УДК 519.234

Е. Р. Горяинова, В. Б. Горяинов

ЗНАКОВЫЕ КРИТЕРИИ В МОДЕЛИ СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО

Для процесса скользящего среднего порядка q построены локально наиболее мощные знаковые критерии для проверки гипотезы о независимости наблюдений. Статистики предложенных критериев являются свободными от распределения, найдено их точное распределение, доказана асимптотическая нормальность.

Постановка задачи. Рассмотрим модель скользящего среднего

$$u_i = \varepsilon_i + \alpha_1\varepsilon_{i-1} + \dots + \alpha_q\varepsilon_{i-q}, \qquad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \tag{1}$$

где $u_1, \dots, u_n$ — наблюдения; ε_i — независимые одинаково распределенные случайные величины с неизвестной функцией распределения $G(x)$; $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_q)$ — неизвестный вектор параметров.

Обозначим

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0, \\ 1, & \text{если } x \geq 0, \end{cases}$$

$S_k = \operatorname{sign} u_k$, $k = 1, \dots, n$, $S = (S_1, \dots, S_n)$. Через $s = (s_1, \dots, s_n)$ будем обозначать реализацию случайного вектора S.

В работе изучаются знаковые критерии, т.е. критерии, статистики которых являются функцией не самих наблюдений $u_1, \dots, u_n$, а лишь их знаков $S = (S_1, \dots, S_n)$, а именно, строятся: локально наиболее мощный (ЛНМ) критерий в классе всех знаковых критериев для проверки гипотезы $H_0 : \alpha = 0$ о независимости наблюдений $u_1, \dots, u_n$ против односторонних альтернатив $H_{1j} : \alpha_j > 0$ и $H_{2j} : \alpha_j < 0$, $j = 1, \dots, q$; ЛНМ несмещенный знаковый критерий для проверки $H_0 : \alpha = 0$ против двусторонней альтернативы $H_{3j} : \alpha_j \neq 0$, $j = 1, \dots, q$; критерий для проверки H_0 против $H_3 : \alpha \neq 0$.

Для уравнения регрессии построение аналогичных критериев рассмотрено в работе [1], для уравнения авторегрессии — в [2].

Основные результаты. На разных этапах исследования будем предполагать, что на функцию распределения $G(x)$ наложены некоторые из следующих условий:

A1: $G(0) = 1/2$;

A2: $\mathsf{E}\varepsilon_1 = 0$;

A3: $\mathsf{E}|\varepsilon_1|^{1+r} < \infty, \quad 0 < r \leq 1$;

A4: $G'(0) > 0$ и $G'(x)$ удовлетворяет условию Гельдера порядка r, т.е.

$$|G'(x_1) - G'(x_2)| \le L|x_1 - x_2|^r, \quad 0 < r \le 1, \quad L > 0;$$

A5:$\mathsf{E}|\varepsilon_1|^2 < \infty, \quad \sup\limits_x G''(x) < \infty$, $G''(0) = 0$ и $G''(x)$ непрерывна в нуле.

Обозначим Q — критическую область знакового критерия, т.е. такое подмножество в множестве последовательностей из -1 и 1 длины n, что если $S \in Q$, то гипотеза H_0 отвергается. Через $P_n(Q, \alpha)$ обозначим функцию мощности знакового критерия, определяемую как вероятность отклонения гипотезы

$$P_n(Q, \alpha) = \mathsf{P}\{S \in Q\}.$$

Определим ЛНМ знаковый критерий для проверки гипотезы $H_0 : \alpha = 0$ против односторонней альтернативы $H_{1j} : \alpha_j > 0$, $j = 1, \dots, q$, как критерий, имеющий функцию мощности $P_n(Q, \alpha)$ наиболее круто возрастающую в положительном направлении j-го аргумента α_j от точки $\alpha = 0$. Если $P_n(Q, \alpha)$ дифференцируема по α_j, то это означает, что критическая область Q ЛНМ знакового критерия должна быть выбрана так, чтобы величина $\dfrac{\partial P_n(Q, \alpha)}{\partial \alpha_j}$ была максимальной при $\alpha = 0$.

Построим односторонний ЛНМ знаковый критерий для проверки гипотезы $H_0 : \alpha = 0$ против альтернативы $H_{1j} : \alpha_j > 0$, $j = 1, \dots, q$. Поскольку

$$P_n(Q, \alpha) = \sum_{s \in Q} P_n(s, \alpha), \tag{2}$$

где $P_n(s, \alpha) = P\{S = s, \alpha\}$ — функция правдоподобия, то $\dfrac{\partial P_n(Q, \alpha)}{\partial \alpha_j}$ будет наибольшей, если в критическую область Q будут последовательно вплоть до достижения заданного уровня значимости включаться векторы $s = (s_1, \dots, s_n)$, имеющие наибольшие значения $\dfrac{\partial P_n(s, \alpha)}{\partial \alpha_j}$. Поэтому искомая критическая область

$$Q = \left\{ s : \left.\frac{\partial P_n(s, \alpha)}{\partial \alpha_j}\right|_{\alpha = 0} > \mathrm{const} \right\}.$$

Обозначим

$$\varepsilon_1^- = \begin{cases} \varepsilon_1, & \text{если } \varepsilon_1 \le 0 \\ 0, & \text{если } \varepsilon_1 > 0 \end{cases}, \qquad A = -4G'(0)\mathsf{E}\varepsilon_1^-, \tag{3}$$

$$\gamma_t = \sum_{k=t+1}^{n} s_{k-t} s_k, \qquad t = 1, 2, \dots, n-1. \tag{4}$$

Лемма 1. Пусть функция распределения $G(x)$ удовлетворяет условиям А1, А2, А3 и А4. Тогда в окрестности $\alpha = 0$ функция правдоподобия имеет вид

$$P_n(s,\alpha) = 2^{-n}\left(1 + A\sum_{j=1}^{q}\gamma_j\alpha_j + o\left(|\alpha|\right)\right), \tag{5}$$

где γ_t и A определяются формулами (4) и (3) соответственно.

Доказательство леммы 1 приведено далее.

Из леммы 1 следует, что $\dfrac{\partial P_n(s,0)}{\partial \alpha_j}$ с точностью до неотрицательного множителя есть γ_j. Таким образом, статистика ЛНМ критерия имеет вид γ_j, а критическая область есть

$$Q = \{s : \gamma_j > C_1\}, \tag{6}$$

где C_1 — константа. Аналогично строится ЛНМ критерий для проверки H_0 против $H_{2j} : \alpha_j < 0$. Его критическая область имеет вид

$$Q = \{s : \gamma_j < C_2\}, \tag{7}$$

где C_2 — константа.

Перейдем к построению ЛНМ несмещенного знакового критерия для проверки гипотезы $H_0 : \alpha = 0$ против двусторонней альтернативы $H_{3j} : \alpha \neq 0$, $j = 1, \ldots, q$.

Следуя общему определению несмещенности (см. [3], с. 174), определим несмещенный знаковый критерий для проверки $H_0 : \alpha = 0$ против двусторонней альтернативы $H_{3j} : \alpha \neq 0$ как критерий, для которого верно неравенство

$$P_n(Q,0) \leq P_n(Q,\alpha),\ \ \alpha = (0,\ldots,0,\alpha_j,0,\ldots,0),\ \ \alpha_j \neq 0,\ \ j = 1,\ldots,q.$$

Легко видеть, что если функция $P_n(Q,\alpha)$ дифференцируема по α_j в точке $\alpha_j = 0$, то из этого неравенства следует, что

$$\frac{\partial P_n(s,0)}{\partial \alpha_j} = 0. \tag{8}$$

В этом случае критерий будет ЛНМ несмещенным, если выполнено (8) и $\dfrac{\partial^2 P_n(s,0)}{\partial \alpha_j^2}$ максимальна.

Лемма 2. Пусть функция распределения $G(x)$ удовлетворяет условиям А1, А2 и А5. Тогда в окрестности $\alpha = 0$ функция правдоподобия имеет вид

$$P_n(s,\alpha) = 2^{-n}\left(1 + A\sum_{j=1}^{q}\gamma_j\alpha_j + \right.$$

$$+\frac{A}{2}\sum_{j=1}^{q}\alpha_j^2\left(\gamma_j^2+(n-j)-2n^{-1/2}\gamma_{2j}\right)+\sum_{\substack{j,r=1\\ j\neq r}}^{q}c_{jr}\alpha_j\alpha_r+o\left(|\alpha|^2\right)\Bigg), \quad (9)$$

где c_{jr}, $1\leq j\neq r\leq q$, некоторые постоянные, не зависящие от α.

Доказательство леммы 2 приведено далее.

Из (2) и (9) следует, что ЛНМ критерий мы получим, если будем последовательно вплоть до достижения заданного уровня значимости составлять Q из тех векторов s, которые обладают наибольшими значениями

$$\gamma_j^2-2n^{-1/2}\gamma_{2j}.$$

Отметим, что для векторов s и $s'=(s'_1,\ldots,s'_n)$, где

$$s'_k=(-1)^{[(k-1)/j]}s_k,\quad k=1,\ldots,n,$$

величины γ_j^2 и γ_{2j}^2 совпадают, а величины γ_j противоположны. Поэтому, если включать в Q векторы парами s и s' указанного вида, построенный ЛНМ критерий автоматически окажется несмещенным. Таким образом, искомая критическая область

$$Q=\left\{s:\left(\gamma_j^2-2n^{-1/2}\gamma_{2j}\right)>\mathrm{const}\right\}. \quad (10)$$

Резюмируем эти результаты в виде теоремы.

Теорема 1. Если выполнены условия А1, А2 и А4, то ЛНМ знаковый критерий для проверки гипотезы H_0 против альтернативы H_{1j} в модели (1) имеет вид (6); ЛНМ знаковый критерий для проверки гипотезы H_0 против альтернативы H_{2j} имеет вид (7), $j=1,\ldots,q$.

Если выполнены условия А1, А2 и А5, то ЛНМ несмещенный знаковый критерий для проверки гипотезы H_0 против альтернативы H_{3j} имеет вид (10), $j=1,\ldots,q$.

Сделаем несколько важных замечаний.

Замечание 1. Вид построенных знаковых критериев не зависит от вида функции распределения $G(x)$, такой, что $G(0)=0{,}5$.

Замечание 2. При гипотезе H_0 и условии $G(0)=0{,}5$ случайные величины s_ks_{k-j}, $k=2,\ldots,n$, имеют нулевое среднее, единичную дисперсию и независимы между собой [4]. Поэтому γ_j имеют биномиальное распределение, что позволяет строить критерии (6), (7), (10) с фиксированным уровнем значимости для малых выборок.

Замечание 3. Из замечания 2 следует, что в соответствии с центральной предельной теоремой при $n\to\infty$

$$n^{-1/2}\gamma_j\overset{ac}{\sim}N(0,1).$$

Замечание 4. Из замечания 3 следует, что

$$\gamma_j^2-2n^{-1/2}\gamma_{2j}=O_p(\gamma_j^2),\quad n\to\infty,\quad j=1,\ldots,q.$$

Следовательно, построенный ЛНМ несмещенный знаковый критерий Q для проверки гипотезы H_0 против двусторонней альтернативы H_{3j} асимптотически совпадает с объединением двух ЛНМ критериев для проверки H_0 против односторонних альтернатив H_{1j} и H_{2j}, $j = 1, \ldots, q$. Однако для доказательства оптимальности двустороннего критерия требуется более жесткое ограничение А5, которое не является необходимым для построения односторонних критериев.

Построим критерий для проверки гипотезы $H_0 : \alpha = 0$ против альтернативы $H_A : \alpha \neq 0$. Хотелось бы считать, что критерий тем лучше, чем быстрее его функция мощности возрастает при удалении от нуля. Из формулы (9) следует, что частные производные функции мощности $P_n(Q, \alpha)$ пропорциональны γ_j, $j = 1, \ldots, q$. Поскольку функции $\gamma_1, \ldots, \gamma_q$ не равны между собой на всем множестве последовательностей $s_1, \ldots, s_n$ длины n из $+1$ и -1, то критические множества для критериев, максимизирующих $P_n(Q, \alpha)$ в направлении различных координатных осей, не совпадают друг с другом. Отсюда следует, что равномерно наиболее мощного критерия для проверки $H_0 : \alpha = 0$ против альтернативы $H_A : \alpha \neq 0$ не существует даже в локальном смысле (из существования ЛНМ критерия следовало бы, что он является ЛНМ и против частных альтернатив $\alpha_j \neq 0$, что противоречит утверждению теоремы 1). В этом случае наиболее общим подходом к решению рассматриваемой задачи является оптимизация какой-либо рационально выбранной скалярной характеристики критического множества (см., например, [5]). Следуя Ю.Н. Тюрину [1] и М.В. Болдину [2], возьмем в качестве такой характеристики среднюю кривизну функции мощности $P_n(Q, \alpha)$ в точке $\alpha = 0$, которая определяется как среднее значение мощности по сфере бесконечно малого радиуса с центром в нуле:

$$\lim_{\rho \to 0} \rho^{-1-q} \int_{|\alpha| = \rho} (P_n(Q, \alpha) - P_n(Q, 0))\, d\alpha.$$

Эта величина пропорциональна следу матрицы

$$\left\{ \frac{\partial^2 P_n(Q, \alpha)}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right\} \Bigg|_{i,j=1,\ldots,q},$$

т.е. величине

$$\sum_{j=1}^{q} \frac{\partial^2 P_n(Q, \alpha)}{\partial \alpha_j^2}.$$

Следуя Ю.Н. Тюрину [1], назовем критерий для проверки $H_0 : \alpha = 0$ против альтернативы $H_A : \alpha \neq 0$ локально оптимальным знаковым критерием, если среди всех критериев заданного уровня значимости он обладает наибольшей средней кривизной функции мощности $P_n(Q, \alpha)$ в точке $\alpha = 0$.

Из (9) следует, что таким критерием будет критерий, основанный на статистике

$$\sum_{j=1}^{q} \left(\gamma_j^2 - 2n^{-1/2}\gamma_{2j}\right),$$

а асимптотически эквивалентный ему критерий будет иметь вид $\left(s : T_q^2 > C\right)$, где $T_q^2 = \sum_{j=1}^{q} \gamma_j^2$.

Из замечаний 2 и 3 следует, что при $n \to \infty$ асимптотическое распределение статистики T_q^2 будет χ^2-распределением с q степенями свободы.

Доказательство леммы 2. Обозначим

$$I_k = I\left\{(S_1, \ldots, S_k) = (s_1, \ldots, s_k)\right\}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

где I — индикаторная функция множества. Обозначим также Ω_k σ-алгебру, порожденную случайными величинами ε_j, $j \leq k$. Отметим, что

$$I(S_k = s_k) = \frac{1+s_k}{2} I(u_k > 0) + \frac{1-s_k}{2} I(u_k < 0) = \frac{1+s_k}{2} - s_k I(u_k < 0),$$

поэтому

$$I_k = I_{k-1} I(S_k = s_k) = I_{k-1}\left(\frac{1+s_k}{2} - s_k I(u_k < 0)\right), \quad k = 2, \ldots, n. \quad (11)$$

Воспользовавшись этой формулой при $k = n$, измеримостью ε_{n-1} и независимостью ε_{n-2} относительно σ-алгебры Ω_{n-1}, будем иметь

$$P_n(s, \alpha) = \mathsf{E} I_n = \mathsf{E}\left[\mathsf{E} I_{n-1}\left(\frac{1+s_n}{2} - s_n I(u_n < 0) | \Omega_{n-1}\right)\right] =$$

$$= \mathsf{E}\left[I_{n-1} \mathsf{E}\left(\frac{1+s_n}{2} - s_n I(\varepsilon_n < -\sum_{j=1}^{q} \alpha_j \varepsilon_{n-j}) | \Omega_{n-1}\right)\right] =$$

$$= \mathsf{E}\left[I_{n-1}\left(\frac{1+s_n}{2} - s_n G(-\sum_{j=1}^{q} \alpha_j \varepsilon_{n-j})\right)\right]. \quad (12)$$

Разлагая по формуле Тейлора функцию G в нуле до членов второго порядка включительно и учитывая, что $G(0) = 1/2$, получаем

$$G(-\sum_{j=1}^{q} \alpha_j \varepsilon_{n-j}) =$$

$$= G(0) + G'(0)(-\sum_{j=1}^{q} \alpha_j \varepsilon_{n-j}) + G''(-\tau \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \varepsilon_{n-j})(-\sum_{j=1}^{q} \alpha_j \varepsilon_{n-j})^2 =$$

$$= 1/2 + G'(0)(-\sum_{j=1}^{q} \alpha_j \varepsilon_{n-j}) + G''(0)(-\sum_{j=1}^{q} \alpha_j \varepsilon_{n-j})^2 +$$

$$+\left(G''(-\tau\sum_{j=1}^{q}\alpha_j\varepsilon_{n-j})-G''(0)\right)(-\sum_{j=1}^{q}\alpha_j\varepsilon_{n-j})^2,\qquad 0<\tau<1.$$

Так как $\sup\limits_x G''(x)<\infty$ и $G''(x)$ непрерывна в нуле, то по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\left|G''(-\tau\sum_{j=1}^{q}\alpha_j\varepsilon_{n-j})-G''(0)\right| |-\sum_{j=1}^{q}\alpha_j\varepsilon_{n-j}|^2=o(|\alpha|^2),\qquad \alpha\to 0.$$

Следовательно, с учетом $G''(0)=0$

$$P_n(s,\alpha)=\frac{1}{2}\mathsf{E}I_{n-1}+s_nG'(0)\sum_{j=1}^{q}\alpha_j\mathsf{E}(I_{n-1}\varepsilon_{n-j})+o(|\alpha|^2).\tag{13}$$

Таким образом, для вывода рекуррентной формулы необходимо вычислить постоянный член и коэффициент при α_j в разложении функции

$$\mathsf{E}(I_{n-1}\varepsilon_{n-j}),\quad j=1,\dots,q,$$

по формуле Тейлора.

Пусть $j=1$. Воспользовавшись представлением (11) для I_{n-1}, измеримостью $\varepsilon_{n-2},\dots,\varepsilon_{n-q-1}$ относительно σ-алгебры Ω_{n-2} и независимостью ε_{n-1} от Ω_{n-2}, получим, что

$$\mathsf{E}(I_{n-1}\varepsilon_{n-1})=\mathsf{E}\left[I_{n-2}\mathsf{E}\varepsilon_{n-1}\left(\frac{1+s_{n-1}}{2}-s_{n-1}I(u_{n-1}<0)|\Omega_{n-2}\right)\right]=$$
$$=-s_{n-1}\mathsf{E}\left[I_{n-2}\mathsf{E}\left(\varepsilon_{n-1}I(u_{n-1}<0)|\Omega_{n-2}\right)\right].$$

Дифференцируя функцию

$$h(\alpha)=\mathsf{E}(\varepsilon_{n-1}I(u_{n-1}<0)|\Omega_{n-2})=$$
$$=\mathsf{E}(\varepsilon_{n-1}I(\varepsilon_{n-1}<-\sum_{j=1}^{q}\alpha_j\varepsilon_{n-j-1})|\Omega_{n-2})=\int_{-\infty}^{-\sum\limits_{j=1}^{q}\alpha_j\varepsilon_{n-j-1}}xG'(x)\,dx\tag{14}$$

как функцию верхнего предела интегрирования и разлагая ее в точке $\alpha=0$ по формуле Тейлора до членов первого порядка включительно, получаем

$$h(\alpha)=h(0)+\sum_{j=1}^{q}\frac{\partial h(0)}{\partial\alpha_j}\alpha_j+o(|\alpha|)=\mathsf{E}\varepsilon_1^-+o(|\alpha|),$$

так как

$$h(0)=\int_{-\infty}^{0}xG'(x)\,dx=\mathsf{E}\varepsilon_1^-,$$

$$\left.\frac{\partial h(0)}{\partial \alpha_j}\right|_{\alpha=0} = -\varepsilon_{n-j}\Big(-\sum_{j=1}^{q}\alpha_j\varepsilon_{n-j-1}\Big)G'\Big(-\sum_{j=1}^{q}\alpha_j\varepsilon_{n-j-1}\Big)\Big|_{\alpha=0} = 0.$$

Поэтому

$$\mathsf{E}(I_{n-1}\varepsilon_{n-1}) = -s_{n-1}\mathsf{E}\varepsilon_1^-(\mathsf{E}I_{n-2}) + o(|\alpha|).$$

Отметим, что совершенно аналогично

$$\mathsf{E}(I_{k-1}\varepsilon_{k-1}) = -s_{k-1}\mathsf{E}\varepsilon_1^-(\mathsf{E}I_{k-2}) + o(|\alpha|), \quad k = 1,\ldots,n-1. \qquad (15)$$

Пусть теперь $j \geq 2$. Используя представление (11) для I_{n-1}, будем иметь

$$\mathsf{E}(I_{n-1}\varepsilon_{n-j}) = \mathsf{E}\left[I_{n-2}\mathsf{E}\varepsilon_{n-j}\left(\frac{1+s_{n-1}}{2} - s_{n-1}I(u_{n-1}<0)|\Omega_{n-2}\right)\right] =$$
$$= \mathsf{E}\left[I_{n-2}\varepsilon_{n-j}\left(\frac{1+s_{n-1}}{2} - s_{n-1}G\left(-\sum_{i=1}^{q}\alpha_i\varepsilon_{n-1-i}\right)\right)\right].$$

Разлагая $G(x)$ по формуле Тейлора и обозначая через c_k, $k=1,\ldots,q$, $k \neq j$ — некоторые постоянные, получаем

$$\mathsf{E}(I_{n-1}\varepsilon_{n-j}) = \mathsf{E}\left[I_{n-2}\varepsilon_{n-j}\left(\frac{1}{2} + s_{n-1}G'(0)(\sum_{i=1}^{q}\alpha_i\varepsilon_{n-1-i})\right) + o(|\alpha|)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\mathsf{E}(I_{n-2}\varepsilon_{n-j}) + s_{n-1}G'(0)\alpha_j\mathsf{E}(I_{n-2}\varepsilon_{n-j}\varepsilon_{n-1-j}) + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{q} c_k\alpha_k + o(|\alpha|),$$

поскольку из условия $\sup\limits_x G'(x) < \infty$ и теоремы Лебега о мажорируемой сходимости следует, что

$$\mathsf{E}\left|\left[I_{n-2}\varepsilon_{n-j}\left(G'\Big(-\tau\sum_{i=1}^{q}\alpha_i\varepsilon_{n-1-i}\Big) - G'(0)\right)\Big(-\sum_{i=1}^{q}\alpha_i\varepsilon_{n-1-i}\Big)\right]\right| = o(|\alpha|).$$

Используя эту формулу рекуррентным образом $j-2$ раз, получаем

$$\mathsf{E}(I_{n-1}\varepsilon_{n-j}) = 2^{1-j}\mathsf{E}(I_{n-j}\varepsilon_{n-j}) +$$
$$+ G'(0)\alpha_j\left(\sum_{r=1}^{j-1}2^{1-r}s_{n-r}\mathsf{E}(I_{n-1-r}\varepsilon_{n-j}\varepsilon_{n-r-j})\right) + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{q}c_k\alpha_k + o(|\alpha|), \qquad (16)$$

где c_k, $k=1,\ldots,q$, $k\neq j$ — некоторые постоянные.

Теперь для окончательного вывода рекуррентной формулы для $P_n(s,\alpha)$ необходимо вычислить

$$\mathsf{E}(I_{n-1-r}\varepsilon_{n-j}\varepsilon_{n-r-j}), \quad 2 < j \leq q, \quad 1 \leq r \leq j-1,$$

с точностью до $o(1)$.

Если $r < j-1$, то воспользовавшись измеримостью ε_{n-j} относительно σ-алгебры Ω_{n-2-r}, получим

$$\mathsf{E}(I_{n-1-r}\varepsilon_{n-j}\varepsilon_{n-r-j}) =$$
$$= \mathsf{E}\Bigg[I_{n-2-r}\mathsf{E}\varepsilon_{n-j}\varepsilon_{n-r-j}\mathsf{E}\Bigg\{\Bigg(\frac{1+s_{n-1-r}}{2} -$$
$$- s_{n-1-r}I(u_{n-1-r} < 0)\Bigg)|\Omega_{n-2-r}\Bigg\}\Bigg] =$$
$$= \mathsf{E}\left[I_{n-2-r}\varepsilon_{n-j}\varepsilon_{n-r-j}\left\{\frac{1+s_{n-1-r}}{2} - s_{n-1-r}G\left(-\sum_{k=1}^{q}\alpha_k\varepsilon_{n-1-r-k}\right)\right\}\right] =$$
$$= \mathsf{E}\Bigg[I_{n-2-r}\varepsilon_{n-j}\varepsilon_{n-r-j}\Bigg\{\frac{1+s_{n-1-r}}{2} - s_{n-1-r}\Bigg(G(0) -$$
$$- G'(-\tau\sum_{k=1}^{q}\alpha_k\varepsilon_{n-1-r-k})\sum_{k=1}^{q}\alpha_k\varepsilon_{n-1-r-k}\Bigg)\Bigg\}\Bigg] =$$
$$= \frac{1}{2}\mathsf{E}(I_{n-2-r}\varepsilon_{n-j}\varepsilon_{n-r-j}) + o(1), \qquad 0 < \tau < 1.$$

Используя эту формулу рекуррентным образом $j-r-1$ раз, получаем

$$\mathsf{E}(I_{n-1-r}\varepsilon_{n-j}\varepsilon_{n-r-j}) = 2^{r-j+1}\mathsf{E}(I_{n-j}\varepsilon_{n-j}\varepsilon_{n-r-j}) + o(1). \qquad (17)$$

Из представления (11), измеримости $\varepsilon_{n-j-1}, \ldots, \varepsilon_{n-j-q}$ относительно Ω_{n-j-1} и независимости ε_{n-j} от Ω_{n-j-1}, будем иметь для всех $r = 1, \ldots, j-1$

$$\mathsf{E}(I_{n-j}\varepsilon_{n-j}\varepsilon_{n-r-j}) =$$
$$= \mathsf{E}\left[I_{n-j-1}\varepsilon_{n-r-j}\mathsf{E}\left\{\varepsilon_{n-j}\left(\frac{1+s_{n-j}}{2} - s_{n-j}I(u_{n-j} < 0)\right)|\Omega_{n-j-1}\right\}\right] =$$
$$= -s_{n-j}\mathsf{E}\left[I_{n-j-1}\varepsilon_{n-r-j}\mathsf{E}\left(\varepsilon_{n-j}I(u_{n-j} < 0)|\Omega_{n-j-1}\right)\right].$$

Так же, как и для $h(\alpha)$ в (14), разлагая функцию

$$h_1(\alpha) = \mathsf{E}\left\{\varepsilon_{n-j}I(u_{n-j} < 0)|\Omega_{n-j-1}\right\},$$

по формуле Тейлора в точке $\alpha = 0$, получаем

$$h_1(\alpha) = \mathsf{E}\varepsilon_1^- + o(\alpha).$$

Поэтому для всех $r = 1, \ldots, j-1$

$$\mathsf{E}(I_{n-j}\varepsilon_{n-j}\varepsilon_{n-r-j}) = -s_{n-j}(\mathsf{E}(\varepsilon_1^-)\mathsf{E}(I_{n-1-j}\varepsilon_{n-r-j}) + o(1),$$

где, принимая во внимание (16), найдем, что для всех $r = 1, \ldots, j-1$

$$\mathsf{E}(I_{n-j}\varepsilon_{n-j}\varepsilon_{n-r-j}) = -s_{n-j}(\mathsf{E}\varepsilon_1^-)2^{1-r}\mathsf{E}(I_{n-r-j}\varepsilon_{n-r-j}) + o(1),$$

а с учетом (15) будем иметь

$$\mathsf{E}(I_{n-j}\varepsilon_{n-j}\varepsilon_{n-r-j}) = s_{n-j}s_{n-r-j}(\mathsf{E}\varepsilon_1^-)^2 2^{1-r}\mathsf{E}(I_{n-r-j-1}) + o(1).$$

Подставляя это равенство в (17) и учитывая (см. (13)), что $\mathsf{E}I_n = 2^{-n} + o(1)$, получаем, что для $j > 2$

$$\mathsf{E}(I_{n-1-r}\varepsilon_{n-j}\varepsilon_{n-r-j}) = s_{n-j}s_{n-r-j}(\mathsf{E}\varepsilon_1^-)^2 2^{3-n+r} + o(1).$$

Подставив это выражение и (15) в формулу (16), получим, что для $j > 2$

$$\mathsf{E}(I_{n-1}\varepsilon_{n-j}) = -2^{1-j}(\mathsf{E}\varepsilon_1^-)\mathsf{E}(I_{n-j-1})s_{n-j} + \\ + s_{n-j}G'(0)(\mathsf{E}\varepsilon_1^-)^2 2^{4-n}\alpha_j \sum_{r=1}^{j-1} s_{n-r}s_{n-j-r} + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{q} c_k\alpha_k + o\left(|\alpha|\right),$$

где c_k, $k = 1, \ldots, q$, $k \neq j$ — некоторые постоянные.

Таким образом, отсюда и из (15) найдем, что при $n > 2q$

$$P_n(s,\alpha) = 2^{-1}P_{n-1}(s,\alpha) + A\sum_{j=1}^{q}\alpha_j s_n s_{n-j} 2^{-j-1}P_{n-j-1}(s,\alpha) + \\ + \frac{A^2}{2^n}\sum_{j=2}^{q}\alpha_j^2 \sum_{r=1}^{j-1} s_n s_{n-j} s_{n-r} s_{n-j-r} + \sum_{\substack{k,j=1\\k\neq j}}^{q} c_{kj}\alpha_k\alpha_j + o\left(|\alpha|^2\right), \quad (18)$$

где $A = -4G'(0)\mathsf{E}\varepsilon_1^-$.

Легко видеть, что эта формула остается справедливой и для $n \leq 2q$, если положить по определению $P_0(s,\alpha) = 1$ и $P_k(s,\alpha) = 0$ для всех $k < 0$. Применяя эту формулу рекуррентным образом $n-1$ раз, будем иметь

$$P_n(s,\alpha) = 2^{-n}\left\{1 + A\sum_{j=1}^{q}\alpha_j \sum_{k=j+1}^{n} s_k s_{k-j} + \right. \\ + \frac{A^2}{2}\sum_{j=1}^{q}\alpha_j^2\left[\left(\sum_{k=j+1}^{n} s_k s_{k-j}\right)^2 - (n-j) - 2\sum_{k=2j+1}^{n} s_k s_{k-2j}\right] + \\ \left. + \sum_{\substack{j,r=1\\r\neq j}}^{q} c_{rj}\alpha_r\alpha_j + o\left(|\alpha|^2\right)\right\},$$

откуда с учетом (4) получим (9). Лемма доказана.

Доказательство леммы 1. Как видно из вывода (18), при доказательстве этого соотношения с точностью до $o(|\alpha|)$ функцию $G(x)$

достаточно разлагать по формуле Тейлора только до членов 1-го порядка. Это позволяет заменить условие A5 более слабыми условиями A3 и A4. Они, в свою очередь, необходимы только при выводе (13) из (12), который основан на следующей оценке:

$$\left|\mathsf{E}I_{n-1}G\left(-\sum_{j=1}^{q}\alpha_j\varepsilon_{n-j}\right)-\mathsf{E}I_{n-1}\left(G(0)-G'(0)\sum_{j=1}^{q}\alpha_j\varepsilon_{n-j}\right)\right|\leq$$
$$\leq\left|\mathsf{E}I_{n-1}\left\{G'\left(-\tau\sum_{j=1}^{q}\alpha_j\varepsilon_{n-j}\right)-G'(0)\right\}\left(\sum_{j=1}^{q}\alpha_j\varepsilon_{n-j}\right)\right|\leq$$
$$\leq\left|\sum_{j=1}^{q}\alpha_j\varepsilon_{n-j}\right|^{1+r}=o(|\alpha|),\quad 0<\tau<1.$$

Используя рекуррентную формулу (18) $n-1$ раз, получаем (5). Лемма доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Т ю р и н Ю. Н. Знаковый статистический линейный анализ. – В кн.: Методы анализа данных, оценивания и выбора. – М.: ВНИИСИ, 1986. – Вып. 12. – С. 4–16.
2. Б о л д и н М. В. О локально оптимальных знаковых критериях в схеме авторегрессии // Системные исследования в области компьютеризации и статистики: Сб. трудов. – М.: ИСА РАН, 1993. – Вып. 1. – С. 46–54.
3. Л е м а н Э. Проверка статистических гипотез. – М.: Наука, 1964. – 498 с.
4. D u f o u r J. -M. Rank tests for serial dependence // J. Time Ser. Anal., 1982. – V. 2. – P. 117–128.
5. К о к с Д., Х и н к л и Д. Теоретическая статистика. – М.: Мир, 1978.

Статья поступила в редакцию 24.04.2007

Елена Рудольфовна Горяинова родилась в 1960 г., окончила в 1983 г. МГУ им. М.В. Ломоносова. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Теория вероятностей” Московского авиационного института (технического университета). Автор 17 научных работ в области непараметрической статистики и анализа временных рядов.

Ye.R. Goryainova (b. 1960) graduated from the Lomonosov Moscow State University in 1983. Ph. D. (Phys.-Math.), assoc. professor of "Theory of Probabilities" department of the Moscow Aviation Institute (Technical University). Author of 17 publications in the field of non-parametric statistics and analysis of time series.

Владимир Борисович Горяинов родился в 1961 г., окончил в 1983 г. МГУ им. М.В. Ломоносова. Канд. техн. наук, доцент кафедры “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 23 научных работ в области стохастических дифференциальных уравнений, статистических методов в биологии и медицине.

V.B. Goryainov (b. 1961) graduated from the Lomonosov Moscow State University in 1983. Ph. D. (Eng.), assoc. professor of “Mathematical Simulation” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 23 publications in the field of stochastic differential equations, stochastic methods in biology and medicine.