УДК 621.865.8-5.001.5

Н. С. Васильев

ЗАДАЧА О КРАТЧАЙШИХ МАРШРУТАХ В СЕТЯХ С ПЕРЕМЕННОЙ МЕТРИКОЙ

Решена задача поиска кратчайших маршрутов в сетях с переменной метрикой. Обоснована сходимость алгоритмов, уравнивающих длины выбираемых маршрутов. Доказана устойчивость решения.

Создание эффективных систем управления потоками в транспортных сетях (ТС), например, в пакетных телекоммуникационных системах, основано на моделях сетей с переменной метрикой ([1–3]). В работе [1] отмечено, что даже в случае однопродуктовой сети имеется обратная связь между потоками и задержкой в передаче пакетов. (Суммарная задержка — это метрика сети.)

Игнорирование этой зависимости не позволило устойчиво управлять маршрутизацией (М) тем более многопродуктовых ТС. Соответствующие сетевые протоколы порождали колебательные процессы в сетях несмотря на то, что при решении задачи М применяемая метрика изменялась при переходе от одной тяготеющей пары абонентов к другой [1]. (Эта метрика фиксировалась в процессе поиска кратчайших маршрутов (КМ) соединения каждой тяготеющей пары в отдельности.)

Свойства сетей с переменной метрикой изучались в работах [2, 3] в связи с поиском равновесной М глобальной пакетной сети, при которой все пары абонентов передавали бы свои сообщения по КМ в метрике, отвечающей искомому равновесию. На базе разработанных методов проведены вычислительные эксперименты с ТС Интернет [4].

Построение, обоснование сходимости этих алгоритмов, а также устойчивости получаемого решения базируются на свойствах задачи поиска КМ в однопродуктовой сети с переменной метрикой. Решению этой задачи посвящена настоящая статья.

Математическая модель ТС. Топологию ТС будем представлять в виде связного неориентированного графа $\Gamma = (U, V)$, вдоль ребер $l \in V, l = 1, 2, \ldots, n$, которого расположены каналы (линии) передачи продуктов, а в узлах $u \in U$ размещены "источники" и "стоки" передаваемых потоков. Доставка продуктов каждой k-й пары источник–сток, $k = 1, 2, \ldots, K$, осуществляется по одному или нескольким маршрутам графа сети $\{L_j^k\}$, соединяющим эти узлы. Входные потоки $\lambda_k = \lambda_0^k$

поступают в узлы-источники, разделяются в них на маршрутные потоки величины $\{\lambda_j^k\}$ и по маршрутам $\{L_j^k\}$ передаются в соответствующие узлы-стоки, из которых покидают ТС. Функционирование сети происходит с задержками $f_l(z_l)$ на линиях сети $l = 1, 2, \ldots, n$, зависящими от величин потоков z_l.

Например, в пакетных сетях передачи данных величина задержки всякого пакета на любой линии складывается из времени определения направления дальнейшей передачи (с помощью маршрутной таблицы), времени ожидания в очереди и собственно из времени пересылки пакета по этой линии связи в следующий (транзитный) узел сети. Определение функций задержек составляет самостоятельную задачу (см. [1]).

Время доставки продуктов вдоль маршрута L (или длина маршрута) равно сумме задержек

$$\rho_f\left(L, z\right) = \sum_{l \in L} f_l(z_l). \tag{1}$$

Это — метрика сети. Индекс f в обозначении метрики будем опускать, считая, что векторная функция $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ зафиксирована. Метрика есть время передачи сообщения, а все потоки — интенсивности передачи, измеряемые в одинаковых единицах. По смыслу введенных обозначений для всех допустимых значений индексов k, l должны выполняться балансовые соотношения

$$\sum_{j=1}^{J_k} \lambda_j^k = \lambda_k, \sum_{j,k:\, l \in L_j^k} \lambda_j^k = z_l. \tag{2}$$

Через z_l в (2) обозначен суммарный поток по l-му каналу. В любой ТС пропускные способности всех линий передачи ограничены:

$$z_l \leqslant \bar{z}_l, \quad l = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Под допустимой маршрутизацией сети (для k-й тяготеющей пары) будем понимать совокупность маршрутов $\{L_j^k\}$ и маршрутных потоков $\{\lambda_j^k\}$ (интенсивностей передачи) такую, что выполняются соотношения (2), (3) и $\rho(L_j^k, z) < \infty$.

Выбор допустимой маршрутизации однозначно задает вектор допустимых потоков по линиям ТС $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$.

Любая k-я тяготеющая пара “заинтересована” в уменьшении времен передачи своих продуктов, равных длинам маршрутов $\{L_j^k\}$. Поэтому, располагая векторным критерием качества маршрутизации

$$F^k = (\rho(L_1^k, z), \ldots, \rho(L_{J_k}^k, z)), \quad k = 1, 2, \ldots, K, \tag{4}$$

всякая пара стремится его минимизировать (в векторном смысле) за счет выбора допустимой маршрутизации.

Постановки векторных задач об оптимальной маршрутизации ТС (всех пар) даны в работах [2–4].

В случае единственной k-й тяготеющей пары под оптимальной маршрутизацией понимается такой выбор допустимой маршрутизации, что не существует соединяющего k-ю пару маршрута L, для которого

$$(\forall j)\, \rho\,(L,\, z) \leqslant \rho\left(L_j^k,\, z\right),$$

причем некоторые из этих неравенств являются строгими. (Маршрут L более привлекателен по сравнению с маршрутами из множества $\{L_j^k\}$).

Таким образом, все оптимальные маршруты являются кратчайшими в метрике $\rho(L, z)$, а их поиск состоит в решении задачи о кратчайших маршрутах.

Отметим, что решение той же задачи на подграфе графа сети может привести к более коротким маршрутам.

Основной результат. Задача о кратчайших маршрутах решается для произвольно зафиксированной тяготеющей пары. В дальнейшем для упрощения записи будем опускать индекс k.

Пусть Z — многогранник допустимых потоков по линиям передачи. (Ввиду равенств (2), (3) Z – выпуклый компактный многогранник.) Определим функции $t_l = t_l(z_l)$, $l = 1, 2, \ldots, n$, как решения обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ)

$$z_l t_l' + t_l = f_l(z_l) \tag{5}$$

с нулевыми начальными значениями, где штрих означает дифференцирование по переменной z_l.

Рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$F(z) = \sum_{l=1}^{n} z_l t_l(z_l) \to \min_{z \in Z}. \tag{6}$$

Теорема 1. Пусть, все функции задержек монотонно возрастают, дифференцируемы и $(\forall l) f_l(z) \to \infty$, $z \to \bar{z}_l$. Тогда, если $Z \neq \varnothing$, то минимум целевой функции (6) достигается в единственной точке z^*, которой отвечает некоторая оптимальная маршрутизация.

Доказательство. По условию теоремы и определению (5), (6) имеем

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z_l^2} = (z_l t_l'(z_l) + t_l(z_l))' = f_l'(z_l) > 0.$$

Критерий Сильвестра [5, с. 95] позволяет заключить: экстремальная задача (6) выпукла, а целевая функция $F(z)$ — строго выпукла.

Следовательно, если решение задачи (6) существует, то оно единственно.

Согласно предположениям теоремы элемент z^* удовлетворяет строгим неравенствам в (3), т.е. эти ограничения неактивны. Применим теорему Куна-Таккера [6], которая в данном случае служит критерием оптимальности.

Для этого сначала выразим произвольный вектор z в виде $z = A\lambda$. Через A обозначена $n \times J$ матрица всех маршрутов, соединяющих рассматриваемую тяготеющую пару, $\lambda = (\lambda_j)$ берется из соотношений (2). (A – это $0,1$-матрица инциденций ребра–маршруты.) Это всегда можно сделать. В случае, когда маршрут L_j не применяется для передачи продуктов, можно положить $\lambda_j = 0$. (Маршрут L_j представлен j-м столбцом матрицы маршрутов.)

Выпишем функцию Лагранжа ($\lambda_0 = \lambda_k$):

$$H(\mu, \lambda) = F(A\lambda) + \left\langle \mu, \lambda_0 - \sum_{j=1}^{J} \lambda_j \right\rangle, \ \ \lambda \geqslant 0.$$

Тогда приходим к следующей форме критерия оптимальности вектора $\lambda = \lambda^*,\ z^* = A\lambda^*$:

$$\nabla_\lambda H = fA - \mu(1, \ldots, 1) \geqslant 0, \ \ (\forall j)\lambda_j((fA)_j - \mu) = 0. \qquad (7)$$

Здесь вектор задержек $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ вычислен в точке z^*.

Из (7) следует, что $(fA)_j = \mu$, если $\lambda_j \neq 0$. Во всех остальных случаях $(fA)_j \geqslant \mu$. Осталось заметить, что $(fA)_j = \rho(L_j, z^*)$. Следовательно, все применяемые маршруты, имея длину μ, являются кратчайшими, т.е. оптимальны.

Устойчивость решения. Исходные данные модели обычно обладают некоторой неопределенностью и возникает необходимость исследовать устойчивость искомого решения. В рассматриваемой модели будем варьировать все параметры модели с помощью изменения $c = (\lambda_0, \overline{z})$-вектора, составленного из величин входных потоков и пропускных способностей линий ТС.

Задержки и целевая функция (6) есть функции переменных z, c, а многогранник потоков — значение многозначного отображения $c \to Z(c)$. Предполагается, что параметр c изменяется в пределах множества C такого, что при $c \in C$ выполняются все условия теоремы 1 и, кроме того, все функции задержек непрерывны по совокупности переменных. Тогда справедлива

Теорема 2. Метрика сети непрерывно зависит от параметров модели.

Доказательство. Из теоремы о непрерывной зависимости ОДУ от параметра следует, что целевая функция $F(z, c),\ z \in Z(c),\ c \in C$, экстремальной задачи (6) непрерывна. Анализ линейных соотношений (2), (3) позволяет сделать вывод о том, что отображение $c \to Z(c)$ непрерывно по Хаусдорфу [7]. Ввиду теоремы 1 отсюда можно заключить, что оптимальное решение задачи (6) $z^* = z^*(c)$ непрерывно зависит от параметра c. Таким образом, метрика сети также непрерывна как сумма непрерывных функций (см. (1)).

Непосредственным следствием теорем 1, 2 является вывод о том, что решение задачи о КМ устойчиво к изменению параметров модели.

Принцип уравнивания. Для поиска оптимальных маршрутов применим следующий подход. Произвольно выберем начальную маршрутизацию (шаг $t = 0$).

Пусть на шаге $t = 0, 1, \ldots$ имеется маршрутизация, обозначенная $M^t, M^t = (\{L_j^k\}, \{\lambda_j^k\})$. Ей отвечает вектор потоков z^t. В сети с фиксированной метрикой $\rho(L, z^t)$ найдем кратчайший маршрут L^t. (Достаточно воспользоваться алгоритмом Дейкстры [8]).

Пусть существует маршрут L из текущей маршрутизации M^t, имеющий большую длину по сравнению с L^t. (Иначе решение задачи уже найдено.) Тогда часть потока λ^t, передаваемого по маршруту L, перебросим на маршрут L^t. Ввиду монотонного роста функций задержек имеется возможность уменьшить разность суммарных задержек вдоль этих маршрутов. При этом либо длины сравниваемых маршрутов совпадут, либо маршрут L перестанет использоваться.

Определим очередную маршрутизацию ТС M^{t+1}, добавив к M^t пару $L^t,\ \lambda^t$ и возможно исключив маршрут L в случае, когда он перестает применяться.

Указанные действия составляют содержание *принципа уравнивания* Ю.Б. Гермейера [9] как метода решения задачи о кратчайших маршрутах.

Теорема 3. Последовательность потоков $\{z^t,\ t = 0, 1, \ldots\}$, построенная на основе принципа уравнивания, сходится к решению z^* задачи (6).

Доказательство. Вычислим производную функции $F(A\lambda)$ в текущей точке $z^t = A\lambda^t$ по направлению вектора Δ, все координаты которого равны нулю за исключением тех, которые отвечают маршрутным потокам вдоль L и L^t, равных соответственно 1 и -1.

$$\frac{dF(A\lambda)}{d\Delta} = \langle fA, \Delta \rangle = \rho(L, z^t) - \rho(L^t, z^t) > 0.$$

Шаг градиентного метода в направлении $-\Delta$ с целью выравнивания длин маршрутов приводит к уменьшению значения целевой функции в задаче (6): $F(z^{t+1}) < F(z^t),\ \ t = 0, 1, \ldots$. Сходящаяся числовая последовательность $\{F(z^t)\}$ в пределе дает $F(z^*)$. Согласно теореме 1 $z^t \to z^*$.

Выводы. С помощью теоремы 1 можно доказать существование такой маршрутизации всей сети, при которой все тяготеющие пары применяют кратчайшие маршруты. Решение обсуждаемой задачи можно использовать при разработке сетевых протоколов (см. [1]), а также для проверки требований, предъявляемых к качеству функционирования ТС на этапе ее проектирования. Например, пусть требуется гарантировать времена доставки продуктов, равные, в иных терминах, длинам маршрутов $\bar{\rho} = (\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \ldots, \bar{\rho}_K)$. ТС обладает такими возможностями в том и только в том случае, когда оптимальные маршруты имеют длины $\rho_k \leqslant \bar{\rho}_k, \ k = 1, 2, ..., K$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бертсекас Д., Галлагер Р. Сети передачи данных. – М.: Наука, 1989.
2. Васильев Н. С. О свойствах решений задачи маршрутизации сети с виртуальными каналами // Ж. Вычисл. матем. и матем. физ. – 1997. – Т. 37, № 7. – С. 785–793.
3. Васильев Н. С. О свойствах решений задачи динамической маршрутизации сети // Ж. Вычисл. матем. и матем. физ. – 1998. – Т. 38, № 1. – С. 42–52.
4. Васильев Н. С., Федоров В. В. О построении алгоритмов маршрутизации пакетных сетей на основе векторных критериев // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2005. – № 3. – С. 36–47.
5. Ланкастер П. Теория матриц. – М.: Наука, 1978.
6. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980.
7. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974.
8. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. – М.: Наука, 1990.
9. Федоров В. В. Численные методы максимина. – М.: Наука, 1979.

Статья поступила в редакцию 5.05.2007

Николай Семенович Васильев окончил МГУ им. М.В. Ломоносова в 1974 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры “Высшая математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 50 научных работ в области теории оптимального управления и моделирования распределенных телекоммуникационных систем.

N.S. Vasiliev graduated from the Lomonosov Moscow State University in 1974. D. Sc. (Phys.-Math.), professor of “Higher Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 50 publications in the field of theory of optimal control and simulation of distributed telecommunication systems.