

В. А. Русанов, В. А. Козырев,  
Д. Е. Урбанович, Г. М. Шишкин

## **ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ГАЛЬВАНОСТЕГИИ НА БАЗЕ АПОСТЕРИОРНОЙ МОДЕЛИ ЕЕ ДИНАМИКИ**

*Предложен новый технологический подход к построению ресурсосберегающего режима гальванообработки механических деталей машин на основе структурно-параметрической идентификации уравнений динамики нестационарного цинк-железного электролиза. Разработан численный метод решения поставленной задачи.*

Из множества способов электролитического осаждения гальванических покрытий наиболее приемлемым для восстановления деталей машин является электроосаждение цинк-железного сплава в условиях вращения анода и обновления химической концентрации электролита, а также скорости его потока, поскольку эти способы оказывают наибольшее влияние на качество покрытий [1]. В связи с совмещением нескольких физико-химических процессов в гальванизации с нестационарным электролитом и динамичным анодом возникают задачи экспериментального исследования и математического обоснования структуры модели динамики электролитического процесса (МДЭП), разработки методов идентификации параметров МДЭП по данным гальванометрии и в конечном итоге построения на базе уравнений МДЭП оптимального [2] режима гальванообработки.

**Постановка задачи апостериорного построения МДЭП.** Структурно-параметрическое описание МДЭП концептуально обуславливается [3] сложной взаимосвязью кинетики химических реакций, гидродинамики и массопередачи в потоке электролита, кинематики пластин электродов, а также влиянием на все эти процессы электрического поля пары анод–катод. В связи с многообразием математических способов, которыми при апостериорном моделировании можно определить структуру уравнений МДЭП, возникает задача выбора из них тех, которые оптимальны с точки зрения некоторого формального критерия, характеризующего определенное структурное качество исследуемой модели. Трудность состоит в том, что на этот вопрос нет однозначного ответа, поскольку выбор той или иной методологической точки зрения зависит не только от физической природы уравнений МДЭП, но и от того, каким образом заданы ограничения, являются данные полными или нет, а также от других факторов, в частности связанных с целями (контекстом) моделирования. Поэтому задача структурно-параметрической идентификации уравнений МДЭП

исследуется в рамках подходов теории реализации [4–6] в классе дифференциальных систем с программным управлением.

Для математической формализации структуры уравнений МДЭП рассмотрим вектор состояния  $x(t) \in R^n$ ,  $t \in T = [0, \tau] \subset R$ , электролитического процесса, составляющие которого являются физико-химическими характеристиками процесса, доступными наблюдению (вычислению по экспериментальным данным гальванометрии):

$$\begin{aligned}x_1(t) & \text{ — текущее значение толщины покрытия;} \\x_2(t) & \text{ — текущее значение микротвердости покрытия;} \\x_n(t) & \text{ — } \dots\end{aligned} \quad (1)$$

То, что за переменные фазового вектора состояния гальванического процесса приняты параметры его физико-химических свойств и не рассматриваются их производные, обусловлено общей диффузионной [3] концепцией МДЭП.

В качестве переменных вектора входных (управляющих) воздействий  $u(t) \in R^m$ ,  $t \in T$ , динамики электролиза рассмотрим внешние факторы гальванизации:

$$\begin{aligned}u_1(t) & \text{ — текущее значение катодной плотности электротока;} \\u_2(t) & \text{ — текущее значение скорости протока электролита;} \\u_m(t) & \text{ — } \dots\end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим класс линейных стационарных непрерывных управляемых систем, описываемых векторным дифференциальным уравнением вида

$$dx(t)/dt = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in T, \quad (3)$$

где  $x(t) \in R^n$ ;  $A$  — матрица размера  $n \times n$ ;  $B$  — матрица размера  $n \times m$ ; переменные вектора управления  $u(t) \in R^m$  принадлежат классу кусочно-непрерывных функций на  $T$ .

Задача реализации дифференциальной МДЭП формулируется следующим образом: для апостериорного электролитического процесса

$$(x(t), u(t)) \in R^{n+m}, \quad t \in T, \quad (4)$$

определить необходимые и достаточные условия существования дифференциальной модели (3), для которой динамический процесс (4) является ее решением. Данная постановка служит обоснованием выбора структуры МДЭП в виде линеаризированной (относительно стационарного состояния  $x = 0$ ,  $u = 0$ ) дифференциальной модели динамики вектора состояния  $x(t)$  процесса гальванизации с вектором входных воздействий  $u(t)$  на интервале времени  $T$ .

**Структурно-параметрическая идентификация МДЭП.** Прежде чем создавать алгоритмы получения “субоптимальных” приближенных апостериорных моделей динамики, построим реализацию точных моделей, поскольку для решения задачи приближенного моделирования необходимо знать строение уравнений динамики, опирающееся на качественные факты, которые касаются алгебраических и топологических свойств траекторий подобных систем [6]. В отличие от [6], где дан геометрический анализ задачи реализации в классе динамических систем (3), в основу конструктивного решения поставленной задачи положено утверждение: существует и притом единственная система вида (3), являющаяся дифференциальной реализацией апостериорно заданного электролитического процесса  $(x(\cdot), u(\cdot))$  (4), в том и только в том случае, если имеют место оба условия:

$$\Delta_i(x(\cdot), u(\cdot)) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n; \quad (5)$$

$$\Delta(x(\cdot), u(\cdot)) \neq 0. \quad (6)$$

При этом матрицы  $A$  и  $B$  данной системы удовлетворяют следующему матричному соотношению (алгоритм параметрической идентификации объекта (3)):

$$[A, B] = \int_T \omega_d(t)[\omega(t)]^* dt \times \left[ \int_T \omega(t)[\omega(t)]^* dt \right]^{-1}. \quad (7)$$

Здесь  $\omega(t) := \text{col}(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) \in R^{n+m}$ ;  $\omega_d(t) := \text{col}(dx_1(t)/dt, \dots, dx_n(t)/dt) \in R^n$ ,  $\Delta_i(x, u) := \det \left[ \int_T \text{col}(dx_i(t)/dt, \omega(t))[\text{col}(dx_i(t)/dt, \omega(t))]^* dt \right]$ ;  $\Delta(x, u) := \det \left[ \int_T \omega(t)[\omega(t)]^* dt \right]$ ;  $\text{col}$  – вектор-столбец;  $\det$  – определитель матрицы;  $[\cdot]^*$  – операция транспонирования вектор-столбца.

Анализ критерия (5) приводит к следующему заключению: если для фиксированного процесса (4) гальваностегии существует хотя бы один индекс  $i = 1, \dots, n$ , для которого имеет место условие

$$\Delta_i(x(\cdot), u(\cdot)) \neq 0,$$

то либо нарушено условие замкнутости уравнений МДЭП (т.е. число переменных (1), (2) неполно), либо значение  $\|(x(\cdot), u(\cdot))\|_\infty$  слишком велико, чтобы не нарушить гипотезы линейной структуры МДЭП;  $\|\cdot\|_\infty$  – норма в  $L_\infty(T, R^{n+m})$  [2, с. 144]. Такой структурный анализ МДЭП конструктивен лишь для модельных примеров. В практических задачах вместо критерия (5) необходимо проверять критерий  $\delta_i(x(\cdot), u(\cdot)) := \Delta_i(x(\cdot), u(\cdot)) / (\|(x(\cdot), u(\cdot))\|_\infty)^{2(n+m+1)} \leq k_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , где

вектор  $k = \text{col}(k_1, \dots, k_n)$  задает точность структурного моделирования. Очевидно, что  $\delta_i(ax(\cdot), au(\cdot)) = \delta_i(x(\cdot), u(\cdot))$ ,  $a \in R$ .

Анализ критерия (6) приводит к следующему заключению: при выполнении условия  $\Delta(x(\cdot), u(\cdot)) \neq 0$  возможна параметрическая идентифицируемость уравнений МДЭП (здесь термин идентифицируемость тождествен понятию единственность). Этот критерий, в частности, определяет необходимый выбор в процессе идентификации функционального семейства входных воздействий

$$\{u_j(\cdot) : u_j(\cdot) \in L_2(T), \quad j = 1, \dots, m\},$$

где  $L_2(T)$  — пространство вещественных функций на  $T$ , суммируемых с квадратом. В терминах теоремы 2 из работы [6] данное условие определяется геометрией этого семейства в пространстве  $L_2(T)$ , а именно:

$$\dim \text{Span}\{u_j(\cdot) : u_j(\cdot) \in L_2(T), \quad j = 1, \dots, m\} = m,$$

причем проверка последнего равенства легко осуществима, например с помощью процедуры ортогонализации Грама–Шмидта в пространстве  $L_2(T)$  [3, с. 30].

Из анализа формулы (7) следует, что в условиях приближенного моделирования (см. ранее рассмотренный критерий  $\delta_i(x(\cdot), u(\cdot))$ ,  $i = 1, \dots, n$  для выбора структуры МДЭП) равенство (7) — есть решение задачи параметрической оптимизации вида

$$\min \int_T (\|dx(t)/dt - Ax(t) - Bu(t)\|_{R^n})^2 dt,$$

где  $\|\cdot\|_{R^n}$  — евклидова норма в  $R^n$ .

**Программная среда “РЕДИМ”. Анализ результатов моделирования.** Для решения означенного выше круга задач апостериорного моделирования динамики процесса гальванизации был использован программный комплекс “РЕДИМ” (реализация динамической моде-

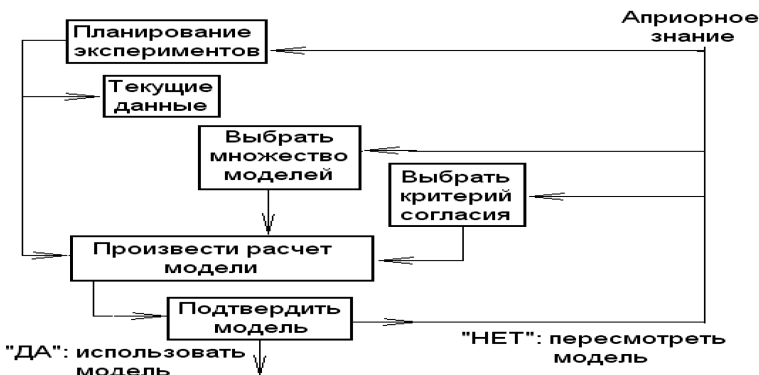


Рис. 1. Схема принятия решений, реализованная в пакете “РЕДИМ”

ли), разработанный в ИДСТУ СО РАН (рис. 1). В качестве экспериментальной базы использована серия натуральных экспериментов [1] по гальванизации коренной опоры коленчатого вала. При проектировании программной среды предполагалось достижение двух основных методологических целей проведения компьютерного моделирования:

1) математическое обеспечение, воспроизводящее слабо структурированные динамические свойства, должно моделировать порождение оперативных логико-динамических сценариев, учитывающих различные предположения относительно внутренней и внешней физической среды моделируемого процесса;

2) проверка подтверждения гипотез динамики исследуемого объекта.

Библиотека предметно-ориентированных программных модулей пакета “РЕДИМ” предоставляет следующие возможности:

— обработку экспериментальных данных (интерполяцию траектории вектора состояния исследуемого объекта средствами сплайн-аппроксимации);

— структурную идентификацию динамической модели исследуемого объекта в классе дифференциальных уравнений (3), удовлетворяющей критериям (5) и (6);

— анализ адекватности идентифицированной динамической модели и имитационное прогнозирование эволюции исследуемого процесса на основе численного интегрирования дифференциальных уравнений состояния.

Анализ (математическое моделирование) критерия (5) в программно-ориентированной среде “РЕДИМ” показал, что замкнутая структура физико-химических переменных МДЭП (1) и (2) для нестационарных режимов гальванизации с управляемыми циклами обновления Zn-Fe-электролита и вращения анода имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}x_1(t) & \text{ — текущее значение толщины покрытия;} \\x_2(t) & \text{ — текущее значение микротвердости покрытия;} \\x_3(t) & \text{ — текущее содержание Fe в осадке;} \\x_4(t) & \text{ — текущее значение хрупкости покрытия;} \\u_1(t) & \text{ — текущее значение катодной плотности электротока;} \\u_2(t) & \text{ — текущее значение скорости протока электролита;} \\u_3(t) & \text{ — текущее значение угловой скорости вращения анода;} \\u_4(t) & \text{ — текущее значение кислотности электролита;} \\u_5(t) & \text{ — текущее значение FeSO}_4\text{/ZnSO}_4.\end{aligned} \quad (8)$$

В результате параметрической идентификации в соответствии с алгоритмом (7) дифференциальных уравнений МДЭП для гальванизации

[1] коренной опоры коленчатого вала получена следующая модель:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1(t)}{dt} &= -0,0207x_1(t) + 0,0011x_2(t) - 0,0033x_3(t) - \\
 &- 0,0017x_4(t) + 0,0955u_1(t) + 0,0453u_2(t) - 0,0039u_3(t) - \\
 &- 0,0124u_4(t) + 0,0192u_5(t); \\
 \frac{dx_2(t)}{dt} &= -0,2605x_1(t) - 0,0259x_2(t) + 0,1028x_3(t) - \\
 &- 0,0204x_4(t) - 7,658u_1(t) - 15,2468u_2(t) + 0,9402u_3(t) + \\
 &+ 1,3282u_4(t) - 0,9613u_5(t); \\
 \frac{dx_3(t)}{dt} &= 0,0289x_1(t) - 0,0033x_2(t) + 0,0107x_3(t) + \\
 &+ 0,0011x_4(t) - 0,8368u_1(t) - 2,0469u_2(t) + 0,121u_3(t) + \\
 &+ 0,1055u_4(t) - 0,2113u_5(t); \\
 \frac{dx_4(t)}{dt} &= -0,1013x_1(t) + 0,001x_2(t) + 0,0127x_3(t) - \\
 &- 0,023x_4(t) + 1,9518u_1(t) + 1,4397u_2(t) - 0,108u_3(t) + \\
 &+ 0,2087u_4(t) + 0,0301u_5(t).
 \end{aligned} \tag{9}$$

На рис. 2–5 приведены экспериментальные данные процесса гальванизации и результаты его имитационного моделирования (в среде “РЕДИМ”) на основе численного интегрирования идентифицированных уравнений (9) МДЭП.

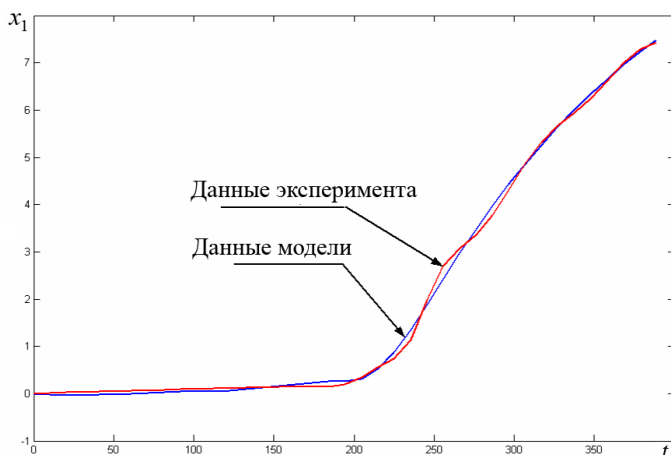
**Построение оптимального режима гальванизации на базе МДЭП.** Предложенную процедуру моделирования структурно-параметрического определения уравнений МДЭП можно использовать при расчете оптимального режима электролитического процесса (ОРЭП) для технологии ресурсосберегающей гальванообработки в условиях обновляющегося электролита и динамичного анода. При этом под ОРЭП понимается гальваностегия, обеспечивающая, с одной стороны, заданные показатели качества гальванопокрытия, а с другой — минимизацию энергетических и материальных затрат на ее реализацию.

Задача ОРЭП формулируется так: для дифференциальной системы (3) с параметрами (7) построить вектор-функцию управляющих воздействий  $u_{\text{опт}}(t)$ ,  $t \in T = [0, \tau]$ , удовлетворяющую критерию минимума энергетических и материальных затрат

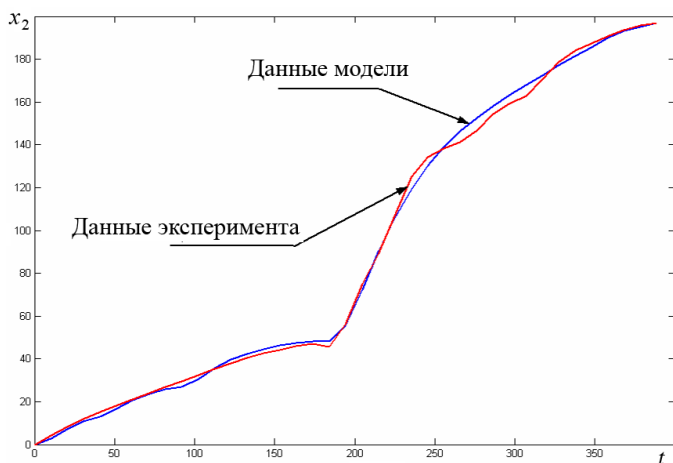
$$\min J(u) := \int_T (u_1^2(t) + u_2^2(t) + \dots + u_m^2(t)) dt \tag{10}$$

и обеспечивающую краевые условия электролитического процесса

$$x(0) = x_0, \quad x(\tau) = x_T,$$



**Рис. 2. Графики изменения толщины покрытия**

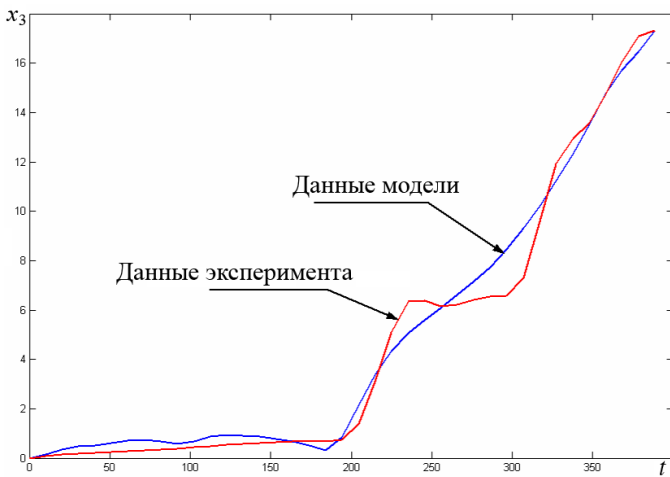


**Рис. 3. Графики изменения микротвердости покрытия**

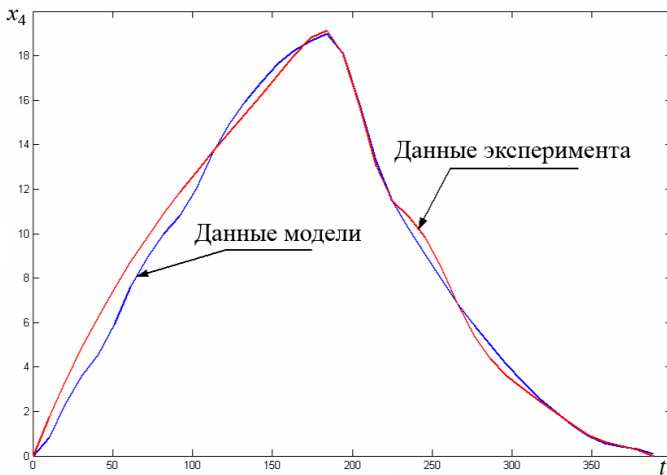
где  $x_0$  и  $x_T$  — исходные (начальные) и требуемые (конечные) параметры гальванообработки (показатели качества), при некоторых фазовых ограничениях; в частности, для уравнений (9) МДЭП они имеют вид

$$x_i(t) \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad u_j(t) \geq 0, \quad j = 4, 5.$$

Эти ограничения отражают природу переменных (8). Рассматриваемая ОРЭП-технология относится к классу линейных задач оптимального управления при квадратичном (по управлению) функционале со сложными и многообразными ограничениями пространственно-фазового и терминального типа, а также ограничениями на управляющие воздействия. Для ее численного решения использовали разработанный в ИДСТУ СО РАН программный комплекс по оптимизации, включаю-



**Рис. 4.** Графики изменения содержания Fe в осадке



**Рис. 5.** Графики изменения хрупкости покрытия

щий в себя разнообразные методы градиентного типа и методы улучшения, основанные на достаточных условиях оптимальности Кротова [7]. Учитывая сложную структуру задачи ОРЭП, ее решение проводили в несколько этапов.

Сначала ставили задачу минимизации штрафного функционала

$$I(x) = \sum_{i=1}^n s_i^t \int_T (\max(0, -x_i))^2 dt + \sum_{i=1}^n s_i^T (x_i(\tau) - x_T)^2,$$

что позволило получить траекторию, для которой выполнялись фазовые ограничения; здесь  $s_i^t$ ,  $s_i^T$  — штрафные коэффициенты с значениями из полуинтервала  $(0,1]$ . Затем увеличивали значения штрафных



коэффициентов для терминальных ограничений до приближенного выполнения ограничений в конечный момент времени. На заключительном этапе минимизировали суммарный функционал  $s_0 J(u) + (1 - s_0)I(x)$ , что, по существу, позволило уточнить приближенно-оптимальное управление. Резюмируя моделирование ОРЭП в целом, отметим, что на его первых этапах применялись методы градиентного типа, на последнем — методы второго порядка; результаты расчетов приведены на рис. 6–10.

Анализ результатов численного моделирования показал, что ОРЭП-технология для нестационарного режима цинк-железной гальванообработки позволяет осуществить экономию в виде ресурсосбережения, выраженного через функционал затрат (10), относительно исходной МДЭП-технологии на 150 %.

**Выводы.** 1. Для комплексного исследования апостериорной математической модели процесса электроосаждения цинк-железного сплава в условиях управляемых режимов обновления электролита и вращения анода привлечен аппарат теории реализации динамических систем в классе линейных стационарных дифференциальных уравнений с программным управлением. Определена репрезентативная дифференциальная модель управляемой динамики процесса гальванизации. Установлено хорошее совпадение этой модели с экспериментальными данными.

2. Поставлена и исследована задача оптимизации режима гальванизации, сберегающего энергетические и материальные затраты. Для различных вариантов граничных условий электролиза разработана алгоритмическая ОРЭП-технология оптимизации нестационарного электролитического процесса, представляющая собой цепь конечных

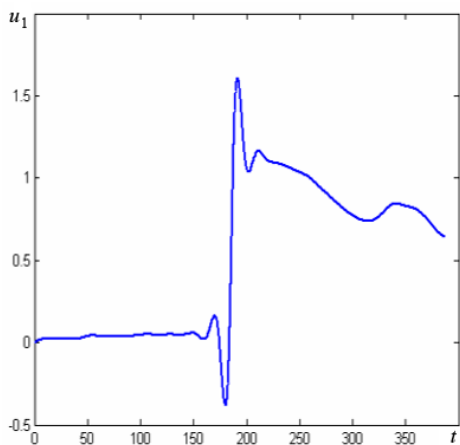


Рис. 6. Оптимальная программа катодной плотности электротока  $u_{1\text{опт}}(t)$

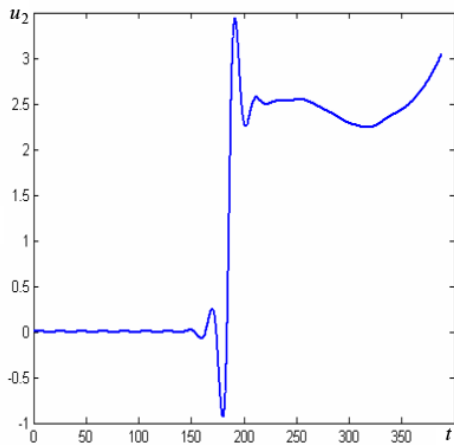
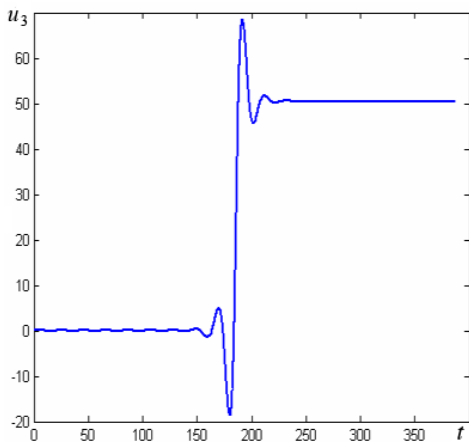
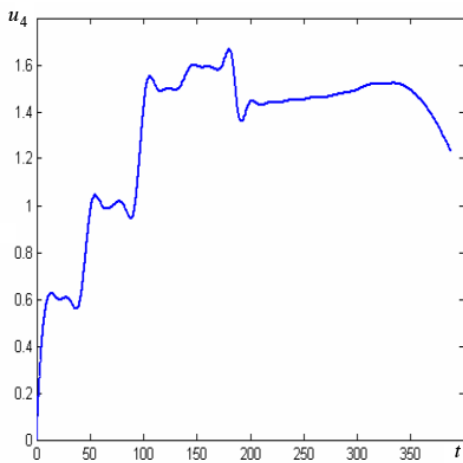


Рис. 7. Оптимальная программа скорости протока электролита  $u_{2\text{опт}}(t)$



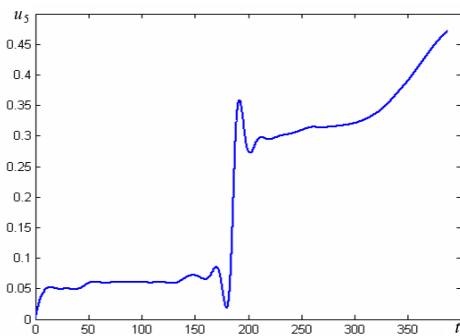
**Рис. 8.** Оптимальная программа скорости вращения анода  $u_{3\text{опт}}(t)$



**Рис. 9.** Оптимальная программа кислотности электролита  $u_{4\text{опт}}(t)$

формул. На основе ОРЭП-технологии построен ресурсосберегающий режим гальваностегии, допускающий технологическое распространение на другие электролитические процессы гальванотехники.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 05-01-00623, № 05-01-00477), Программы фундаментальных исследований № 22 Президиума РАН и Гранта Президента Российской Федерации по государственной поддержке научных школ Российской Федерации (проект № НШ-9508.2006.1).*



**Рис. 10.** Оптимальная программа относительной концентрации  $\text{FeSO}_4/\text{ZnSO}_4$   $u_{5\text{опт}}(t)$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баранов А. Н., Шихкин Г. М., Лбов Ю. С., Лувсанжамцин Ч. Патент на изобретение “Электролит для осаждения сплава цинк-железо”/ Роспатент. № 2086712 от 10.08.1997 г.
2. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. – М.: Наука, 1977. – 624 с.
3. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
4. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. – М.: Мир, 1971. – 400 с.
5. Теория систем. Математические методы и моделирование / Под ред. А.Н. Колмогорова и С.П. Новикова. – М.: Мир, 1989. – 384 с.

6. Данеев А. В., Русанов В. А. Геометрические характеристики свойств существования конечномерных  $(A, B)$ -моделей в задачах структурно-параметрической идентификации // Автоматика и телемеханика. – 1999. – № 1. – С. 3–8.
7. Батурин В. А., Урбанович Д. Е. Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения. – Новосибирск: Наука, 1997. – 175 с.
8. Васильев С. Н., Жерлов А. К., Федосов Е. А., Федунев Б. Е. Интеллектуальное управление динамическими системами. – М.: Физматлит, 2000. – 352 с.

Статья поступила в редакцию 30.01.2007

Вячеслав Анатольевич Русанов родился в 1955 г., окончил в 1978 г. Казанский авиационный институт им. А.Н. Туполева. Д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Института динамики систем и теории управления (ИДСТУ) СО РАН. Автор 105 научных работ в области математической теории систем.

V.A. Rusanov (b. 1955) graduated from the Kazan Aviation Institute n.a. A.N. Tupolev in 1978. D. Sc. (Phys.-Math.), chief researcher of the Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian division of RAS. Author of 105 publications in the field of mathematical theory of systems.

Владимир Александрович Козырев родился в 1986 г., студент Иркутского государственного университета путей сообщения, программист ИДСТУ СО РАН. Специализируется в области компьютерного моделирования сложных динамических процессов.

V.A. Kozyrev (b. 1986) – student of the Irkutsk State University for Railway Services, programmer of the Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian division of RAS. Specializes in the field of computer simulation of complex dynamical processes.

Дмитрий Евгеньевич Урбанович родился в 1962 г., окончил в 1983 г. Иркутский государственный университет. Канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник ИДСТУ СО РАН. Автор 53 научных работ в области системного анализа и оптимального управления.

D.Ye. Urbanovich (b. 1962) graduated from the Irkutsk State University in 1983. Ph. D. (Phys.-Math.), leading researcher of the Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian division of RAS. Author of 53 publications in the field of system analysis and optimal control.

Геннадий Михайлович Шишкин родился в 1933 г., окончил в 1955 г. Иркутский сельскохозяйственный институт. Канд. техн. наук, профессор кафедры “Ремонт машин и технология металлов” Ордена Дружбы народов Иркутской государственной сельскохозяйственной академии (ИГСА), Почетный профессор монгольского сельскохозяйственного университета, Почетный работник высшего профессионального образования. Автор 147 научных работ в области технологии металлообработки.

G.M. Shishkin (b. 1933) graduated from the Irkutsk Agriculture Institute in 1955. Ph. D. (Eng.), professor of “Repair of Machines and Technology of Metals” department of the Irkutsk State Agriculture Academy awarded by Peoples Friendship Medal. Honored Professor of Mongolian Agriculture University, Honored Worker of Higher Professional Education. Author of 147 publications in the field of technology of metal processing.