

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА И КОЭФФИЦИЕНТЫ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ В СФЕРИЧЕСКОМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОДВЕСЕ

*Рассмотрены вопросы силообразования в электростатическом подвесе с ротором сферической формы. Для вычисления пондеромоторных сил через коэффициенты электростатической индукции предварительно находилось распределение потенциала в функции угловых и линейных смещений ротора. Получены аналитические выражения коэффициентов электростатической индукции для подвесов с электродами в виде сферических сегментов и сферических треугольников.*

Подвес, предназначенный для взвешивания и центрирования тела сферической формы и имеющий систему электродов в виде частей сферической поверхности, называется сферическим. Известно несколько типов электродов, образованных путем выделения на сферическом корпусе металлизированных участков, число которых определяется системой подвеса. Практическое применение получили электроды в виде сферических сегментов в трехосном подвесе и электроды в виде правильных сферических треугольников в четырехосном подвесе.

На рис. 1 и 2 даны условные схемы конструкций подвесов, которые содержат подвижную часть — ротор, шесть электродов в виде сегментов и восемь электродов в виде сферических треугольников соответственно. В принятой модели межэлектродные промежутки, располага-

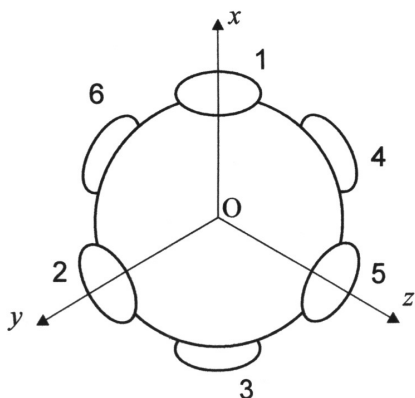


Рис. 1. Условная схема 1 конструкции подвеса

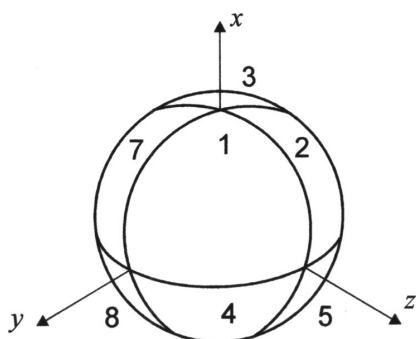


Рис. 1. Условная схема 2 конструкции подвеса

ющиеся на одной с электродами поверхности, также металлизированы и объединены в один электрод, который назовем внешним проводящим экраном. Экран изолирован от остальных электродов и его потенциал в дальнейшем принимаем равным нулю. Присвоим ротору индекс  $i = 0$ , электродам в виде сферических сегментов  $i = 1, \dots, 6$ , экрану  $i = 7$ . Для четырехосного подвеса электроды пронумеруем индексами  $i = 1, \dots, 8$ , а экран  $i = 9$ .

Как известно [1], сила, действующая на твердое тело в электростатическом поле, представляется в виде

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \varphi_i \varphi_j \nabla C_{ij},$$

где  $n$  — количество проводников;  $C_{ij}$  — коэффициенты электростатической индукции, которые связывают заряды тел  $q_i$  с их потенциалами  $\varphi_i$ :

$$q_j = \sum_{i=0}^n C_{ij} \varphi_i, \quad j = 0, \dots, n. \quad (1)$$

Коэффициенты электростатической индукции  $C_{ij}$  имеют размерность емкости и именуется в дальнейшем собственными при  $i = j$  и взаимными при  $i \neq j$ . Они зависят от геометрических размеров проводников (электродов, ротора, экрана) и их взаимного расположения, а следовательно, являются функциями смещения ротора из центра подвеса.

Анализ уравнений (1) показывает, что взаимный емкостный коэффициент  $C_{ij}$  можно определить как заряд, индуцированный на  $j$ -м проводнике, когда  $i$ -й проводник находится под единичным потенциалом, а все остальные проводники заземлены. Если рассматривать потенциалы на проводниках как граничные условия внутренней краевой задачи Дирихле, то распределение потенциала в подвесе может быть найдено из уравнения Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

при условии  $\varphi_i = 1$ ,  $\varphi_j = 0$ ,  $j = 0, \dots, n$ ,  $i \neq j$ , а коэффициент  $C_{ij}$  может быть определен путем применения закона Гаусса

$$C_{ij} = \frac{q_j}{\varphi_i} = -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\varphi_i} \int_{S_j} \nabla \varphi \cdot \bar{n} \cdot d\bar{S} \quad (2)$$

при  $\varphi_i = 1$ ,  $\varphi_j = 0$ ,  $j = 0, \dots, n$ ,  $i \neq j$ , где  $S_j$  — поверхность  $j$ -го проводника;  $\nabla \varphi$  — градиент потенциала в подвесе;  $\bar{n}$  — нормаль в каждой точке поверхности  $S_j$ .

При  $i = j$  поверхностный интеграл (2) дает собственный коэффициент  $C_{ij}$ .

Используя свойства суперпозиции потенциального поля, можно построить структуру полей, соответствующих случаям, когда только один из электродов несет единичный потенциал, а все остальные обнулены. Такое расчленение задачи позволяет последовательно решить вопрос о распределении потенциала для каждого случая и найти все коэффициенты  $C_{ij}$ . Учитывая свойство взаимности  $C_{ij} = C_{ji}$  и симметрию конструкций подвесов, а также используя преобразования координат, достаточно рассмотреть ограниченное число вариантов.

Уравнения (1) являются по существу электрической моделью системы заряженных проводников, размещенных определенным образом и организованных в электростатический подвес.

Для расчета поля в промежутке ротор–камера введем правую прямоугольную систему координат  $oxyz$  (рис. 3), начало которой совпадает с геометрическим центром камеры, а также сферическую систему координат  $or\varphi\theta$ . Обозначим  $a$ ,  $b$  – радиус ротора и камеры соответственно;  $h = b - a$  – зазор между камерой и ротором при центральном положении ротора;  $O$ ,  $O_1$  – геометрический центр камеры и ротора соответственно;  $d$  – смещение центра ротора;  $\Theta_0$ ,  $\varphi_0$  – угловые координаты, задающие направление смещения центра ротора.

Азимутальный угол  $\varphi$  отсчитывается против часовой стрелки в горизонтальной плоскости от проекции на эту плоскость линии центров  $O - O_1$ .

Если обозначить  $S_1$  – поверхность электрода Э1,  $S_0$  – поверхность ротора, а  $S/S_1$  – поверхность всех электродов вместе с экраном

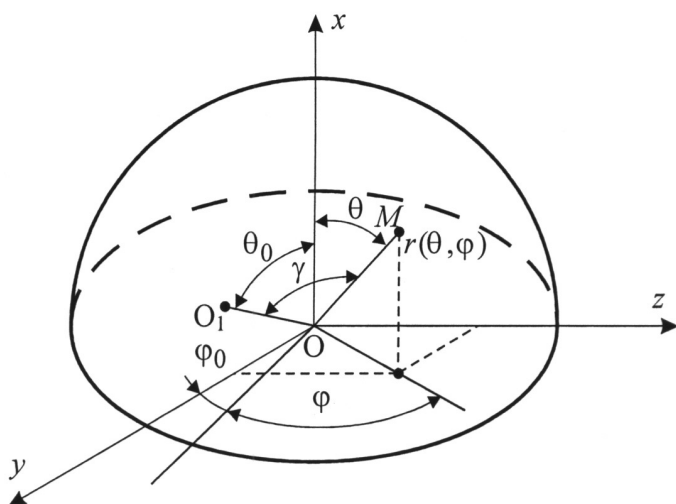


Рис. 3. Принятая система координат

за вычетом поверхности электрода Э1, то задачу о распределении потенциала можно сформулировать следующим образом:

$$\nabla^2 \varphi(G) = 0, \quad \varphi(S_1) = 1, \quad \varphi(S/S_1) = 0, \quad \varphi(S_0) = 0, \quad (3)$$

где  $G$  — область, заключенная между поверхностями  $S_0$  и  $S$ .

Для электродов в форме сферических сегментов задача (3) запишется так:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi(G) &= 0; \\ \varphi(S_1) &= 1, \quad S_1 : r = b, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \theta^*; \\ \varphi(S/S_1) &= 0, \quad S/S_1 : r = b, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad \theta^* \leq \theta \leq \pi; \\ \varphi(S_0) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Постановка задачи для четырехосного подвеса с электродами треугольной формы имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi(G) &= 0; \\ \varphi(S_1) &= 1, \quad S_1 : r = b, \quad -\varphi_0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} - \varphi_0, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; \\ \varphi(S/S_1) &= 0, \quad S/S_1 : \begin{cases} r = b, \quad \frac{\pi}{2} - \varphi_0 \leq \varphi \leq 2\pi - \varphi_0, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ r = b, \quad -\varphi_0 \leq \varphi \leq 2\pi - \varphi_0, \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi; \end{cases} \quad (5) \\ \varphi(S_0) &= 0. \end{aligned}$$

Как видно из уравнений (4) и (5), граничные условия на поверхности  $S$  полностью определены. При нахождении же граничных условий на поверхности  $S_0$ , когда ротор совершает поступательные перемещения, возникает необходимость построения уравнения поверхности  $S_0$  при смещениях.

Радиус-вектор  $r(S_0, \theta, \varphi)$  (отрезок  $OM$ , см. рис. 3) связан с радиусом ротора  $a$  и смещением  $d$  (отрезок  $OO_1$ ) уравнением, следующим из теоремы косинусов для треугольника  $OO_1M$ :

$$a^2 = r^2(S_0, \theta, \varphi) + d^2 - 2dr(S_0, \theta, \varphi) \cos \gamma, \quad (6)$$

где  $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos \varphi$ .

Решая уравнение (6) относительно  $r(S_0, \theta, \varphi)$ , получаем

$$r(S_0, \theta, \varphi) = a \left[ 1 + \frac{d}{a} \cos \gamma - \frac{1}{2} \left( \frac{d}{a} \right)^2 + O \left( \frac{d}{a} \right)^3 \right]. \quad (7)$$

Особенностью задачи в постановке (4)–(5) является поиск аналитического решения в условиях, когда координаты  $S_0$  зависят от смещения  $d$ , а граничные условия на поверхности  $S_0$  должны быть инвариантны к смещениям.

Если перемещения ротора малы, то можно, основываясь на методах теории возмущений [2], аппроксимировать решение задачи о распределении потенциала асимптотическим рядом по степеням параметров перемещения:

$$\varphi(r, \theta, \varphi) = \varphi^{(0)}(r, \theta, \varphi) + \varphi_d^{(1)}(r, \theta, \varphi)d + \varphi_d^{(2)}(r, \theta, \varphi)d^2, \quad (8)$$

где  $\varphi^{(0)}$  — потенциал нулевого порядка, соответствующий несмещенному положению ротора;  $\varphi_d^{(1)}$  — возмущенный потенциал первого порядка;  $\varphi_d^{(2)}$  — возмущенный потенциал второго порядка.

В разложении (8) сохраним члены не выше второго порядка из-за малости перемещений. Подставляя выражение (8) в уравнения (4) и (5), получим

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi^{(k)} &= 0; \quad k = 0, 1, 2; \\ \varphi^{(0)}(S_1) &= 1, \quad \varphi^{(0)}(S/S_1) = 0; \\ \varphi^{(n)}(S) &= 0; \quad n = 1, 2. \end{aligned} \quad (9)$$

Чтобы найти недостающие граничные условия для всех возмущенных потенциалов на поверхности  $S_0$ , примем малые перемещения ротора как возмущения его несмещенной (базовой) поверхности при  $r = a$ . Разложим потенциал на границе поверхности  $S_0$  в ряд Тейлора по степеням отклонения этой поверхности от базовой:

$$\begin{aligned} \varphi(S_0) &= \varphi(a, \theta, \varphi) + \frac{\partial \varphi(a, \theta, \varphi)}{\partial r} [r(S_0, \theta, \varphi) - a] + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi(a, \theta, \varphi)}{\partial r^2} [r(S_0, \theta, \varphi) - a]^2 + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя выражение (10) в соотношения (7) и (8) и учитывая инвариантность потенциала на поверхности ротора при любых смещениях, т.е.  $\varphi(S_0) = 0$ , находим граничные условия на поверхности  $r = a$  для возмущенных потенциалов каждого порядка путем приравнивания членов при одинаковых степенях перемещения:

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)}(a, \theta, \varphi) &= 0; \\ \varphi^{(1)}(a, \theta, \varphi) &= -\frac{\partial \varphi^{(0)}(a, \theta, \varphi)}{\partial r} \cos \gamma; \\ \varphi_d^{(2)}(a, \theta, \varphi) &= \frac{1}{2a} \frac{\partial \varphi^{(0)}(a, \theta, \varphi)}{\partial r} \sin^2 \gamma - \\ &- \frac{\partial \varphi^{(1)}(a, \theta, \varphi)}{\partial r} \cos \gamma - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi^{(0)}(a, \theta, \varphi)}{\partial r^2} \cos^2 \gamma. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнения (11) и (9) полностью определяют граничные условия для потенциалов  $\varphi^{(0)}$ ,  $\varphi^{(1)}$ ,  $\varphi^{(2)}$  на поверхностях  $S_0$ ,  $S$ , и  $S_1$ .

Общее решение уравнения Лапласа получим методом разделения переменных:

$$\varphi(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \left( \tilde{A}_{mn} r^n + \tilde{B}_{mn} / r^{n+1} \right) \cos m\varphi + \left( \tilde{C}_{mn} r^n + \tilde{D}_{mn} / r^{n+1} \right) \sin m\varphi \right] P_n^m(\cos \theta),$$

где  $\tilde{A}_{mn}, \tilde{B}_{mn}, \tilde{C}_{mn}, \tilde{D}_{mn}$  — константы, определяемые из граничных условий;  $P_n^m(\cos \theta)$  — присоединенные полиномы Лежандра.

Решение для потенциала нулевого порядка в конструкции с треугольными электродами запишем в форме

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)}(r, \theta, \varphi) &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} R_n^{(0)}(r) (A_{mn}^{(0)} \cos m\varphi + C_{mn}^{(0)} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta); \\ R_n^{(0)}(r) &= \frac{(r^{2n+1} - a^{2n+1}) b^{n+1}}{r^{n+1} (b^{2n+1} - a^{2n+1})}; \\ A_{mn}^{(0)} &= \frac{L_{mn} (n-m)!}{\pi \varepsilon (n+m)!}; \quad C_{mn}^{(0)} = \frac{K_{mn} (n-m)!}{\pi \varepsilon (n+m)!}; \\ L_{mn} &= \int_0^{\pi/2} \int_{-\varphi_0}^{\pi/2 - \varphi_0} P_n^m(\cos \theta) \sin \theta \cos m\varphi d\varphi d\theta; \\ K_{mn} &= \int_0^{\pi/2} \int_{-\varphi_0}^{\pi/2 - \varphi_0} P_n^m(\cos \theta) \sin \theta \sin m\varphi d\varphi d\theta; \\ \varepsilon &= \begin{cases} 2, & m = 0, \\ 1, & m \neq 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{12}$$

где  $A_{mn}^{(0)}, C_{mn}^{(0)}$  — коэффициенты разложения, полученные из граничных условий с использованием свойств ортогональности сферических гармоник, а для потенциала нулевого порядка в конструкции с электродами — в виде сферических сегментов

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)}(r, \theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} R_n^{(0)}(r) A_n^{(0)} P_n(\cos \theta), \\ A_n^{(0)} &= \int_0^{\theta^*} P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \end{aligned} \tag{13}$$

Решения для возмущенных потенциалов с учетом нулевых граничных условий на поверхности  $S$  в конструкции с треугольными электродами получим в форме

$$\begin{aligned} \varphi^{(k)}(r, \theta, \varphi) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} R_n^{(1)}(r) (A_{mn}^{(k)} \cos m\varphi + C_{mn}^{(k)} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta); \end{aligned} \quad (14)$$

$$R_n^{(1)}(r) = \frac{(r^{2n+1} - b^{2n+1}) a^{n+1}}{2r^{n+1} (a^{2n+1} - b^{2n+1})}; \quad k = 1, 2,$$

а для конструкции с электродами в виде сегментов

$$\varphi^{(k)}(r, \theta, \varphi) = \sum_{m=0}^k \sum_{n=m}^{\infty} R_n^{(1)}(r) A_{mn}^{(k)} P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi, \quad k = 1, 2. \quad (15)$$

Коэффициенты  $A_{mn}^{(k)}$ ,  $C_{mn}^{(k)}$  можно найти из граничных условий для соответствующих потенциалов на поверхности  $S_0$  (11), используя свойство ортогональности сферических гармоник.

Таким образом, выражения (11)–(15) позволяют полностью определить распределение потенциала и являются основой для вычисления коэффициентов электростатической индукции (КЭСИ) сферического подвеса.

Вычислим КЭСИ для подвеса с треугольными электродами.

Взаимный емкостный коэффициент  $C_{10}$  определяется из закона Гаусса как заряд, индуцированный на поверхности ротора в условиях, когда  $\varphi_1 = 1$ , а все остальные потенциалы  $\varphi_i = 0$ ,  $i = 0, 2, \dots, 9$ .

Из выражения (2) следует, что

$$C_{10} = -\varepsilon_0 \varepsilon \int_{S_0} \nabla \varphi \cdot \bar{n} \cdot d\bar{S}. \quad (16)$$

Воспользуемся выражением (8) для вычисления в формуле (16) градиента потенциала

$$C_{10} = -\varepsilon_0 \varepsilon \int_{S_0} \frac{\partial}{\partial r} (\varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} d + \varphi^{(2)} d^2) \cdot \bar{n} \cdot d\bar{S}. \quad (17)$$

Для определения коэффициента  $C_{10}$  интегрирование проводим по сфере диаметром  $r = a + d$ , которая полностью охватывает смещенную поверхность сферического ротора.

Интегрируем выражение (17), используя распределение (12) и (14). Предварительно отметим, что, в силу симметричного расположения электрода Э1 относительно координатных осей, вклады от перемещения ротора вдоль какой-либо оси в выражение  $C_{10}$  и от перемещения

вдоль любой другой оси должны быть одинаковы:

$$\begin{aligned}
 C_{10} &= C_{10}^{(0)} + C_{10}^{\bar{x}}(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}) + \\
 &\quad + C_{10}^{\bar{x}^2}(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2) + C_{10}^{\bar{x}\bar{y}}(\bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{z} + \bar{y}\bar{z}); \\
 C_{10}^{(0)} &= -\varepsilon_0 \varepsilon \pi b H_0; \quad C_{10}^{\bar{x}} = \frac{3}{2} \varepsilon_0 \varepsilon \pi h \left(1 + \frac{a}{2h}\right) \frac{\alpha}{\alpha^3 - 1}, \quad \alpha = \frac{a}{b}; \\
 C_{10}^{\bar{x}^2} &= \frac{4}{3} \pi \varepsilon_0 \varepsilon a^2 k_0 F_0 \left(k_1 - \frac{1}{a}\right) h^2; \\
 C_{10}^{\bar{x}\bar{y}} &= \frac{4}{15} \pi \varepsilon_0 \varepsilon a^2 F_2 \left(\frac{4k_1}{\pi} - \frac{1}{a}\right) h^2,
 \end{aligned} \tag{18}$$

$$k_n = \frac{1}{a} \left( n + 1 - \frac{2n + 1}{2} \frac{\alpha^{2n+1}}{\alpha^{2n+1} - 1} \right);$$

$$F_n = \frac{(2n + 1)^2}{2a} \frac{\alpha^n}{\alpha^{2n+1} - 1};$$

$$\bar{x} = d \cos \theta_0 / h; \quad \bar{y} = d \sin \theta_0 \cos \varphi_0 / h; \quad \bar{z} = d \sin \theta_0 \sin \varphi_0 / h.$$

При вычислении коэффициента  $C_{11}$  интегрирование ведем по внутренней поверхности электрода Э1:

$$C_{11} = -\varepsilon_0 \varepsilon \int_{S_{1\text{внутр}}} \frac{\partial}{\partial r} \left( \varphi^{(0)} + \varphi_d^{(1)} d + \varphi_d^{(2)} d^2 \right) \cdot \bar{n} \cdot d\bar{S}$$

Структура КЭСИ  $C_{11}$  аналогична структуре  $C_{10}$ , однако в отличие от последнего  $C_{11}$  представляется не в замкнутой форме, а в виде ряда

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= -\varepsilon_0 \varepsilon b^2 \int_0^{\pi/2} \int_{-\varphi_0}^{\pi/2 - \varphi_0} \left( \frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial r} + d \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial r} + d^2 \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial r} \right) \Big|_{r=b} \sin \theta d\varphi d\theta = \\
 &= \varepsilon_0 \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} b H_n \left( A_{mn}^{(0)} L_{mn} + C_{mn}^{(0)} K_{mn} \right) + \\
 &\quad + N_n \left( A_{mn}^{(1)} L_{mn} + C_{mn}^{(1)} K_{mn} \right) d + N_n \left( A_{mn}^{(2)} L_{mn} + C_{mn}^{(2)} K_{mn} \right) d^2, \\
 H_n &= \frac{2n + 1}{2} \frac{nb^{2n+1} + (n + 1)a^{2n+1}}{b^{2n+1} - a^{2n+1}}; \quad N_n = \frac{2n + 1}{2} \frac{a^{n+1}b^{n+1}}{a^{2n+1} - b^{2n+1}}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Очевидно, что коэффициенты  $C_{11}^{(0)}$ ,  $C_{11}^{\bar{x}}$ , ... также будут рядами по  $n$  и  $m$ . Поскольку в формуле (19) коэффициенты  $A_{mn}^{(1)}$  и  $C_{mn}^{(1)}$  зависят от  $A_{mn}^{(0)}$  и  $C_{mn}^{(0)}$ , а коэффициенты  $A_{mn}^{(2)}$  и  $C_{mn}^{(2)}$  — от всех предыдущих, то



поиск общих членов рядов для  $C_{11}^{(0)}$ ,  $C_{11}^{\bar{x}}$ , ... затруднителен, если вообще возможен. Поэтому при вычислениях ограничиваются конечным числом  $n$  и  $m$ , причем с увеличением их порядкового числа резко возрастает количество вычислительных операций. В силу громоздкости выражений, приведем лишь структуры коэффициентов электростатической индукции подвеса с электродами в виде сферических треугольников:

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= C_{11}^{(0)} + C_{11}^{\bar{x}}(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}) + \\
 &\quad + C_{11}^{\bar{x}^2}(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2) + C_{11}^{\bar{x}\bar{y}}(\bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{z} + \bar{y}\bar{z}); \\
 C_{12} &= C_{12}^{(0)} + C_{12}^{\bar{x}}(\bar{x} + \bar{z}) + C_{12}^{\bar{y}}\bar{y} + C_{12}^{\bar{x}^2}(\bar{x}^2 + \bar{z}^2) + \\
 &\quad + C_{12}^{\bar{y}^2}\bar{y}^2 + C_{12}^{\bar{x}\bar{y}}(\bar{x}\bar{y} + \bar{y}\bar{z}) + C_{12}^{\bar{x}\bar{z}}\bar{x}\bar{z}; \\
 C_{13} &= C_{13}^{(0)} + C_{13}^{\bar{x}} \cdot \bar{x} + C_{13}^{\bar{y}}(\bar{y} + \bar{z}) + C_{13}^{\bar{x}^2}\bar{x}^2 + C_{13}^{\bar{y}^2}(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) + \\
 &\quad + C_{13}^{\bar{x}\bar{y}}(\bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{z}) + C_{13}^{\bar{y}\bar{z}}\bar{y}\bar{z}; \\
 C_{16} &= C_{16}^{(0)} + C_{16}^{\bar{x}}(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}) + \\
 &\quad + C_{16}^{\bar{x}^2}(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2) + C_{16}^{\bar{x}\bar{y}}(\bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{z} + \bar{y}\bar{z}).
 \end{aligned} \tag{20}$$

Вычислим КЭСИ для сферического подвеса с электродами в виде сферических сегментов. В отличие от предыдущего случая удастся найти общие члены рядов, которыми представляются базовые коэффициенты КЭСИ:

$$\begin{aligned}
 C_{10} &= -\varepsilon_0\varepsilon(a+d)^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial\varphi^{(0)}}{\partial r} + d \frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial r} + d^2 \frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial r} \right) \Big|_{r=a+d} \sin\theta d\varphi d\theta = \\
 &= C_{10}^{(0)} + C_{10}^{\bar{x}}\bar{x} + C_{10}^{\bar{x}^2}\bar{x}^2 + C_{10}^{\bar{y}^2+\bar{z}^2}(\bar{y}^2 + \bar{z}^2),
 \end{aligned}$$

где  $\varphi^{(0)}$ ,  $\varphi^{(1)}$ ,  $\varphi^{(2)}$  — потенциалы, полученные в формулах (13), (15),

$$C_{10}^{(0)} = -\varepsilon_0\varepsilon b \frac{2\pi\alpha}{1-\alpha} A_0^{(0)}; \quad C_{10}^{\bar{x}} = 3\varepsilon_0\varepsilon h \frac{A_1^{(0)}}{A_0^{(0)}};$$

$$C_{10}^{\bar{x}^2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon h^2}{b(1-\alpha^3)} \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + 5 \frac{A_2^{(0)}}{A_0^{(0)}} \frac{1+\alpha^3}{1-\alpha^5} \right);$$

$$C_{10}^{\bar{y}^2+\bar{z}^2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon h^2}{b(1-\alpha^3)} \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} - \frac{5}{2} \frac{A_2^{(0)}}{A_0^{(0)}} \frac{1+\alpha^3}{1-\alpha^5} \right).$$

$$C_{11} = C_{11}^{(0)} + C_{11}^{\bar{x}} \bar{x} + C_{11}^{\bar{x}^2} \bar{x}^2 + C_{11}^{\bar{y}^2 + \bar{z}^2} (\bar{y}^2 + \bar{z}^2);$$

$$C_{11}^{\bar{x}} = -2\pi\varepsilon_0\epsilon bh \sum_{n=0}^{\infty} W_n D_{0n}^{(1)} A_n^{(0)}, \quad W_n = \frac{(2n+1)\alpha^{n+1}}{1-\alpha^{2n+1}};$$

$$D_{0n}^{(1)} = \frac{(2n+1)(2n+3)}{2b} \frac{A_{n+1}^{(0)}}{\alpha^{n+3} - \alpha^{-n}} + \frac{n(2n-1)}{2b} \frac{A_{n-1}^{(0)}}{\alpha^{n+1} - \alpha^{2-n}};$$

$$C_{11}^{\bar{x}^2} = -2\pi\varepsilon_0\epsilon bh^2 \sum_{n=0}^{\infty} W_n E_{0n}^{(2)} A_n^{(0)},$$

$$E_{0n}^{(2)} = \frac{1}{4b^2} \left\{ \frac{n(n-1)(2n-3)}{\alpha^{n+1} - \alpha^{4-n}} \beta_{2n-1} A_{n-2}^{(0)} + \right. \\ \left. + \frac{2n+1}{\alpha^{n+3} - \alpha^{2-n}} \left[ (n+1)^2 \beta_{2n+3} + n^2 \beta_{2n-1} - (2n+1) \right] A_n^{(0)} + \right. \\ \left. + \frac{(n+1)(n+2)(2n+5)}{\alpha^{n+5} - \alpha^{-n}} \beta_{2n+3} A_{n+2}^{(0)} \right\};$$

$$C_{11}^{\bar{y}^2 + \bar{z}^2} = -2\pi\varepsilon_0\epsilon bh^2 \sum_{n=0}^{\infty} W_n F_{0n}^{(2)} A_n^{(0)}, \quad \beta_n = \frac{1+\alpha^n}{1-\alpha^n};$$

$$F_{0n}^{(2)} = \frac{1}{8b^2} \left\{ \frac{n(n-1)(2n-3)}{\alpha^{4-n} - \alpha^{n+1}} \beta_{2n-1} A_{n-2}^{(0)} + \right. \\ \left. + \frac{2n+1}{\alpha^{n+3} - \alpha^{2-n}} \left[ (n+1)^2 \beta_{2n+3} + \frac{2(n+1)}{1-\alpha^{2n+3}} + \right. \right. \\ \left. \left. + n^2 \beta_{2n-1} + \frac{2n}{1-\alpha^{1-2n}} - 3(2n+1) \right] A_n^{(0)} + \right. \\ \left. + \frac{(n+1)(n+2)(2n+5)}{\alpha^{-n} - \alpha^{n+5}} \beta_{2n+3} A_{n+2}^{(0)} \right\}.$$

$$C_{12} = C_{12}^{(0)} + C_{12}^{\bar{x} + \bar{y}} (\bar{x} + \bar{y}) + C_{12}^{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) +$$

$$+ C_{12}^{\bar{z}^2} \bar{z}^2 + C_{12}^{\bar{x}\bar{y}} \bar{x}\bar{y}; \quad C_{12}^{\bar{x} + \bar{y}} = -\varepsilon_0\epsilon bh \sum_{n=0}^{\infty} W_n D_{0n}^{(1)} I(0, n),$$

$$I(m, n) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} P_n^m(\cos\theta) \cos m\varphi \sin\theta d\varphi d\theta; \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2} - \theta^*; \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} + \theta^*;$$

$$\varphi_1 = \varphi_0 - \arccos\left(\frac{\cos\theta^*}{\sin\theta}\right); \quad \varphi_2 = \varphi_0 + \arccos\left(\frac{\cos\theta^*}{\sin\theta}\right);$$

$$C_{12}^{\bar{x}^2+\bar{y}^2} = -\varepsilon_0 \varepsilon b h^2 \sum_{n=0}^{\infty} W_n E_{0n}^{(2)} I(0, n);$$

$$C_{12}^{\bar{z}^2} = -\varepsilon_0 \varepsilon b h^2 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} W_n F_{0n}^{(2)} I(0, n) - \sum_{n=0}^{\infty} W_n D_{2n}^{(2)} I(2, n) \right\};$$

$$C_{12}^{\bar{x}\bar{y}} = -\varepsilon_0 \varepsilon b h^2 \sum_{n=0}^{\infty} W_n D_{1n}^{(2)} I(1, n),$$

$$D_{2n}^{(2)} = \frac{1}{8b^2} \left\{ \frac{(2n-3)}{\alpha^{n+1} - \alpha^{2-n}} \beta_{2n-1} A_{n-2}^{(0)} + \frac{2(2n+1)}{\alpha^{2-n} - \alpha^{n+3}} \left( \frac{1}{1 - \alpha^{2n+3}} + \frac{1}{\alpha^{1-2n} - 1} \right) A_n^{(0)} - \frac{(2n+5)}{\alpha^{n+5} - \alpha^{-n}} \beta_{2n+3} A_{n+2}^{(0)} \right\};$$

$$D_{1n}^{(2)} = \frac{1}{2b^2} \left\{ \frac{(n-1)(2n-3)}{\alpha^{4-n} - \alpha^{n+1}} \beta_{2n-1} A_{n-2}^{(0)} + \frac{(2n+1)}{\alpha^{2-n} - \alpha^{n+3}} \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{1}{1 - \alpha^{2n+3}} + \frac{1}{\alpha^{1-2n} - 1} \right) A_n^{(0)} - \frac{(2n+5)(n+2)}{\alpha^{n+5} - \alpha^{-n}} \beta_{2n+3} A_{n+2}^{(0)} \right\}.$$

$$C_{13} = C_{13}^{(0)} + C_{13}^{\bar{x}^2} \bar{x}^2 + C_{13}^{\bar{y}^2+\bar{z}^2} (\bar{y}^2 + \bar{z}^2);$$

$$C_{13}^{\bar{x}^2} = 2\pi \varepsilon_0 \varepsilon b h^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n W_n E_{0n}^{(2)} A_n^{(0)};$$

$$C_{13}^{\bar{y}^2+\bar{z}^2} = -2\pi \varepsilon_0 \varepsilon b h^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n W_n F_{0n}^{(2)} A_n^{(0)}.$$

Для определения собственного КЭСИ  $C_{00}$  необходимо найти распределение потенциала в случае, когда потенциал ротора равен единице, а все остальные проводники заземлены. Распределение потенциала  $\tilde{\varphi}(r, \theta, \varphi)$ , соответствующее этим граничным условиям, можно получить, используя соотношение

$$\tilde{\varphi}(r, \theta, \varphi) = 1 - \hat{\varphi}(r, \theta, \varphi),$$

где  $\hat{\varphi}(r, \varphi, z)$  — распределение потенциала, аналогичное выражениям

(8) и (10), но при угловом размере электрода  $\theta^* = \pi$ . В этом случае

$$C_{00} = C_{00}^{(0)} + C_{00}^{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2} (\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2); \quad C_{00}^{(0)} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon b\alpha}{1 - \alpha};$$

$$C_{00}^{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon h^2\alpha^2}{b(1 - \alpha)^2(1 - \alpha^3)}.$$

В некоторых выражениях КЭСИ не раскрыты их постоянные составляющие, так как они не вносят вклад в силовые характеристики подвеса со сферическим ротором.

Полученные выражения коэффициентов электростатической индукции являются базовыми для построения матрицы КЭСИ сферического подвеса.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Т а м м И. Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1966.
2. К о у л Д ж. Методы теории возмущений в прикладной математике: Пер. с англ. – М.: Мир, 1972.

Статья поступила в редакцию 18.09.2006

Сергей Александрович Васюков родился в 1958 г., окончил в 1981 г. МВТУ им. Н.Э. Баумана. Канд. техн. наук, доцент кафедры “Электротехника и промышленная электроника” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 32 научных работ в области электростатических подвесов и датчиков автосигнализаций.

S.A. Vasyukov (b. 1958) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1981. Ph. D. (Eng.), assoc. professor of “Electrical Engineering and Industrial Electronics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 32 publications in the field of electrostatic suspension and sensor of automobile signaling system.

Георгий Федорович Дробышев родился в 1933 г., окончил в 1957 г. Московский энергетический институт. Д-р техн. наук, профессор кафедры “Электротехника и промышленная электроника” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 80 научных работ в области расчета электростатических гироскопов и акселерометров, физики полупроводниковых приборов.

G.F. Drobyshev (b.1933) graduated from the Moscow Institute for Power Engineering in 1957. D. Sc. (Eng.), professor of “Electrical Engineering and Industrial Electronics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 80 publications in the field of design of electrostatic gyroscopes and accelerometers, physics of semiconductor instruments.