вид (для волны, бегущей вправо)

$$G(i\omega, -ik) = 0.$$

Идеальные жидкости. Линейная теория “мелкой воды”. Вернемся к выражению (2) и рассмотрим предельный случай идеальной жидкости, получающийся при переходе $\nu \rightarrow 0$:

$$\omega^2 - \frac{\gamma k^2 - 4\pi\sigma^2 |k| + (1 - \alpha)\rho g}{\rho} k \operatorname{th}(kh_2) + \alpha(Uk - \omega)^2 \left| \frac{\operatorname{th}(kh_2)}{\operatorname{th}(kh_1)} \right| = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) позволяет рассматривать волны, движущиеся как вправо, так и влево. Об изотропности уравнения (6) говорить не приходится в связи с наличием фонового движения, т.е. выделенного направления и нарушения симметрии задачи.

Рассмотрим предельные случаи уравнения (6).

Пусть верхняя жидкость гораздо легче нижней, т.е. $\alpha \rightarrow 0$. Тогда имеем

$$\omega^2 = \frac{\gamma k^2 - 4\pi\sigma^2 |k| + \rho g}{\rho} k \operatorname{th}(kh_2). \quad (7)$$

Дисперсионное соотношение разложим в ряд по k до членов четвертого порядка:

$$\omega^2 = ghk^2 \left(1 - \frac{4\pi\sigma^2}{\rho gh} |k| + \left(\frac{\gamma}{\rho g} - \frac{h^2}{3} \right) k^2 \right)$$

и представим в соответствии с формой (5) в виде

$$\begin{aligned} P(\omega, k) &= 0; \\ P(\omega, k) &= (\omega^2 - c_0^2 k^2 - 2\beta c_0 k^4)^2 - 4\delta^2 k^6; \\ c_0 &= \sqrt{gh}; \quad \beta = \frac{\sqrt{gh}}{2} \left(\frac{\gamma}{\rho g} - \frac{h^2}{3} \right); \quad \delta = \frac{2\pi\sigma^2}{\rho}, \end{aligned} \quad (8)$$

считая $h_2 = h$.

Дисперсионное соотношение (8) инвариантно относительно смены знака k . Следует однако отметить, что при рассмотрении диспергирующих волн для случая одной волны (например, бегущей вправо) достаточно разложения $\omega(k)$ в ряд до 3-й степени по k . Последнее означает, что в выражении (8) и в аналогичных ему в дальнейшем можно отбросить члены старше 6-го порядка по k .

Рассмотрим случай, когда α не слишком мало, а слой верхней жидкости является бесконечно толстым, т.е. $kh_1 \rightarrow \infty$. При этом будем

рассматривать только величины не старше четвертого порядка малости по k , тогда

$$\omega^2 - ghk^2 \left(1 - \frac{4\pi\sigma^2}{\rho g} |k| + \left(\frac{\gamma}{\rho g} - \frac{h^2}{3} \right) k^2 \right) + \alpha h (Uk - \omega)^2 |k| = 0. \quad (9)$$

Для представления уравнения (9) в виде, аналогичном (8), сгруппируем слагаемые, содержащие модуль k , в правой части, возведем в квадрат обе части уравнения и получим

$$P(\omega, k) = 0; \quad (10)$$

$$P(\omega, k) = (\omega^2 - c_0^2 k^2 - 2\beta c_0 k^4)^2 - (2\delta k^2 + \alpha h (Uk - \omega)^2)^2 k^2.$$

Уравнение (10) уже не инвариантно относительно смены знака перед k . Так же можно рассматривать задачу распространения волн на незаряженной границе раздела между двумя идеальными жидкостями, когда верхняя имеет фоновое движение со скоростью U .

В заключение рассмотрим случай длинных волн на заряженной границе раздела слоев двух жидкостей малой толщины. Для этого, как и ранее, разлагаем составляющие уравнения (6) до 4-го порядка по k включительно:

$$\omega^2 - gh_2 k^2 \left(1 - \frac{4\pi\sigma^2}{\rho g} |k| + \left(\frac{\gamma}{\rho g} - \frac{h_2^2}{3} \right) k^2 \right) + \alpha (Uk - \omega)^2 \frac{h_2}{h_1} \left(1 + \frac{1}{3} (h_1^2 - h_2^2) k^2 \right) = 0. \quad (11)$$

Отсюда так же, как в (8) и (10), получаем дисперсионное соотношение в виде

$$P(\omega, k) = 0;$$

$$P(\omega, k) = \left(\omega^2 - c_0^2 k^2 - 2\beta c_0 k^4 + \alpha (Uk - \omega)^2 b \left(1 + \frac{1}{3} \frac{(1-b^2)}{b^2} h_2^2 k^2 \right) \right)^2 - 4\delta^2 k^6, \quad (12)$$

где $b = \frac{h_2}{h_1}$.

Таким образом, для случая волн малой амплитуды на “невязкой мелкой воде” можно выделить несколько характерных случаев дисперсионных соотношений вида (8), (10), (12):

— слой жидкости малой толщины с заряженной поверхностью, верхний слой жидкости отсутствует,

$$P(\omega, k) = (\omega^2 - c_0^2 k^2 - 2\beta c_0 k^4)^2 - 4\delta^2 k^6;$$

— слой жидкости малой толщины, верхний слой бесконечно толстый и движется с фоновой скоростью U ; поверхностный заряд на границе раздела отсутствует,

$$P(\omega, k) = (\omega^2 - c_0^2 k^2 - 2\beta c_0 k^4)^2 - \alpha^2 h^2 (Uk - \omega)^4 k^2;$$

— слой заряженной жидкости малой толщины, верхний слой бесконечно толстый и движется с фоновой скоростью U ,

$$P(\omega, k) = (\omega^2 - c_0^2 k^2 - 2\beta c_0 k^4)^2 - (2\delta k^2 + \alpha h (Uk - \omega)^2)^2 k^2;$$

— верхний и нижний слой имеют соизмеримые толщины, значительно меньшие длины волны, поверхность раздела заряжена, верхний слой движется с фоновой скоростью U ,

$$P(\omega, k) = \\ = \left(\omega^2 - c_0^2 k^2 - 2\beta c_0 k^4 + \alpha (Uk - \omega)^2 b \left(1 + \frac{1}{3} \frac{(1 - b^2)}{b^2} h^2 k^2 \right) \right)^2 - 4\delta^2 k^6.$$

Выражения для функций $P(\omega, k)$ в представленном виде служат для корректного определения законов дисперсии, инвариантных относительно координатных преобразований, и необходимы для анализа временной эволюции волновых пакетов.

Временная эволюция волновых пакетов. Вернемся к средам со слабой дисперсией. Поставим задачу: проследить за временным изменением некоторого предварительно заданного профиля волны. Зная закон дисперсии, решение для любого момента времени запишем в виде [11]

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(k) \exp[i(kx - \omega t)] dk; \\ \chi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, 0) \exp[-ikx] dx. \quad (13)$$

Рассмотрим простейший случай дисперсии волн на заряженной поверхности покоящейся жидкости с дисперсией (7). Будем считать, что плотность поверхностного заряда не является критической, и все волны являются устойчивыми. Разложим частоту ω в ряд по k и рассмотрим только моду, соответствующую волнам, бегущим вправо:

$$\omega = c_0 k \left(1 - \frac{\delta}{c_0^2} |k| + \left(\frac{\beta}{c_0} - \frac{\delta^2}{2c_0^4} \right) k^2 \right) = \\ = c_0 k - \frac{\delta}{c_0} k |k| - \left(\frac{\delta^2}{2c_0^3} - \beta \right) k^3. \quad (14)$$

С учетом дисперсии (14) профиль (13) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i(kx - c_0 kt + \delta k |k| t + t\beta k^3)] \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x', 0) \exp [-ikx'] dx' dk, \\ \Phi(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x', 0) G(x, x', t) dx', \\ x - c_0 t &\rightarrow x, \quad \frac{\delta^2}{2c_0^3} - \beta \rightarrow \beta, \quad \frac{\delta}{c_0} \rightarrow \delta. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $G(x, x', t)$ — функция Грина для поставленной задачи, которую можно вычислить следующим образом:

$$\begin{aligned} G(x, x', t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i(k(x - x') + \delta k |k| t + t\beta k^3)] dk = \\ &= \frac{1}{2\pi} 2 \int_0^{\infty} \cos(k(x - x') + t\delta k^2 + t\beta k^3) dk = \\ &= \left[\begin{array}{l} k(3t\beta)^{1/3} = u, \\ \frac{x - x'}{(3t\beta)^{1/3}} = \zeta, \quad \frac{\delta t^{1/3}}{2(3\beta)^{2/3}} = \kappa \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{\pi(3t\beta)^{1/3}} \int_{-3\kappa}^{\infty} \cos\left(u(\zeta + 3\kappa^2) + \frac{u^3}{3}\right) du. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что окончательно, с учетом обратных переходов от движущейся системы координат к исходной

$$G(x, x', t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(3t\beta)^{1/3}} (Ai(\zeta + 3\kappa^2) + \Lambda(\zeta, \kappa)) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(3t\beta)^{1/3}} F(\zeta, \kappa),$$

$$\Lambda(\zeta, \kappa) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-3\kappa}^0 \cos\left(u(\zeta + 3\kappa^2) + \frac{u^3}{3}\right) du; \quad (16)$$

$$\zeta = \frac{x - x' - c_0 t}{(3t)^{1/3} \left(\frac{\delta^2}{2c_0^3} - \beta\right)^{1/3}}, \quad \kappa = \frac{\delta t^{1/3}}{2c_0 \cdot 3^{2/3} \left(\frac{\delta^2}{2c_0^3} - \beta\right)^{2/3}}.$$

При $\delta = 0$ получаем уже известное решение задачи [см., например, 11, 13].

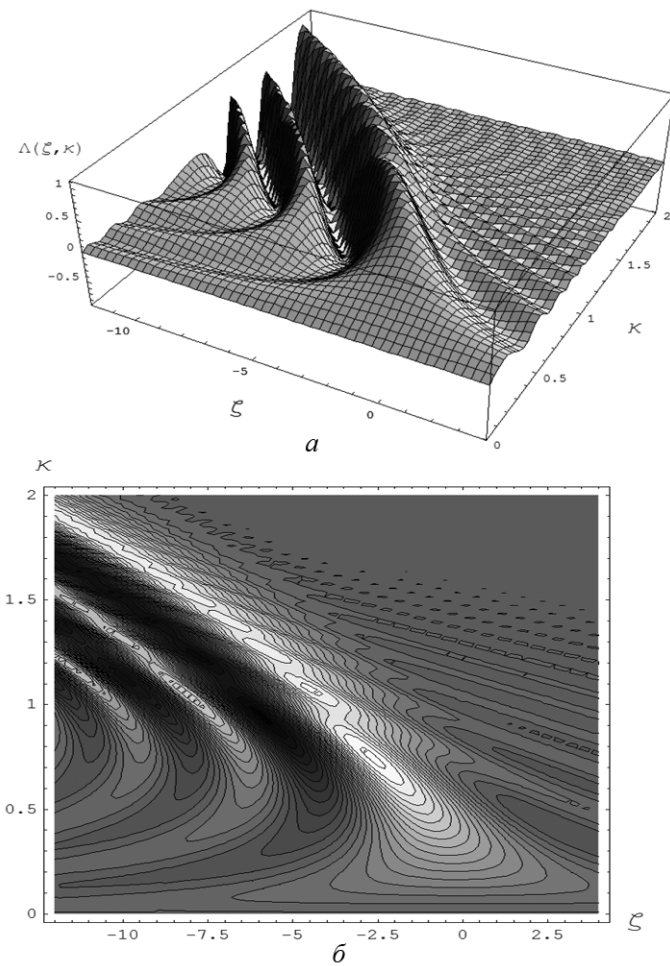


Рис. 1. Вид (а) и линии уровня (б) функции $\Lambda(\zeta, \kappa)$

На рис. 1 приведены вид и линии уровня функции $\Lambda(\zeta, \kappa)$, которая, как видно, имеет осциллирующую структуру — бесконечное множество “бугров”. При интегрировании (15) необходимо учитывать зависимость параметров ζ и κ как от времени, так и от разности $x - x'$.

Укажем некоторые замечательные особенности функции $\Lambda(\zeta, \kappa)$:

$$\begin{aligned} \kappa \rightarrow \infty, \quad \Lambda(\zeta, \kappa) &\rightarrow 0; \\ \kappa \gg 1, \quad \Lambda(\zeta, \kappa) &\rightarrow \text{Ai}(\zeta + 3\kappa^2); \\ \kappa \rightarrow 0, \quad \Lambda(\zeta, \kappa) &\rightarrow 0; \\ \zeta \rightarrow \pm\infty, \quad \Lambda(\zeta, \kappa) &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

На рис. 2 приведены вид и поверхности уровня функции $F(\zeta, \kappa)$, полученной по соотношениям (16). Следует отметить ряд важных свойств этой функции:

$$\begin{aligned} \kappa \rightarrow 0, \quad F(\zeta, \kappa) &\rightarrow \text{Ai}(\zeta); \\ \kappa \rightarrow \infty, \quad F(\zeta, \kappa) &\rightarrow 0; \\ \zeta \rightarrow \pm\infty, \quad F(\zeta, \kappa) &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

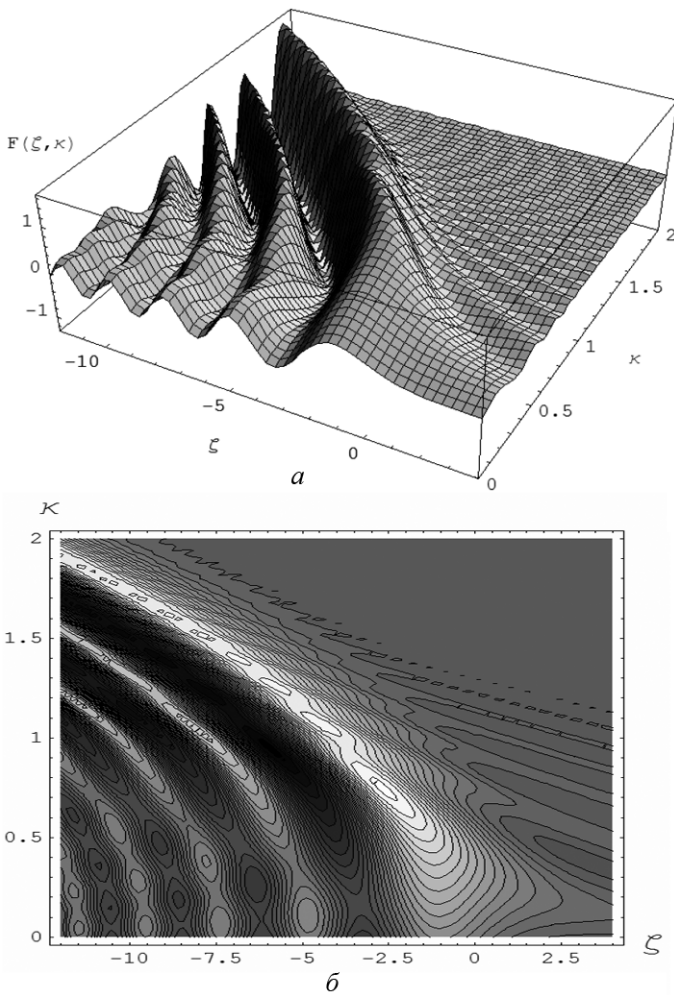


Рис. 2. Вид (а) и линии уровня (б) функции $F(\zeta, \kappa)$

Функция $F(\zeta, \kappa)$ имеет множество локальных максимумов и минимумов — “бугров” и “впадин”, обусловленных интерференцией Λ -функции и функции Эйри.

Указанные свойства функции $F(\zeta, \kappa)$ говорят о том, что при значениях времени

$$t \sim \frac{72c_0^3 \left(\beta - \frac{\delta^2}{2c_0^3} \right)^2}{\delta^3}$$

($\kappa \sim 1$) оказываются значительными эффекты влияния электрического поля на эволюцию волнового пакета.

Все проведенные рассуждения касались случая $\beta - \frac{\delta^2}{2c_0^3} \neq 0$. Рассмотрим дисперсию в такой среде, для которой $\beta - \frac{\delta^2}{2c_0^3} = 0$. Тогда

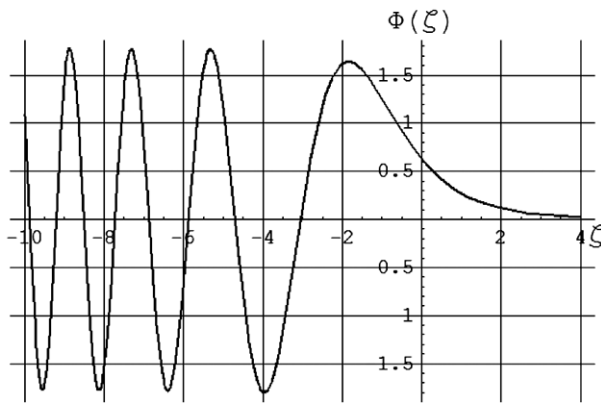


Рис. 3. Вид функции $\Phi(\zeta)$

вместо (15) получим

$$\begin{aligned}
 G(x, x', t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i \left(k(x - x') - c_0 k + \frac{\delta}{c_0} k |k| t \right) \right] dk = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \left[k(x - x') + \frac{\delta}{c_0} k^2 t \right] dk = \\
 &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\delta t}{c_0}} \int_0^{\infty} \cos [\zeta u + u^2] du = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\delta t}{c_0}} \Phi(\zeta),
 \end{aligned}$$

где $\zeta = (x - x') \sqrt{\frac{c_0}{\delta t}}$.

Из графика функции $\Phi(\zeta)$ (рис. 3) видно, что при положительных значениях аргумента $\Phi(\zeta)$ стремится к нулю, при отрицательных имеет бесконечный незатухающий осциллирующий “хвост”.

Заключение. В работе выявлены основные свойства законов дисперсии для поверхностных волн и на основе самых общих соображений показано, что частота является четной функцией волнового числа, а коэффициент затухания — нечетной. Для полученного дисперсионного уравнения выделено несколько характерных случаев, соответствующих различным режимам. Полученные выражения положены в основу анализа временной эволюции волновых пакетов. Получена функция Грина задачи об эволюции профиля волн, распространяющихся на поверхности тяжелой заряженной жидкости с учетом поверхностного натяжения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антонюк П. Н. Дисперсионное уравнение для плоской капиллярно-гравитационной волны на свободной поверхности вязкой несжимаемой жидкости // ДАН СССР. – 1986. – Т. 286. – № 6. – С. 1324–1328.

2. Алиев И. Н., Филиппов А. В. О волнах, распространяющихся по плоской поверхности вязкой проводящей жидкости в электрическом поле // Магнитная гидродинамика. – 1989. – № 4. – С. 94–98.
3. Белоножко Д. Ф. Нелинейные движения заряженной поверхности жидкости / Дисс... д-ра физ.-мат. наук. – Ярославль, 2004. – 278 с.
4. Алиев И. Н., Карасева В. П., Юрченко С. О. Учет нелинейных эффектов в динамике движения топлива в реактивных двигателях малой тяги / Труды Шестой Международной научно-технической конференции “Чкаловские чтения”. – Егорьевск, – 2007. – С. 79–80. Некоторые вопросы динамики движения топлива в реактивных двигателях малой тяги / Труды XIX Всероссийской межвузовской научно-технической конференции “Электромеханические процессы в энергетических установках”. – Казань, – 2007. – С. 125–127.
5. Алиев И. Н., Юрченко С. О., Назарова Е. В. Особенности комбинированной неустойчивости заряженной границы раздела движущихся сред // Инженерно-физический журнал. – 2007. – Т. 80. – № 5. – С. 64–69. К вопросу о неустойчивости границы раздела двух сред конечной толщины // Инженерно-физический журнал. – 2007. – Т. 80. – № 6. – С. 127–133.
6. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. – М.: Наука, 1959. – 699 с.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
8. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. – 622 с.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 620 с.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Физическая кинетика. – М.: Наука, 1979. – 526 с.
11. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. – М.: Наука, 1973. – 175 с.
12. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. – М.: УРСС, 2001. – 318 с.
13. Алиев И. Н., Мильвидский А. Р., Наумов И. А. Капиллярные волны на поверхности тонкого слоя заряженной проводящей жидкости // Инженерно-физический журнал. – 2002. – Т. 75. – № 5. – С. 86–87.

Статья поступила в редакцию 26.02.2007

Исмаил Новрузович Алиев родился в 1945 г., окончил в 1969 г. Московский инженерно-физический институт (МИФИ). Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 60 научных работ в различных областях физики.

I.N. Aliev (b. 1945) graduated from the Moscow Engineering and Physical Institute in 1969. D. Sc. (Phys.-Math.), professor of “Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of over 60 publications in the various fields of physics.

С.О. Юрченко родился в 1986 г. — студент МГТУ им. Н.Э. Баумана.

S.O. Yurchenko (b. 1986) — student of the Bauman Moscow State Technical University.