

В. В. Лапшин, Г. П. Колесникова

**ОПТИМАЛЬНОЕ ПО ВРЕМЕНИ УПРАВЛЕНИЕ
ДВИЖЕНИЕМ СВЯЗКИ ДВУХ ТЕЛ ВОКРУГ
ЦЕНТРА МАСС**

Решены задачи о минимизации и максимизации времени разворота двух тел, соединенных линейным приводом, в фазе полета (невесомости) в предположении, что кинетический момент системы относительно центра масс отличен от нуля. Рассмотренная задача является простейшей моделью управления ориентацией прыгающего аппарата в безопорной фазе прыжка.

При увеличении скорости движения машин, передвигающихся с помощью ног, энергетически выгодно переходить от статически устойчивых режимов ходьбы к динамическим, а затем к бегу и прыжкам аналогично тому, как это имеет место у животных [1]. Этим объясняется интерес к исследованию динамики и управления движением прыгающих и бегающих аппаратов, движение которых состоит в чередовании опорных и безопорных фаз движения [1–7]. В безопорной фазе движения центр масс аппарата перемещается по баллистической траектории и его движение не управляемо. Движением же аппарата вокруг центра масс можно управлять. В фазе полета имеет место закон сохранения кинетического момента аппарата относительно центра масс. Известно, что животные и люди могут управлять своим движением вокруг центра масс в фазе полета или в невесомости за счет изменения движения конечностей или движения одной части корпуса относительно другой [1–13]. Проблема управления движением в безопорном положении возникает при изучении биомеханики движений спортсменов, космонавтов и животных, а также при исследовании динамики и управления движением прыгающих и бегающих аппаратов (роботов). Как для прыгающих аппаратов, так и для животных и человека цель управления — обеспечить требуемое (программное) положение в момент приземления.

Задача управления движением в фазе полета разбивается на две подзадачи. Алгоритм построения программного движения определяет скорости всех звеньев аппарата в момент отрыва от опорной поверхности, обеспечивающие переход из заданного начального в заданное конечное положение. Алгоритм стабилизации движения обеспечивает реализацию требуемого положения в момент приземления при наличии возмущений и ошибок отработки программных

значений координат и скоростей в момент отрыва от опорной поверхности за счет изменения движения ног относительно корпуса [2–3, 7].

Для исследования вопроса о допустимых значениях ошибок, которые способен обработать алгоритм стабилизации, представляет интерес задача об определении минимального и максимального времени разворота аппарата в фазе полета из заданного начального в заданное конечное положение при известном (ненулевом) значении кинетического момента аппарата относительно центра масс.

В настоящей работе эта задача решена для простейшей модели аппарата — связки двух тел.

Постановка задачи. Предполагается, что аппарат состоит из двух твердых тел массами m_1 и m_2 , соединенных линейным сервоприводом (рис. 1). Момент инерции i -го ($i = 1, 2$) тела относительно центра масс C_i равен J_i . Расстояние между центрами масс $C_1C_2 = l$ изменяется с помощью линейного сервопривода; точка C — центр масс связки тел. Положение системы относительно абсолютной неподвижной системы координат Oxy (ось Oy направлена вертикально вверх) определяется координатами центра масс x_C, y_C , углом тангажа θ и расстоянием l . Обозначим l_i расстояние от центра масс системы до центра масс i -го тела.

В безпорной фазе движения имеет место закон сохранения кинетического момента относительно центра масс:

$$K_C = (I + \mu l^2)\dot{\theta} = \text{const}, \quad (1)$$

где $I = J_1 + J_2$; $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

Обозначим l^D, θ^D требуемое конечное положение связки относительно центра масс в конечный момент времени.

Для определенности положим

$$K_C > 0. \quad (2)$$

За параметр управления примем скорость изменения расстояния между телами $u = \frac{dl}{dt}$ и положим, что ее значение ограничено максимальной скоростью сервопривода $|u| \leq u_m$. Введем обозначения: $x_1 = l, x_2 = \theta - \theta^D$.

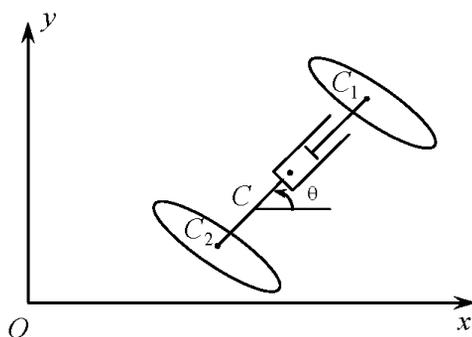


Рис. 1. Конструктивная схема связки двух тел

Задача о минимизации времени разворота в безопорной фазе движения связки двух тел имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u, & \dot{x}_2 &= k(x_1); \\ \begin{cases} x_1(0) = x_1^0; \\ x_2(0) = x_2^0; \end{cases} & \begin{cases} x_1(T) = x_1^D = l^D; \\ x_2(T) = 0; \end{cases} & |u| \leq u_m; & T \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (3)$$

где $k(x_1) = \frac{K_C}{I + \mu x_1^2}$.

Отметим, что в силу (1)–(2)

$$k(x_1) > 0 \quad (4)$$

при любом значении x_1 . Следовательно, при $t > T$ система не останется в программном положении, а продолжит свое вращение относительно центра масс в положительном направлении отсчета угла θ .

Задача о минимизации времени разворота. Для решения задачи быстродействия (3) воспользуемся принципом максимума Понтрягина [15–16]. Гамильтониан имеет вид

$$H = -1 + \psi_1 u + \psi_2 k(x_1). \quad (5)$$

Сопряженные переменные являются решениями уравнений

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\psi_2 \frac{dk}{dx_1}; \quad \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 0. \quad (6)$$

Тогда

$$\psi_2 = \text{const}. \quad (7)$$

В соответствии с принципом максимума на оптимальной траектории достигается максимум гамильтониана по u . Оптимальное управление

$$u^* = \begin{cases} u_m & \text{при } \psi_1 > 0; \\ \text{не определено} & \text{при } \psi_1 = 0; \\ -u_m & \text{при } \psi_1 < 0, \end{cases} \quad (8)$$

и на оптимальной траектории справедливо условие трансверсальности

$$H = -1 + \psi_1 u + \psi_2 k(x_1) \equiv 0. \quad (9)$$

Если $u = u_m$ ($\psi_1 > 0$), то

$$x_1 = x_1^0 + u_m(t - t_0); \quad \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{k(x_1)}{u_m}; \quad x_2 = \frac{\varphi(x_1)}{u_m} + c_1, \quad (10)$$

где

$$\varphi(x_1) = \int k(x_1) dx_1 = K_C \int \frac{dx_1}{I + \mu x_1^2} = \frac{K_C}{\sqrt{I\mu}} \arctg\left(\sqrt{\frac{\mu}{I}} \cdot x_1\right); \quad (11)$$

c_1 — постоянная интегрирования.

Если $u = -u_m$ ($\psi_1 < 0$), то

$$x_1 = x_1^0 - u_m(t - t_0); \quad x_2 = -\frac{\varphi(x_1)}{u_m} + c_2, \quad (12)$$

где c_2 — постоянная интегрирования.

В вырожденном случае [16] $\psi_1 \equiv 0$ в течение некоторого интервала времени $\dot{\psi}_1 \equiv 0$. Из уравнений (6) следует

$$\frac{dk}{dx_1} = \frac{2\mu x_1}{(I + \mu x_1^2)^2} \equiv 0, \quad (13)$$

а тогда $x_1 \equiv 0$ и в силу соотношений (3) единственная вырожденная фазовая траектория имеет вид

$$x_1 \equiv 0, \quad u \equiv 0, \quad \dot{x}_2 = \frac{K_C}{I} = \text{const} > 0, \quad (14)$$

Через программное конечное положение $(x_1^D, 0)$ проходят две фазовые траектории. Одна из них соответствует управлению $u = u_m$:

$$\Gamma_+ = \left\{ (x_1, x_2) : x_2 = \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_1^D)}{u_m}, \quad x_1 < x_1^D \right\},$$

а вторая — управлению $u = -u_m$:

$$\Gamma_- = \left\{ (x_1, x_2) : x_2 = \frac{\varphi(x_1^D) - \varphi(x_1)}{u_m}, \quad x_1 > x_1^D \right\}. \quad (15)$$

Эти кривые вместе с Γ_0 , соответствующей вырожденному случаю $u \equiv 0$ и имеющей вид

$$\Gamma_0 = \left\{ (x_1, x_2) : x_1 = 0, \quad x_2 < -\frac{\varphi(x_1^D)}{u_m} \right\},$$

и кривой

$$\tilde{\Gamma}_- = \left\{ (x_1, x_2) : x_2 = \frac{-\varphi(x_1^D) - \varphi(x_1)}{u_m}, \quad x_1 > 0 \right\}$$

делят фазовую плоскость на четыре области: R_0, R_1, R_2, R_3 (рис. 2).

Утверждение 1. Если система находится в области R_0 , то ее невозможно перевести в требуемое конечное положение.

При заданном положительном значении кинетического момента системы $K_C > 0$ невозможно перевести систему из произвольного начального в заданное конечное положение, т.е. система неуправляема.

Доказательство этого утверждения очевидно. Ни одна из фазовых траекторий (10), (12), (14), начинающаяся в области R_0 , не проходит через программное конечное положение и не покидает эту область.

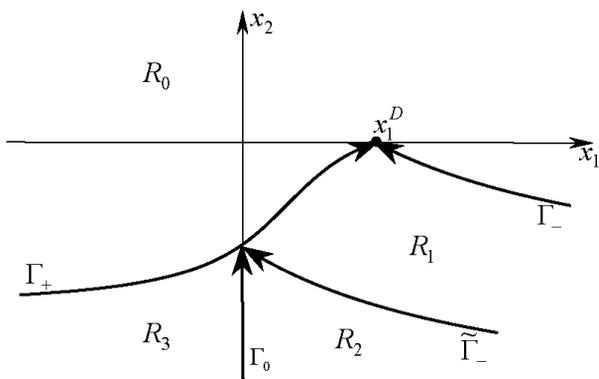


Рис. 2. Области на фазовой плоскости в задаче быстрогодействия

Не нарушая общности, можно положить, что в конечный момент времени расстояние между телами положительно, т.е.

$$x_1^D = l^D > 0.$$

Утверждение 2. Если $x_1^D > 0$ и в начальный момент времени система не лежит в области R_0 , то оптимальный закон управления имеет вид

$$u^* = \begin{cases} -u_m & \text{при } (x_1, x_2) \in R_1 \cup R_2 \cup \Gamma_- \cup \tilde{\Gamma}_-, \\ +u_m & \text{при } (x_1, x_2) \in R_3 \cup \Gamma_+, \\ 0 & \text{при } (x_1, x_2) \in \Gamma_0. \end{cases} \quad (16)$$

Если система находится в области R_1 , то оптимальная управляющая последовательность имеет вид $\{-u_m, u_m\}$. Если система находится в области R_2 , то оптимальной управляющей последовательностью является $\{-u_m, 0, u_m\}$. Если система находится в области R_3 , то оптимальная управляющая последовательность $u = \{u_m, 0, u_m\}$.

Доказательство утверждения 2 приведено в работе [17].

Соответствующие оптимальные фазовые траектории при различных начальных условиях показаны на рис. 3.

Механический смысл оптимального решения очевиден. При уменьшении момента инерции связки двух тел относительно их общего центра масс увеличивается угловая скорость вращения в силу закона сохранения кинетического момента. На оптимальной траектории необходимо с максимально возможной скоростью сближать тела и тем самым уменьшать момент инерции связки тел относительно общего центра масс, а затем удалять тела одно от другого на требуемое конечное расстояние между ними тоже с максимально возможной скоростью. Если при этом удастся достичь положения с минимальным моментом инерции (когда совпадают центры масс этих тел), то следует оставаться в этом положении как можно дольше.

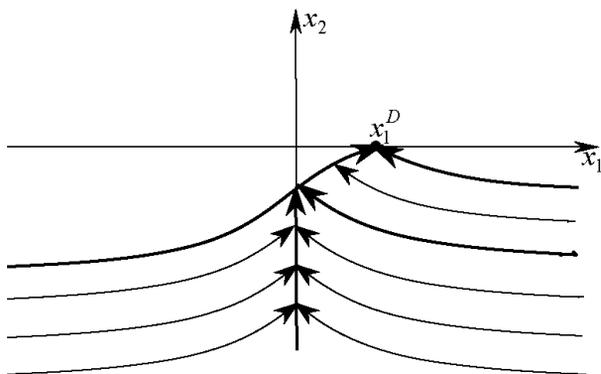


Рис. 3. Оптимальные фазовые траектории в задаче быстрого разворота

Задача о максимизации времени разворота. Решение задачи о максимальном времени разворота, т.е. с критерием

$$T \rightarrow \max,$$

осуществляется аналогично тому, как описано в предыдущем разделе. Гамильтониан имеет вид

$$H = 1 + \psi_1 u + \psi_2 k(x_1).$$

Оптимальное управление

$$u = \begin{cases} u_m & \text{при } \psi_1 > 0; \\ \text{не определено} & \text{при } \psi_1 = 0; \\ -u_m & \text{при } \psi_1 < 0. \end{cases}$$

Условие трансверсальности

$$H = 1 + \psi_1 u + \psi_2 k(x_1) \equiv 0.$$

Если $u = u_m$ ($\psi_1 > 0$), то x_1, x_2 определяются формулами (10) и

$$\psi_1 = -\frac{1}{u_m} [1 + \psi_2 k(x_1)].$$

Если $u = -u_m$ ($\psi_1 < 0$), то x_1, x_2 определяются формулами (12) и

$$\psi_1 = \frac{1}{u_m} [1 + \psi_2 k(x_1)].$$

Вырожденный участок $x_1 \equiv 0, u \equiv 0$ на оптимальной траектории не возможен, так как ему соответствует максимальная скорость вращения связки тел (минимальное время разворота).

Начальному положению системы на фазовой плоскости — точке (x_1, x_2) , расположенной ниже линий переключения Γ_+, Γ_- , соответствует два типа решений, удовлетворяющих необходимым условиям экстремума (рис. 4). Решение типа А — траектория OAD , управляю-

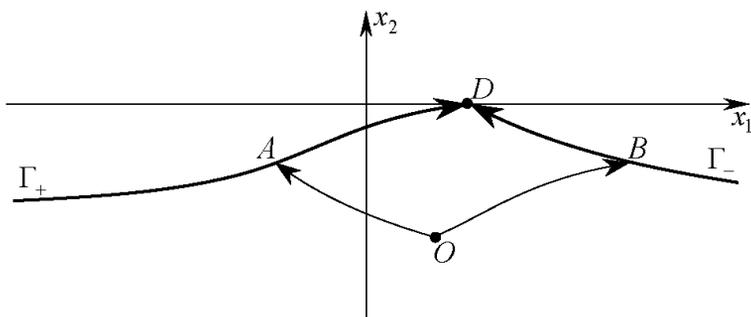


Рис. 4. Два типа экстремальных фазовых траекторий

шая последовательность $\{-u_m, u_m\}$; решения типа B — траектория OBD , управляющая последовательность $\{u_m, -u_m\}$.

Рассмотрим две фазовые траектории: $\hat{\Gamma}_+$, соответствующую управлению $u = u_m$, и $\hat{\Gamma}_-$, соответствующую управлению $u = -u_m$, причем $\hat{\Gamma}_+$ и $\hat{\Gamma}_-$ имеют одинаковые горизонтальные асимптоты соответственно с Γ_- и Γ_+ .

Если начальное положение системы (x_1, x_2) находится на $\hat{\Gamma}_+$ или ниже нее, то точка B — бесконечно удаленная и время движения по траектории типа B бесконечно большое. Аналогично, если начальное положение системы (x_1, x_2) находится на $\hat{\Gamma}_-$ или ниже нее, то время движения по траектории типа A бесконечно большое.

Линии Γ_+ , Γ_- , $\hat{\Gamma}_+$, $\hat{\Gamma}_-$ и прямая $x_1 = -x_1^D$ делят фазовую плоскость на четыре области: $R_0, \tilde{R}_1, \tilde{R}_2, R_3$ (рис. 5).

Если в начальный момент времени система находится в области R_0 , ее невозможно перевести в требуемое конечное положение (утверждение 1). Если в начальный момент времени система находится в области R_3 (включая границу), то ее можно перевести в требуемое конечное положение за сколь угодно большое время.

Утверждение 3. Если $x_1^D > 0$ и в начальный момент времени система не лежит в области $R_0 \cup R_3$, то оптимальный закон управления

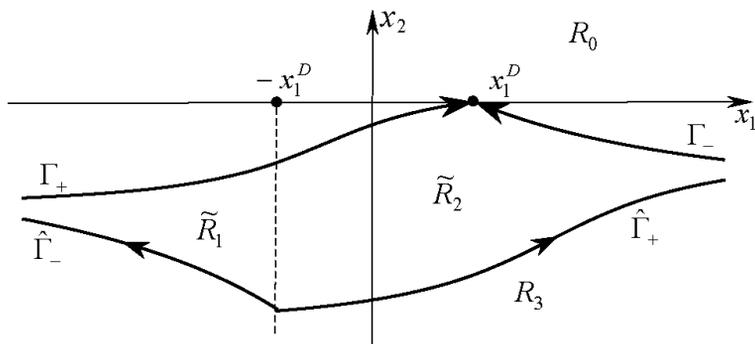


Рис. 5. Области на фазовой плоскости в задаче максимизации времени разворота

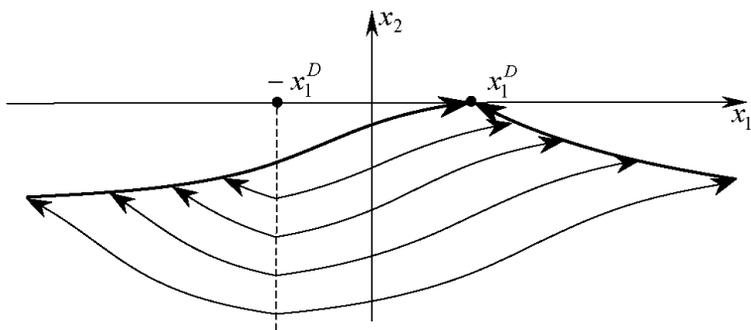


Рис. 6. Оптимальные фазовые траектории в задаче максимизации времени разворота

имеет вид

$$u^* = \begin{cases} -u_m & \text{при } (x_1, x_2) \in \tilde{R}_1 \cup \Gamma_-, \\ +u_m & \text{при } (x_1, x_2) \in \tilde{R}_2 \cup \Gamma_+. \end{cases} \quad (17)$$

Если система находится в области \tilde{R}_1 , то оптимальная управляющая последовательность $\{-u_m, u_m\}$, а если система находится в области \tilde{R}_2 , то оптимальная управляющая последовательность $\{u_m, -u_m\}$.

Другими словами, если на фазовой плоскости система находится справа от линии $x_1 = -x_1^D$, то оптимальной является траектория типа В. Если же на фазовой плоскости система находится слева от линии $x_1 = -x_1^D$, то оптимальной является траектория типа А.

Доказательство утверждения 3 приведено в работе [17].

Оптимальные фазовые траектории при различных начальных условиях показаны на рис. 6.

В заключение отметим, что если при движении аппарата реальное время полета T (определяемое из уравнений движения центра масс) удовлетворяет условию $T_{\min} < T < T_{\max}$, то аппарат в движении вокруг центра масс можно перевести из заданного начального в заданное конечное положение за время T . Решение можно искать в виде кусочно-постоянных управляющих последовательностей $\{\pm u_m, 0, \pm u_m\}$. При этом возможно любое сочетание знаков управления на первом и третьем этапе и возможна нулевая продолжительность любого этапа с постоянным значением управления.

Работа выполнена по гранту НШ 6108.2006.8 по поддержке ведущих научных школ РФ и гранту РФФИ № 07-01-00286.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Okhotsimsky D. E., et al. Walking machines // Advances in mechanics. – 1992. – № 1–2.

2. Лапшин В. В. Динамика и управление движением прыгающего аппарата // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1983. – № 5.
3. Лапшин В. В. Управление движением прыгающего аппарата в фазе полета // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1984. – № 1.
4. H e m a m i J., Z h e n g Y. Dynamics and control of motion on the ground and in the air with application to biped robot // Journal of robotics systems. – 1984. – № 1.
5. H o d g i n s J., R a i b e r t M. H. Biped gymnastics / Robotics research: The fourth international symposium. – Cambridge, Massachusetts: MIT press, 1987.
6. R a i b e r t M. H. Legged robots that balancemnastics / Robotics research: The fourth international symposium. – Cambridge, Massachusetts: MIT press, 1986.
7. Л а п ш и н В. В. Motion control of a legged machine in the supportless phase of hopping // The international journal of robotics research. – 1991. – № 4.
8. К и р п и ч е в В. Л. Беседы о механике. – СПб., 1907.
9. S m i t h P. G., K a n e T. R. On the dynamics of human body in free fall // Journal of applied mechanics. – 1968. – № 1.
10. К а н е Т. R., S c h e r M. P. A dynamical explanation of the falling cat phenomenon // International journal of solids and structuresapplied mechanics. – 1969. – № 7.
11. С т е п а н ц о в В. О., Е р е м и н А. В. О биомеханике человека в безопорном положении (невесомости) // Космические исследования. – 1969. – № 6.
12. F r o h l i c h C. Do springboard divers violate angular momentum conservation? // American journal of physics. – 1979. – № 47.
13. F r o h l i c h C. The physics of somersaulting and twisting // Scientific American. – 1980. – № 242.
14. А п п е л ь П. Теоретическая механика. – М.: Физматгиз, 1960. Т. 1, 2.
15. М а т е м а т и ч е с к а я теория оптимальных процессов / Понтрягин Л.С. и др. – М.: Физматгиз, 1961.
16. А т а н с М., Ф а л б П. Оптимальное управление. – М.: Машиностроение, 1968.
17. Л а п ш и н В. В., К о л е с н и к о в а Г. П. Оптимальное управление движением прыгающего аппарата вокруг центра масс // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2006. – № 42.

Статья поступила в редакцию 13.04.2007

Владимир Владимирович Лапшин родился в 1954 г., окончил МГУ в 1975 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры “Теоретическая механика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специализируется в области механики и управления движением, робототехники и шагающих аппаратов.

V.V. Lapshin (b. 1954) graduated from the Lomonosov Moscow State University in 1975. D. Sc. (Phys.-Math.), professor of “Theoretical Mechanics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Specializes in the field of mechanics and motion control, robotics and walking vehicles.

Галина Петровна Колесникова родилась в 1974 г., окончила МГУ в 1997 г. Старший преподаватель кафедры “Теоретическая механика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специализируется в области механики и управления движением, робототехники и шагающих аппаратов.

G.P. Kolesnikova (b. 1974) graduated from the Lomonosov Moscow State University in 1997. Senior teacher of “Theoretical Mechanics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Specializes in the field of mechanics and motion control, robotics and walking vehicles.