Антон Вячеславович Мастихин родился в 1962 г., окончил в 1983 г. МГУ им. М.В. Ломоносова. Старший преподаватель кафедры “Высшая математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор семи научных работ.

A.V. Mastikhin (b. 1962) graduated from the Lomonosov State University in 1983. Senior teacher of “Higher Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 7 publications.

УДК 519.216.1/2

В. В. Сюзев

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СПЕКТРЫ СИГНАЛОВ В БАЗИСЕ ВИЛЕНКИНА–КРЕСТЕНСОНА, ИНВАРИАНТНЫЕ К ЦИКЛИЧЕСКОМУ СДВИГУ

Рассмотрена методика построения энергетических спектров, инвариантных к временному сдвигу, для дискретных сигналов в обобщенном базисе Виленкина–Крестенсона. Исследована структура матрицы взаимосвязи спектров сигналов при сдвиге, и приводятся общие аналитические зависимости спектров мощности для различных способов упорядочения базисных функций. Полученные результаты могут найти применение при решении задач цифровой обработки сигналов с использованием их энергетических характеристик.

Спектральные методы находят широкое применение при решении различных задач цифровой обработки сигналов. Эффективность этих методов во многом определяется используемой системой базисных функций. Среди широкого множества различных базисных систем особое место занимают системы, использующие функции Виленкина–Крестенсона (ВКФ) [1]. ВКФ определяют совокупность базисных функций, отличающихся значением модулярного параметра, и могут служить математической основой для построения базисных систем с различным порядком следования функций. Из них, как частный случай, получаются системы экспоненциально-комплексных функций и функций Уолша, находящие широкое применение на практике [1, 2].

Свойства функций Уолша и экспоненциально-комплексных функций и их спектров хорошо изучены и отражены в специальной литературе [1–3]. Свойства спектров ВКФ исследованы в меньшей степени. В работе предлагается методика построения в базисе ВКФ энергетических спектров, не зависящих от циклического сдвига сигналов. Такие спектры широко применяются при решении различных задач обработки с использованием энергетических характеристик сигналов.

Краткие сведения о дискретных функциях Виленкина–Крестенсона. Дискретные ВКФ $W(k,i)$ являются p-значными комплексными функциями, определенными на интервале $[0, N = p^n)$, и тесно связаны с представлением их номера k и номера отсчета i в позиционной n-разрядной системе счисления с основанием p (n и p — целые положительные числа)

$$k = \sum_{m=1}^{n} k_m p^{m-1}; \quad i = \sum_{m=1}^{n} i_m p^{m-1}. \tag{1}$$

Здесь k_m и i_m — значения m-го разряда чисел k и i соответственно и принимают целочисленные значения в диапазоне $[0,\, p-1]$. На основе ВКФ возможно построение различных базисных систем, различающихся порядком следования базисных функций. Наиболее известными являются упорядочения Адамара и Пэли [1].

Для системы ВКФ–Адамара базисные функции имеют следующее аналитическое представление:

$$W(k,i) = \exp\left(j\frac{2\pi}{p}\sum_{m=1}^{n} k_m i_m\right) = W_p^{\sum\limits_{m=1}^{n} k_m i_m}, \tag{2}$$

где использовано обозначение $W_p = \exp\left(j\dfrac{2\pi}{p}\right)$ (j — мнимая единица). Модуль каждой ВКФ $W(k,i)$ равен единице, а фаза — $(2\pi/p)\sum\limits_{m=1}^{n} k_m i_m$. Вычитая из нее целое число 2π, с помощью выражения (2) можно получить систему ВКФ–Адамара с минимальными фазами. Так, например, для $N = 9 = 3^2$ система ВКФ–Адамара представляется следующей матрицей:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix}
W_3^0 & W_3^0 & W_3^0 & W_3^0 & W_3^0 & W_3^0 & W_3^0 & W_3^0 & W_3^0 \\
W_3^0 & W_3^1 & W_3^2 & W_3^0 & W_3^1 & W_3^2 & W_3^0 & W_3^1 & W_3^2 \\
W_3^0 & W_3^2 & W_3^1 & W_3^0 & W_3^2 & W_3^1 & W_3^0 & W_3^2 & W_3^1 \\
W_3^0 & W_3^0 & W_3^0 & W_3^1 & W_3^1 & W_3^1 & W_3^2 & W_3^2 & W_3^2 \\
W_3^0 & W_3^1 & W_3^2 & W_3^1 & W_3^2 & W_3^0 & W_3^2 & W_3^0 & W_3^1 \\
W_3^0 & W_3^2 & W_3^1 & W_3^1 & W_3^0 & W_3^2 & W_3^2 & W_3^1 & W_3^0 \\
W_3^0 & W_3^0 & W_3^0 & W_3^2 & W_3^2 & W_3^2 & W_3^1 & W_3^1 & W_3^1 \\
W_3^0 & W_3^1 & W_3^2 & W_3^2 & W_3^0 & W_3^1 & W_3^1 & W_3^2 & W_3^0 \\
W_3^0 & W_3^2 & W_3^1 & W_3^2 & W_3^1 & W_3^0 & W_3^1 & W_3^0 & W_3^2
\end{bmatrix}. \tag{3}$$

Систему ВКФ–Пэли можно получить из системы ВКФ–Адамара (2) путем p-й инверсии номеров k функций системы Адамара (т.е. записи

p-х разрядов чисел k в обратном порядке). Поэтому для ВКФ–Пэли

$$W(k,i) = W_p^{\sum\limits_{m=1}^{n} k_{n+1-m} i_m}. \qquad (4)$$

Для $p = 3$ и $n = 2$ такая система с минимальными фазами имеет следующий матричный вид:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_3^0 & W_3^0 & W_3^0 & W_3^0 & W_3^0 & W_3^0 & W_3^0 & W_3^0 & W_3^0 \\ W_3^0 & W_3^0 & W_3^0 & W_3^1 & W_3^1 & W_3^1 & W_3^2 & W_3^2 & W_3^2 \\ W_3^0 & W_3^0 & W_3^0 & W_3^2 & W_3^2 & W_3^2 & W_3^1 & W_3^1 & W_3^1 \\ W_3^0 & W_3^1 & W_3^2 & W_3^0 & W_3^1 & W_3^2 & W_3^0 & W_3^1 & W_3^2 \\ W_3^0 & W_3^1 & W_3^2 & W_3^1 & W_3^2 & W_3^0 & W_3^2 & W_3^0 & W_3^1 \\ W_3^0 & W_3^1 & W_3^2 & W_3^2 & W_3^0 & W_3^1 & W_3^1 & W_3^2 & W_3^0 \\ W_3^0 & W_2^2 & W_3^1 & W_3^0 & W_3^2 & W_3^1 & W_3^0 & W_3^2 & W_3^1 \\ W_3^0 & W_3^2 & W_3^1 & W_3^1 & W_3^0 & W_3^2 & W_3^2 & W_3^1 & W_3^0 \\ W_3^0 & W_3^2 & W_3^1 & W_3^2 & W_3^1 & W_3^0 & W_3^1 & W_3^0 & W_3^2 \end{bmatrix}. \qquad (5)$$

В матрицах (3) и (5) элементы $W_3^0 = 1$; $W_3^1 = -\frac{1}{2} + j\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $W_3^2 = -\frac{1}{2} - j\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Как следует из выражений (2) и (4), обе рассматриваемые системы взаимосвязаны друг с другом, при конкретном N содержат одни и те же базисные функции и отличаются только порядком их следования в системе. При $p = 2$ системы ВКФ переходят в соответствующие системы Уолша [1], а при $p = N$ и $n = 1$ вне зависимости от способа упорядочения — в систему дискретных экспоненциально-комплексных функций (ДЭФ)

$$def(k,i) = \exp\Big(j\frac{2\pi}{N}ki\Big) = W_N^{ki}. \qquad (6)$$

ВКФ являются ортонормированными периодическими функциями. Образованные из них базисные системы Адамара и Пэли являются полными и могут быть использованы для спектрального представления дискретных сигналов $x(i)$ $(i = 0, 1, \ldots, N-1)$ конечной мощности. Дискретные преобразования Фурье (ДПФ) в базисах ВКФ имеют комплексный вид:

$$x(i) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W(k,i), \qquad (7)$$

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i) W^*(k,i), \qquad (8)$$

а равенство Парсеваля

$$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x^2(i) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)X^*(k) \tag{9}$$

отражает энергетическую эквивалентность временного и спектрального представлений сигналов и подтверждает полноту систем ВКФ. В выражениях (8) и (9) $W^*(k,i)$ и $X^*(k)$ означают комплексно-сопряженные значения соответственно ВКФ $W(k,i)$ и спектра $X(k)$ сигнала $x(i)$.

Пара ДПФ (7) и (8) может быть записана и в матричной форме

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}\mathbf{X}, \tag{10}$$

$$\mathbf{X} = \frac{1}{N}\mathbf{W}^*\mathbf{x}, \tag{11}$$

где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{X}$ — матрицы-столбцы отсчетов сигнала и его спектра, а $\mathbf{W}$ и $\mathbf{W}^*$ — квадратные матрицы $N \times N$ комплексных и комплексно-сопряженных значений ВКФ соответственно. Матрицы $\mathbf{W}$ и $\mathbf{W}^*$ — унитарные и симметрические.

Левая часть выражения (9) определяет среднюю мощность сигнала при его представлении во временной области. Следовательно, его правая часть задает ту же мощность, но при спектральном представлении сигнала. В соответствии с этим величина

$$S(k) = X(k)X^*(k) \tag{12}$$

выражает спектр мощности сигнала.

Дискретные ВКФ являются дважды мультипликативными функциями относительно операции поразрядного сложения по модулю p. Поэтому спектр мощности (12) не меняется при обобщенном (полиадическом) сдвиге сигнала по оси дискретного времени [1]. Такой сдвиг реализуется с помощью поразрядных сложений (сдвиг влево) и вычитаний (сдвиг вправо) по модулю p. При $p = 2$ (в случае функций Уолша) сдвиг будет диадическим и математически представляется операцией поразрядного сложения по модулю 2 (вычитание по модулю 2 совпадает со сложением по модулю 2). При $p = N$ и $n = 1$ (в случае ДЭФ) сдвиг будет циклическим и математически представляется сложением или вычитанием по модулю N.

Циклический сдвиг адекватен временным задержкам и запаздываниям, имеющим место в системах обработки. Поэтому инварианты к нему широко используются в алгоритмах обработки сигналов. Следует иметь в виду, что спектр мощности (12) в базисе ВКФ при произвольных $p \neq N$ неинвариантен к циклическому сдвигу. Однако и в этом случае можно построить циклически инвариантный спектр.

Косвенным подтверждением этому может служить спектр мощности Уолша–Адамара, полученный в работе [3]. Поставим и решим более общую задачу разработки алгоритмов синтеза спектра мощности, инвариантного к циклическому сдвигу, для ВКФ с произвольным значением модулярного параметра p и различными способами упорядочения ВКФ-систем.

Синтез инвариантного к циклическому сдвигу спектра мощности в базисах ВКФ. Сначала рассмотрим методику синтеза таких спектров на примере ДЭФ. Пусть сигнал $y_1(i)$ является результатом циклического сдвига влево на один отсчет сигнала $x(i)$, т.е. $\{y_1(i)\} = \{x(1), x(2), \ldots, x(N-1), x(0)\}$. Такому сдвигу можно придать матричную интерпретацию, если ввести квадратную матрицу сдвига $\mathbf{M}$ размерности $N \times N$:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}. \qquad (13)$$

Тогда

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{Mx}. \qquad (14)$$

Спектр Фурье $Y_1(k)$ сдвинутого сигнала $y_1(i)$ в соответствии с общей формулой (11) будет равен

$$\mathbf{Y}_1 = \frac{1}{N}\mathbf{W}^*\mathbf{y}_1 = \frac{1}{N}\mathbf{W}^*\mathbf{Mx}.$$

Если теперь в этом выражении учесть формулу (10) обратного ДПФ для сигнала $x(i)$, то получим, что

$$\mathbf{Y}_1 = \frac{1}{N}\mathbf{W}^*\mathbf{MWX} = \mathbf{AX}, \qquad (15)$$

где матрица $\mathbf{A}$ выражает матричное преобразование подобия вида

$$\mathbf{A} = \mathbf{W}^*\mathbf{MW} \qquad (16)$$

и по сути является матрицей связи спектров сдвинутого и несдвинутого сигналов. В зависимостях (15) и (16) $\mathbf{W}$ и $\mathbf{W}^*$ означают матрицы комплексных и комплексно-сопряженных значений ДЭФ.

Расчеты показывают, что матрица $\mathbf{A}$ для ДЭФ имеет диагональный вид

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} W_N^0 & & & & & \\ & W_N^1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & W_N^{N-1} \end{bmatrix}, \tag{17}
$$

и поэтому решение матричного уравнения (15) представляется следующим простым выражением:

$$
Y_1(k) = W_N^k X(k), \tag{18}
$$

$\left(W_N^k = \exp\left(j\frac{2\pi}{N}k\right)\right)$, что соответствует известной теореме о сдвиге сигнала в базисе ДЭФ [1].

Спектры мощности сдвинутого и несдвинутого сигналов полностью совпадают, так как

$$
Y_1(k)Y_1^*(k) = X(k)W_N^k X^*(k)W_N^{-k} = X(k)X^*(k). \tag{19}
$$

Спектр мощности $S(k)$ для ДЭФ будет инвариантен к любому числу сдвигов. Доказать это можно следующим образом. Сдвиг на два отсчета сигнала $x(i)$ можно представить как сдвиг на один отсчет уже сдвинутого на один отсчет сигнала $y_1(i)$. Тогда сдвинутые сигналы $y_2(i)$ и $y_1(i)$ будут удовлетворять матричному уравнению (14), а их спектры $Y_2(k)$ и $Y_1(k)$ — матричному уравнению (15). Поэтому

$$
\mathbf{Y}_2 = \mathbf{A}\mathbf{Y}_1
$$

и, в силу диагональной структуры матрицы $\mathbf{A}$,

$$
Y_2(k) = W_N^k Y_1(k). \tag{20}
$$

Тогда

$$
Y_2(k)Y_2^*(k) = Y_1(k)Y_1^*(k) = X(k)X^*(k). \tag{21}
$$

Аналогичным образом доказывается независимость спектра (12) для ДЭФ и от сдвига на большее число отсчетов.

Применим теперь рассмотренную методику к системам ВКФ. В этом случае матрица $\mathbf{A}$ связи спектров также записывается выражением (16), только $\mathbf{W}$ и $\mathbf{W}^*$ являются уже матрицами комплексных и комплексно-сопряженных значений ВКФ. Структура матрицы $\mathbf{A}$ зависит от способа упорядочения ВКФ в системе. Сразу в общем виде ее получить не удается. Поэтому рассмотрим сначала матрицу $\mathbf{A}$ для $N = 9$, а затем обобщим полученные результаты.

Система ВКФ–Адамара. Для системы ВКФ–Адамара, представляемой матрицей (5), матрица $\mathbf{A}$ имеет следующий блочно-диагональный вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & W_3^1 & & & & & & & \\ & & W_3^2 & & & & & & \\ & & & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & & & \\ & & & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & & & \\ & & & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} & & & \\ & & & & & & a_{6,6} & a_{6,7} & a_{6,8} \\ & & & & & & a_{7,6} & a_{7,7} & a_{7,8} \\ & & & & & & a_{8,6} & a_{8,7} & a_{8,8} \end{bmatrix}, \qquad (22)$$

где

$$a_{3,3} = a_{5,3} = a_{5,4} = \frac{1}{3}(2W_3^0 + W_3^1) = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{6};$$

$$a_{3,4} = a_{3,5} = a_{4,4} = \frac{1}{3}(2W_3^1 + W_3^2) = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{6};$$

$$a_{4,3} = a_{4,5} = a_{5,5} = \frac{1}{3}(W_3^0 + 2W_3^2) = -j\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$a_{6,6} = a_{7,6} = a_{7,8} = \frac{1}{3}(2W_3^0 + W_3^2) = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{6};$$

$$a_{6,7} = a_{6,8} = a_{8,8} = \frac{1}{3}(W_3^1 + 2W_3^2) = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{6};$$

$$a_{7,7} = a_{8,6} = a_{8,7} = \frac{1}{3}(W_3^0 + 2W_3^1) = j\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Такая структура матрицы $\mathbf{A}$ позволяет решение матричного уравнения (15) представить в виде следующей системы алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} &Y_1(0) = X(0);\ Y_1(1) = W_3^1 X(1);\ Y_1(2) = W_3^2 X(2); \\ &Y_1(3) = a_{3,3}X(3) + a_{3,4}X(4) + a_{3,5}X(5); \\ &Y_1(4) = a_{4,3}X(3) + a_{4,4}X(4) + a_{4,5}X(5); \\ &Y_1(5) = a_{5,3}X(3) + a_{5,4}X(4) + a_{5,5}X(5); \\ &Y_1(6) = a_{6,6}X(6) + a_{6,7}X(7) + a_{6,8}X(8); \\ &Y_1(7) = a_{7,6}X(6) + a_{7,7}X(7) + a_{7,8}X(8); \\ &Y_1(8) = a_{8,6}X(6) + a_{8,7}X(7) + a_{8,8}X(8). \end{aligned}$$

Из нее следует, что все спектральные коэффициенты $X(k)$ и $Y_1(k)$ можно разбить на 5 групп, в которые входят коэффициенты с номерами, совпадающими с номерами строк и столбцов матрицы, на пересечении которых лежат элементы, принадлежащие соответствующему блоку матрицы $\mathbf{A}$. Так в состав 0-й группы входят коэффициенты с нулевым номером, в состав 1-й — с первым номером, в состав 2-й — со вторым номером, в состав 3-й — с номерами 3, 4 и 5, а в состав последней 4-й группы — с номерами 6,7 и 8. При этом суммы произведений комплексно-сопряженных пар коэффициентов $X(k)$ и $Y_1(k)$ в пределах одной группы равны между собой:

$$Y_1(0)Y_1^*(0) = X(0)X^*(0);$$
$$Y_1(1)Y_1^*(1) = X(1)X^*(1);$$
$$Y_1(2)Y_1^*(2) = X(2)X^*(2);$$

$$Y_1(3)Y_1^*(3) + Y_1(4)Y_1^*(4) + Y_1(5)Y_1^*(5) = \\ = X(3)X^*(3) + X(4)X^*(4) + X(5)X^*(5);$$

$$Y_1(6)Y_1^*(6) + Y_1(7)Y_1^*(7) + Y_1(8)Y_1^*(8) = \\ = X(6)X^*(6) + X(7)X^*(7) + X(8)X^*(8).$$

Их можно использовать для образования спектра мощности, инвариантного к циклическому сдвигу:

$$S(0) = X(0)X^*(0);\;\; S(1) = X(1)X^*(1);\;\; S(2) = X(2)X^*(2);$$
$$S(3) = X(3)X^*(3) + X(4)X^*(4) + X(5)X^*(5);$$
$$S(4) = X(6)X^*(6) + X(7)X^*(7) + X(8)X^*(8).$$

Анализ показывает, что в общем случае для произвольных значений p и n матрица $\mathbf{A}$ сохраняет блочно-диагональную структуру, в которой блоки располагаются по диагонали в порядке возрастания их размерности:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \mathbf{A}(0) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mathbf{A}(n-1) \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Блок-матрицы $\mathbf{A}(\lambda)$, $\lambda = 0, 1, \ldots, n-1$, в свою очередь, также имеют блочно-диагональную структуру и состоят из $(p-1)$ субблоков $\mathbf{A}(\lambda, m)$, $m = 1, 2, \ldots, p-1$:

$$\mathbf{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\lambda,1) & & & & \\ & \mathbf{A}(\lambda,2) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \mathbf{A}(\lambda,p-1) \end{bmatrix}.$$

При этом каждый m-й матричный субблок $\mathbf{A}(\lambda, m)$ является квадратной матрицей размерности $p^\lambda \times p^\lambda$:

$$\mathbf{A}(\lambda, m) = \begin{bmatrix} a_{0,0}(\lambda, m) & a_{0,1}(\lambda, m) & \ldots & a_{0,p^\lambda-1}(\lambda, m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p^\lambda-1,0}(\lambda, m) & a_{p^\lambda-1,1}(\lambda, m) & \ldots & a_{p^\lambda-1,\,p^\lambda-1}(\lambda, m) \end{bmatrix},$$

и содержит $p^{2\lambda}$ ненулевых комплексных элементов, образованных из различных линейных комбинаций чисел $W_p^0 = 1,\ W_p^1, \ldots, W_p^{p-1}$. Субматрицы $\mathbf{A}(0, m)$ имеют единичную размерность и состоят из одного элемента W_p^m, поэтому блок-матрица $\mathbf{A}(0)$ будет просто диагональной с элементами $W_p^1,\ W_p^2, \ldots, W_p^{p-1}$. Вся матрица $\mathbf{A}$ содержит $(p^{2n} + + p)/(p+1)$ ненулевых элементов.

Блочно-диагональная структура матрицы $\mathbf{A}$ позволяет все спектральные коэффициенты $Y_1(k)$ и $X(k)$ при решении матричного уравнения (15) разбить на $n(p-1)+1$ независимых групп так, что в каждую группу будут входить только коэффициенты с номерами, совпадающими с номерами строк и столбцов, на пересечении которых находятся элементы, принадлежащие данному субблоку. Правило образования независимых групп поясняется таблицей 1.

Суммы пар произведений комплексно-сопряженных коэффициентов $Y_1(k)Y_1^*(k)$ и $X(k)X^*(k)$ в пределах каждой группы равны между собой:

$$Y_1(k)Y_1^*(k) = X(k)X^*(k),\ \ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ p-1;$$

$$\sum_{i=mp^\lambda}^{(m+1)p^\lambda-1} Y_1^(i)Y_1^*(i) = \sum_{i=mp^\lambda}^{(m+1)p^\lambda-1} X(i)X^*(i), \tag{24}$$

$$\lambda = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1; \quad m = 1,\ 2, \ldots,\ p-1.$$

Это позволяет записать спектр мощности, инвариантный к циклическому сдвигу, для ВКФ–Адамара в следующем виде:

$$S(k) = X(k)X^*(k),\ k = 0,\ 1, \ldots, p-1;$$

$$S(\lambda(p-1)+m)=\sum_{i=mp^{\lambda}}^{(m+1)p^{\lambda}-1} X(i)X^{*}(i), \qquad (25)$$

$$\lambda=1,\,2,\ldots,n-1;\quad m=1,\,2,\ldots,p-1.$$

Из общего спектра (23) легко получаются частные результаты для конкретных p и n. Например, при $p=N$ и $n=1$ матрица **A** (21) будет содержать только элемент $W_N^0=1$, и блок $\mathbf{A}(0)$ и совпадает с матрицей **A** (17) для ДЭФ. Поэтому спектр (23) перейдет в аналогичный спектр (12) для ДЭФ. При $p=2$ матрица **A** (21) перейдет в матрицу **A** для базиса Уолша–Адамара, и спектр мощности (23) становится спектром мощности Уолша–Адамара:

$$\begin{aligned} &S(k)=X^2(k),\quad k=0,\,1;\\ &S(\lambda+1)=\sum_{i=2^{\lambda}}^{2^{\lambda+1}-1} X^2(i),\quad \lambda=1,\,2,\ldots,n-1. \end{aligned} \qquad (26)$$

В таком же виде этот спектр был получен в работе [3].

Таблица 1

Номер группы	Количество коэффициентов в группе	Номера коэффициентов в группе
0	1	0
1	1	1
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$p-1$	1	$p-1$
p	p	$p, p+1, \ldots, 2p-1$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$2(p-1)$	p	$(p-1)p, (p-1)p+1, \ldots, p^2-1$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\lambda(p-1)+1$	p^{λ}	$p^{\lambda}, p^{\lambda}+1, \ldots, 2p^{\lambda}-1$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$(\lambda+1)(p-1)$	p^{λ}	$(p-1)p^{\lambda}, (p-1)p^{\lambda}+1, \ldots p^{\lambda+1}-1$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$(n-1)(p-1)+1$	p^{n-1}	$p^{n-1}, p^{n-1}+1, \ldots, 2p^{n-1}-1$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$n(p-1)$	p^{n-1}	$(p-1)p^{n-1}, (p-1)p^{n-1}+1, \ldots, p^n-1$

Система ВКФ–Пэли. Для этой системы (5) при $N = 9$ матрица $\mathbf{A}$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{1,1} & 0 & 0 & a_{1,4} & 0 & 0 & a_{1,7} & 0 \\ 0 & 0 & a_{2,2} & 0 & 0 & a_{2,5} & 0 & 0 & a_{2,8} \\ 0 & 0 & 0 & W_3^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{4,1} & 0 & 0 & a_{4,4} & 0 & 0 & a_{4,7} & 0 \\ 0 & 0 & a_{5,2} & 0 & 0 & a_{5,5} & 0 & 0 & a_{5,8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & a_{7,1} & 0 & 0 & a_{7,4} & 0 & 0 & a_{7,7} & 0 \\ 0 & 0 & a_{8,2} & 0 & 0 & a_{8,5} & 0 & 0 & a_{8,8} \end{bmatrix}, \qquad (27)$$

где ненулевые элементы $a_{i,j}$ равны:

$$a_{1,1} = a_{7,1} = a_{7,4} = \frac{1}{3}(2W_3^0 + W_3^1) = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{6};$$

$$a_{2,2} = a_{5,2} = a_{5,8} = \frac{1}{3}(2W_3^0 + W_3^2) = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{6};$$

$$a_{1,4} = a_{1,7} = a_{4,4} = \frac{1}{3}(2W_3^1 + W_3^2) = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{6};$$

$$a_{2,5} = a_{2,8} = a_{8,8} = \frac{1}{3}(W_3^1 + 2W_3^2) = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{6};$$

$$a_{4,1} = a_{4,7} = a_{7,7} = \frac{1}{3}(W_3^0 + 2W_3^2) = -j\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Матрица (25) не является блочно-диагональной и имеет более сложную структуру по сравнению с матрицей (20). Однако наличие в ней нулевых элементов и их расположение позволяют решение матричного уравнения (15) и в этом случае свести к решению системы уравнений, подобной системе, полученной для упорядочения Адамара:

$$\begin{aligned}
&Y_1(0) = X(0); \quad Y_1(3) = W_3^1 X(3); \quad Y_1(6) = W_3^2 X(6);\\
&Y_1(1) = a_{1,1}X(1) + a_{1,4}X(4) + a_{1,7}X(7);\\
&Y_1(4) = a_{4,1}X(1) + a_{4,4}X(4) + a_{4,7}X(7);\\
&Y_1(7) = a_{7,1}X(1) + a_{7,4}X(4) + a_{7,7}X(7);\\
&Y_1(2) = a_{2,2}X(2) + a_{2,5}X(5) + a_{2,8}X(8);\\
&Y_1(5) = a_{5,2}X(2) + a_{5,5}X(5) + a_{5,8}X(8);\\
&Y_1(8) = a_{8,2}X(2) + a_{8,5}X(5) + a_{8,8}X(8).
\end{aligned}$$

Это, в свою очередь, позволяет все спектральные коэффициенты $\{Y_1(k)\}$ и $\{X(k)\}$ разбить на те же 5 групп, что и для ВКФ–Адамара, с номерами, принадлежащими только одной конкретной группе. При этом в состав 0-й, 1-й и 2-й групп входят по одному коэффициенту с одноименными номерами, а в состав оставшихся двух групп — 3-й и 4-й — по три коэффициента с номерами 1, 4, 7 и 2, 5 и 8 соответственно. Суммы попарных произведений комплексно-сопряженных коэффициентов $Y_1(k)$ и $X(k)$ в пределах каждой группы в этом случае также равны между собой:

$$Y_1(0)Y_1^*(0) = X(0)X^*(0);\; Y_1(3)Y_1^*(3) = \\ = X(3)X^*(3);\; Y_1(6)Y_1^*(6) = X(6)X^*(6);$$

$$Y_1(1)Y_1^*(0) + Y_1(4)Y_1^*(4) + Y_1(7)Y_1^*(7) = \\ = X(1)X^*(1) + X(4)X^*(4) + X(7)X^*(7);$$

$$Y_1(2)Y_1^*(2) + Y_1(5)Y_1^*(5) + Y_1(8)Y_1^*(8) = \\ = X(2)X^*(2) + X(5)X^*(5) + X(8)X^*(8).$$

Данные суммы можно использовать для организации спектра мощности, инвариантного к циклическому сдвигу:

$$S(0) = X(0)X^*(0);\;\; S(1) = X(3)X^*(3);\;\; S(2) = X(6)X^*(6);$$
$$S(3) = X(1)X^*(1) + X(4)X^*(4) + X(7)X^*(7);$$
$$S(4) = X(2)X^*(2) + X(5)X^*(5) + X(8)X^*(8).$$

Число составляющих такого спектра по-прежнему равно числу групп спектральных коэффициентов.

В общем случае структура матрицы **A** для ВКФ–Пэли позволяет все спектральные коэффициенты при решении матричного уравнения (15) разбить так же на $n(p-1)+1$ независимых групп, подобно тому, как это было сделано для системы ВКФ–Адамара. Правило образования групп в этом случае другое и поясняется таблицей 2. Суммы пар произведений комплексно-сопряженных коэффициентов $Y_1(k)Y_1^*(k)$ и $X(k)X^{*(k)}$ с номерами, принадлежащими каждой группе, равны между собой:

$$Y_1(kp^{n-1})Y_1^*(kp^{n-1}) = X(kp^{n-1})X^*(kp^{n-1}),\; k = 0,\, 1, \ldots, p-1;$$

$$\sum_{i=0}^{p^\lambda-1} Y_1[p^{n-\lambda-1}(m+ip)]Y_1^*[p^{n-\lambda-1}(m+ip)] = \\ = \sum_{i=0}^{p^\lambda-1} X[p^{n-\lambda-1}(m+ip)]X^*[p^{n-\lambda-1}(m+ip)],$$
$$\lambda = 1,\, 2, \ldots, n-1;\;\; m = 1,\, 2, \ldots,\, p-1.$$

Таблица 2

Номер группы	Количество коэффициентов в группе	Номера коэффициентов в группе
0	1	0
1	1	p^{n-1}
$\dots$	$\dots$	$\dots$
$p-1$	1	$(p-1)p^{n-1}$
p	p	p^{n-2}, $p^{n-2}(1+p), \dots, p^{n-2}[1+p(p-1)]$
$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\lambda(p-1)$	p	$p^{n-2}(p-1), p^{n-2}[(p-1)+$ $+p], \dots, p^{n-2}[(p-1)+p(p-1)]$
$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\lambda(p-1)+1$	p^λ	$p^{n-\lambda-1}, p^{n-\lambda-1}(1+p), \dots, p^{n-\lambda-1}[1+p(p-1)]$
$\dots$	$\dots$	$\dots$
$(\lambda+1)(p-1)$	p^λ	$p^{n-\lambda-1}(p-1), p^{n-\lambda-1}[(p-1)+$ $+p], \dots, p^{n-\lambda-1}[(p-1)+p(p-1)]$
$\dots$	$\dots$	$\dots$
$(n-1)(p-1)+1$	p^{n-1}	$1, 1+p, \dots, 1+(p^{n-1}-1)p$
$\dots$	$\dots$	$\dots$
$n(p-1)$	p^{n-1}	$p-1, (p-1)+p, \dots, p^n-1$

Из этих пар можно образовать инвариантный спектр мощности в базисе ВКФ–Пэли:

$$S(k) = X(kp^{n-1})X^*(kp^{n-1}), \quad k = 0, 1, \dots, p-1;$$

$$S[\lambda(p-1)+m] = \sum_{i=0}^{p^\lambda - 1} X[p^{n-\lambda-1}(m+ip)]X^*[p^{n-\lambda-1}(m+ip)], \qquad (28)$$

$$\lambda = 1, 2, \dots, n-1; \quad m = 1, 2, \dots, p-1.$$

При $p = N$ и $n = 1$ спектр (25) переходит в спектр мощности ДЭФ, а при $p = 2$ — в спектр мощности Уолша–Пэли:

$$S(k) = X^2(k2^{n-1}), \quad k = 0, 1;$$

$$S(\lambda+1) = \sum_{i=0}^{2^\lambda - 1} X^2[2^{n-\lambda-1}(1+2i)], \quad \lambda = 1, 2, \dots, n-1. \qquad (29)$$

Полученные спектры (23)–(26) инвариантны к однократному сдвигу сигнала. Однако нетрудно доказать, поступая так же, как и ранее в случае с ДЭФ, что данные спектры независимы от любого числа сдвигов.

Выводы. Решена общая теоретическая задача построения энергетических инвариантов к циклическим сдвигам сигналов в обобщенных базисах Виленкина–Крестенсона. Полученные общие результаты позволяют формировать инвариантные спектры мощности сигналов в базисах ВКФ с произвольным значением модулярного параметра p, в том числе и для практически важного частного случая $p = 2$, при котором системы ВКФ переходят в системы функций Уолша. Полученные результаты, за исключением частного случая для системы Уолша–Адамара, являются оригинальными. Совпадение инвариантного спектра мощности Уолша–Адамара с известным результатом подтверждает справедливость всех выполненных в работе математических преобразований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трахтман А. М., Трахтман В. А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. – М.: Сов. радио, 1975. – 208 с.
2. Залманзон Л. А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. – М.: Наука, 1989. – 496 с.
3. Ахмед Н., Рао К. Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов: Пер. с англ. / Под ред. И.Б. Фоменко. – М.: Связь, 1980. – 248 с.

Статья поступила в редакцию 29.01.2007

Владимир Васильевич Сюзев родился в 1946 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1970 г. Д-р техн. наук, заведующий кафедрой “Компьютерные системы и сети” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 140 научных и методических работ в области методов и алгоритмов цифровой обработки сигналов.

V.V. Syuzev (b. 1946) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1970. D. Sc. (Eng.), head of “Computer Systems and Networks” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 140 publications in the field of methods and algorithms of digital signal processing.