УДК 517.925.42

А. Н. Канатников

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ИНВАРИАНТНЫХ КОМПАКТОВ ПРТ-СИСТЕМЫ

Метод локализации инвариантных компактных множеств автономной динамической системы применяется для исследования динамической системы Пиковского–Рабиновича–Трахтенгерца. В результате получено однопараметрическое семейство локализирующих множеств, ограниченных поверхностями 2-го порядка, а также найдено пересечение всех множеств найденного семейства. Результаты получены для всех значений параметров системы.

Динамическая система Пиковского–Рабиновича–Трахтенгерца (ПРТ-система)

$$\begin{cases} \dot{x} = -\nu_1 x + \beta y - yz, \\ \dot{y} = \beta x - \nu_2 y + xz, \\ \dot{z} = -\nu_3 z + xy, \end{cases}$$

где ν_1, ν_2, ν_3, β — положительные числовые параметры, была получена как модель волновых процессов, протекающих в плазме [1, 5]. Эта система имеет стационарную точку $x = y = z = 0$, а при $\beta > \sqrt{\nu_1\nu_2}$ у нее появляются еще две стационарные точки:

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{\nu_3}{\nu_1}\sqrt{\beta^2 - \nu_1\nu_2}\big(\beta - \sqrt{\beta^2 - \nu_1\nu_2}\big)}, \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{\nu_3}{\nu_2}\sqrt{\beta^2 - \nu_1\nu_2}\big(\beta + \sqrt{\beta^2 - \nu_1\nu_2}\big)}, \\ z = \sqrt{\beta^2 - \nu_1\nu_2}. \end{cases}$$

При $\beta^2 < \nu_1\nu_2$ нулевая стационарная точка является асимптотически (даже экспоненциально) устойчивой. Устойчивость теряется при появлении двух дополнительных стационарных точек. Наличие трех точек покоя приводит к сложному поведению системы, возникает хаотическое движение. Это приводит к задаче локализации возможных периодических траекторий и других инвариантных компактных множеств.

Для оценки положения инвариантных компактов используют разные методы (включая меоды оценки положения хаотических аттракторов) [2]–[6]. Один из методов, предложенный А.П. Крищенко [4], среди других выделяется тем, что практически не использует геометрических соображений и сводится к алгебраическим вычислениям. Суть его в следующем.

Для автономной динамической системы $\dot{x} = f(x)$ выбирается какая-либо гладкая функция φ (локализирующая функция), определенная на фазовом пространстве M динамической системы, вычисляется ее производная $L_f\varphi$ в силу системы (производная Ли по векторному полю, соответствующему динамической системе) и строится множество

$$S_\varphi = \{x \in M \colon L_f\varphi(x) = 0\}$$

(универсальное сечение).

Пусть $\varphi_{\inf}$ и $\varphi_{\sup}$ — точная нижняя и точная верхняя грани функции φ на множестве S_φ. Тогда все инвариантные компакты динамической системы принадлежат множеству

$$\Omega_\varphi = \{x \in M \colon \varphi_{\inf} \leq \varphi(x) \leq \varphi_{\sup}\}.$$

Этот метод, основанный на элементарных соображениях, может быть развит в различных направлениях. Например, можно выбрать некоторое семейство функций φ_α и для каждой функции φ_α построить свое локализирующее множество Ω_{φ_α}. Тогда все инвариантные компактные множества будут содержаться в пересечении $\Omega = \bigcap\limits_{\alpha} \Omega_{\varphi_\alpha}$. Здесь удобно выбирать семейства, непрерывно зависящие от параметра, например однопараметрические семейства $\varphi(x, \alpha)$. Для таких семейств имеются эффективные процедуры построения пересечения семейства множеств.

Для локализации инвариантных компактов ПРТ-системы будем рассматривать квадратичную функцию вида

$$p(x, y, z) = (q + 1)x^2 + qy^2 + \big(z - \beta(2q + 1)\big)^2,$$

где $q \in \mathbb{R}$ — произвольный параметр.

Вычисляя производную Ли $L_f p$ этой функции и приравнивая к нулю, получим множество S_p точек контакта, которое описывается уравнением

$$S_p \colon \quad (q + 1)\nu_1 x^2 + q\nu_2 y^2 + \nu_3 (z - \gamma)^2 = \nu_3 \gamma^2,$$

где $\gamma = \beta\Big(q + \dfrac{1}{2}\Big)$.

В результате мы приходим к задаче определения точной нижней $p_{\inf}$ и точной верхней $p_{\sup}$ граней функции

$$p(x, y, z) = (q + 1)x^2 + qy^2 + (z - 2\gamma)^2$$

при наличии уравнения связи

$$(q + 1)\nu_1 x^2 + q\nu_2 y^2 + \nu_3 (z - \gamma)^2 = \nu_3 \gamma^2.$$

Отметим, что точка $x = y = 0$, $z = 2\gamma$ удовлетворяет уравнению связи. Поэтому в любых ситуациях точная верхняя грань функции будет неотрицательной, а точная нижняя — неположительной.

Найденные значения $p_{\inf}$ и $p_{\sup}$ для каждого q дают локализующее множество

$$\Omega_q = \{(x,\, y\, z)\colon p_{\inf} \leq p(x,\, y,\, z) \leq p_{\sup}\}.$$

В задаче поиска точной верхней и точной нижней граней возникает два случая. При $q > 0$ множество S_p, на котором исследуется функция $p(x, y, z)$, компактно. Поэтому точная верхняя и точная нижняя грани функции $p(x, y, z)$ будут достигаться в точках условного локального экстремума, а для исследования этой функции можно использовать метод Лагранжа. При $q < 0$ множество S_p представляет собой неограниченную поверхность; исследование с помощью метода Лагранжа в данном случае будет недостаточным.

Локализующие множества в случае $q > 0$. При $q > 0$ точка $(0,\, 0,\, 2\gamma)$ есть точка глобального минимума функции $p(x, y, z)$, равного нулю. Эта точка удовлетворяет уравнению связи и в двойном неравенстве $p_{\inf} \leq p(x, y, z) \leq p_{\sup}$, описывающем локализующее множество Ω_q, левую часть можно опустить.

Точную верхнюю грань функции $p(x, y, z)$ на множестве S_p можно найти, сравнивая значения этой функции в стационарных точках функции Лагранжа. Проведя вычисления, получаем $p_{\sup} = 4\rho\gamma^2$, где

$$\rho = \begin{cases} 1, & \nu = \min\{\nu_1; \nu_2\} \geq \dfrac{\nu_3}{2}; \\ \dfrac{\nu_3^2}{4(\nu_3 - \nu)\nu}, & \nu < \dfrac{\nu_3}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, имеем семейство локализующих множеств Ω_q, описываемых неравенством

$$\Omega_q\colon \quad (q+1)x^2 + qy^2 + \bigl(z - \beta(2q+1)\bigr)^2 \leq \rho\beta^2(2q+1)^2, \quad q > 0. \quad (1)$$

Теорема 1. *Квадратное неравенство $Ax^2 + Bx + C \geq 0$, где $A \geq 0$, выполняется для всех значений $x \in (\alpha,\, \beta)$, где $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$, тогда и только тогда, когда коэффициенты A, B и C удовлетворяют какому-либо из трех условий*:

$$1)\ b^2 \leq 4AC; \quad 2) \begin{cases} A\alpha^2 + B\alpha + C \geq 0, \\ 2\alpha A + B \geq 0; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} A\beta^2 + B\beta + C \geq 0, \\ 2\beta A + B \leq 0 \end{cases}$$

(*при $\alpha = -\infty$ опускается вторая группа условий, а при $\beta = +\infty$ — третья*).

Доказательство. На данном интервале $(\alpha,\, \beta)$ функция $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ неотрицательна в трех случаях:

1) минимум параболической функции распроложен выше оси абсцисс (первое условие);

2) минимум параболической функции расположен левее α и значение функции в точке α неотрицательно (вторая группа условий);

3) минимум параболической функции расположен правее β и значение функции в точке β неотрицательно (третья группа условий).

Отметим также, что минимум квадратного трехчлена находится левее α (правее β), если его производная в точке α (точке β) положительна (отрицательна).

Остается рассмотреть особый случай $A = 0$. Но легко убедиться в том, что записанные условия справедливы и в этом случае: линейная функция на интервале (α, β) неотрицательна, если либо значения функции и ее производной в точке α неотрицательны, либо значение функции в точке β неотрицательно, а значение производной в той же точке неположительно. Теорема доказана.

Приведенная теорема позволяет построить пересечение семейства локализующих множеств (1). Все слагаемые в неравенстве (1) перенесем в левую часть и сгруппируем по степеням q:

$$4\beta^2(\rho-1)q^2 + \left[4\beta^2(\rho-1) - x^2 - y^2 + 4\beta z\right]q + \left[\beta^2\rho - x^2 - (z-\beta)^2\right] \geq 0.$$

Необходимо определить те тройки x, y, z, при которых полученное неравенство, квадратное относительно q, верно для всех $q > 0$. В соответствии с *теоремой 1* переменные x, y, z должны удовлетворять условию $B^2 \leq 4AC$ или паре условий $C \geq 0$, $B \geq 0$, где

$$A = 4\beta^2(\rho-1) \geq 0, \quad B = 4\beta^2\rho - x^2 - y^2 + 4\beta z, \quad C = \beta^2\rho - x^2 - (z-\beta)^2.$$

Эти условия сводятся к двум: $C \geq 0$, $B \geq -\sqrt{4AC}$. В результате пересечением семейства множеств (1) является множество $\Omega_{(0,+\infty)}$, описываемое системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 + (z-\beta)^2 \leq \beta^2\rho, \\ y^2 \leq 4\beta\sqrt{(\rho-1)[\beta^2\rho - x^2 - (z-\beta)^2]} - x^2 + 4\beta z + 4\beta^2(\rho-1). \end{cases} \tag{2}$$

Локализующее множество в случае $q = 0$. В этом случае построение локализующего множества сводится к исследованию на экстремум функции $p(x,y,z) = x^2 + (z-\beta)^2$ на множестве $\nu_1 x^2 + \nu_3(z-\gamma)^2 = \nu_3\gamma^2$, где $\gamma = \beta/2$. С некоторыми упрощениями повторяются те же выкладки, что и при $q > 0$. Наименьшее значение $p_{\inf} = 0$ достигается в точке глобального минимума, а $p_{\sup} = 4\rho_0\gamma^2$, где

$$\rho_0 = \begin{cases} 1, & \nu_1 \geq \dfrac{\nu_3}{2}; \\ \tau_1 = \dfrac{\nu_3^2}{4(\nu_3 - \nu_1)\nu_1}, & \nu_1 < \dfrac{\nu_3}{2}. \end{cases}$$

Итак, при $q = 0$ получаем локализующее множество Ω_0, описываемое неравенством

$$\Omega_0\colon \quad x^2 + (z - \beta)^2 \leq \rho_0 \beta^2, \tag{3}$$

что совпадает с неравенством (1) при $q = 0$ и $\rho = \rho_0$.

Локализующие множества в случае $-1 < q < 0$. При $q < 0$ уравнение связи дает неограниченную поверхность, и непосредственно использовать метод Лагранжа нельзя. Здесь удобно свести задачу к двумерной, исключив переменную y с помощью уравнения связи. Из уравнения связи находим

$$\nu_2 y^2 = \frac{1}{q}\bigl(\nu_3\gamma^2 - \nu_3(z-\gamma)^2 - (q+1)\nu_1 x^2\bigr).$$

Исключив эту переменную из выражения для функции p, приходим к задаче определения точных верхней и нижней граней функции двух переменных:

$$p(x, z) = (q+1)\mu_1 x^2 + \mu_3 z^2 - 2\gamma(1+\mu_3)z + 4\gamma^2, \tag{4}$$

где $\mu_1 = 1 - \dfrac{\nu_1}{\nu_2}$, $\mu_3 = 1 - \dfrac{\nu_3}{\nu_2}$ — промежуточные параметры, меньшие единицы, на множестве

$$G_q\colon \quad (q+1)\nu_1 x^2 + \nu_3(z-\gamma)^2 \geq \nu_3\gamma^2. \tag{5}$$

При $-1 < q < 0$ множество G_q представляет собой внешность эллипса. При $q = -1$ задача становится одномерной: требуется найти экстремальные значения функции $p(x,z) = \mu_3 z^2 - 2\gamma(1+\mu_3)z + 4\gamma^2$ на множестве G_{-1}: $|z - \gamma| \geq \gamma$. При $q < -1$ множество G_p ограничено гиперболой. Рассмотрим эти случаи отдельно.

Считая, что $-1 < q < 0$, выполним замену переменных $X = x\sqrt{q+1}$, $Z = z - \gamma$. Тогда задача сводится к исследованию функции

$$p(X, Z) = \mu_1 X^2 + \mu_3 Z^2 - 2\gamma Z + (2 - \mu_3)\gamma^2$$

на множестве

$$\nu_1 X^2 + \nu_3 Z^2 \geq \nu_3 \gamma^2.$$

Диапазон значений функции зависит от знаков при квадратах переменных.

Если $\mu_3 = 0$ (т.е. $\nu_2 = \nu_3$), но $\gamma \neq 0$ (т.е. $q \neq -1/2$), то функция $p(X, Z)$ линейна по Z и ее множество значений — вся числовая ось.

То же будет в случае, когда $\mu_1 < 0$, $\mu_3 > 0$ (т.е. $\nu_1 > \nu_2$, $\nu_2 > \nu_3$) или $\mu_1 > 0$, $\mu_3 < 0$ (т.е. $\nu_1 < \nu_2$, $\nu_2 < \nu_3$). При $\mu_3 = 0$ рассмотрим значение $q = -1/2$. При этом значении $\gamma = 0$, и мы приходим к исследованию функции $p(X, Z) = \mu_1 X^2$ на всем множестве $\mathbb{R}^2$. При $\mu_1 > 0$ (т.е. $\nu_1 < \nu_2$) имеем $p_{\inf} = 0$, $p_{\sup} = +\infty$ и локализующее множество

$$\Omega_{-1/2}\colon x^2 - y^2 + 2z^2 \geq 0. \qquad (6)$$

При $\mu_1 < 0$ (т.е. $\nu_1 > \nu_2$) имеем $p_{\inf} = -\infty$, $p_{\sup} = 0$ и локализующее множество

$$\Omega_{-1/2}\colon x^2 - y^2 + 2z^2 \leq 0. \qquad (7)$$

Наконец, при $\mu_1 = 0$, т.е. в случае $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3$, $p(X, Z) \equiv 0$, и мы приходим к вырожденному локализующему множеству

$$\Omega_{-1/2}\colon x^2 - y^2 + 2z^2 = 0. \qquad (8)$$

Рассмотрим случай $\mu_1 \geq 0$, $\mu_3 > 0$ (т.е. $\nu_1 \leq \nu_2$, $\nu_2 > \nu_3$). В этом случае квадратичная функция имеет положительно определенную (полуопределенную) квадратичную форму и для нее $p_{\sup} = +\infty$. Точка глобального минимума квадратичной функции $X = 0$, $Z = \gamma/\mu_3$ при $|\mu_3| \leq 1$, в частности при $\mu_3 > 0$, попадает в область исследования G_q, и $p_{\inf}$ совпадает с глобальным минимумом функции, равным

$$p_{\inf} = -\frac{(1-\mu_3)^2}{\mu_3}\gamma^2 = -\frac{\nu_3^2\gamma^2}{\nu_2(\nu_2 - \nu_3)} = 4\tau_2\gamma^2,$$

где $\tau_2 = \dfrac{\nu_3^2}{4\nu_2(\nu_3 - \nu_2)} < 0$. Мы имеем локализующие множества

$$\Omega_q\colon\ (q+1)x^2 + qy^2 + \big(z - \beta(2q+1)\big)^2 \geq \tau_2\beta^2(2q+1)^2, \quad -1 < q < 0. \qquad (9)$$

Чтобы найти пересечение семейства множеств (9), как и ранее, собираем коэффициенты при q, сводя неравенство к квадратному относительно q, с положительным коэффициентом при q^2:

$$4\beta^2(1-\tau_2)q^2 + \left[4\beta^2(1-\tau_2) + x^2 + y^2 - 4\beta z\right]q + \\ + \left[-\beta^2\tau_2 + x^2 + (z-\beta)^2\right] \geq 0, \quad -1 < q < 0. \qquad (10)$$

Согласно *теореме 1*, для выполнения неравенства $Ax^2 + Bx + C \geq 0$ на интервале $(-1,\, 0)$ необходимо и достаточно какого-либо из трех условий:

$$1)\ B^2 \leq 4AC; \quad 2)\ \begin{cases} C \geq 0, \\ B \leq 0; \end{cases} \quad 3)\ \begin{cases} A - B + C \geq 0, \\ -2A + B \geq 0. \end{cases}$$

Это эквивалентно следующему ограничению на B сверху:

$$B \le \begin{cases} \sqrt{4AC}, & 0 \le C \le A; \\ A + C, & C \ge A. \end{cases} \qquad (11)$$

Используя условия (11) применительно к (10), получим неравенства, описывающие пересечение $\Omega_{(-1,0)}$ множеств Ω_q, $-1 < q < 0$, в случае $\nu_1 \le \nu_2$, $\nu_2 > \nu_3$:

$$y^2 \le \begin{cases} g_1(\tau_2, x, z), & x^2 + (z-\beta)^2 \le (4 - 3\tau_2)\beta^2; \\ (z+\beta)^2 - \tau_2\beta^2, & x^2 + (z-\beta)^2 > (4 - 3\tau_2)\beta^2. \end{cases} \qquad (12)$$

где

$$g_1(\tau_2, x, z) = 4\beta\sqrt{(1-\tau_2)[x^2 + (z-\beta)^2 - \tau_2\beta^2]} - x^2 + 4\beta z - 4\beta^2(1-\tau_2).$$

В случае $\mu_1 \le 0$, $\mu_3 < 0$ (т.е. $\nu_1 \ge \nu_2$, $\nu_2 < \nu_3$) квадратичная форма в представлении функции $p(X, Z)$ отрицательно определена (полуопределена). Поэтому $p_{\inf} = -\infty$, а максимальное значение конечно. При $\mu_3 \ge -1$ (т.е. при $\nu_2 \ge \nu_3/2$) точка глобального максимума $X = 0$, $Z = \gamma/\mu_3$ попадает в область G_q и $p_{\sup} = 4\tau_2\gamma^2$. Рассмотрим случай $\mu_3 < -1$ (т.е. $\nu_2 < \nu_3/2$). В этом случае максимум функции достигается на границе области, т.е. при $\nu_1 X^2 + \nu_3 Z^2 = \nu_3\gamma^2$. Выразив из этого уравнения X^2 и подставив в выражение для функции, придем к задаче поиска максимума функции $\sigma Z^2 - 2\gamma Z + (2-\sigma)\gamma^2$, где $\sigma = 1 - \nu_3/\nu_1$, при $|Z| \le \gamma$. На концах отрезка функция имеет значения 0 и $4\gamma^2$. Стационарная точка $Z = \gamma/\sigma$ попадает на отрезок $|Z| \le \gamma$ при $|\sigma| \ge 1$, что равносильно $\sigma \le -1$, или $\nu_1 \le \dfrac{\nu_3}{2}$. Таким образом, если $\nu_1 \ge \nu_2$, $\nu_2 < \nu_3$, то $p_{\sup} = 4\rho_1\gamma^2$, где

$$\rho_1 = \begin{cases} \tau_2 = \dfrac{\nu_3^2}{4\nu_2(\nu_3 - \nu_2)}, & \nu_2 \ge \dfrac{\nu_3}{2}; \\ 1, \quad \nu_1 \ge \dfrac{\nu_3}{2}, & \nu_2 < \dfrac{\nu_3}{2}; \\ \tau_1 = \dfrac{\nu_3^2}{4\nu_1(\nu_3 - \nu_1)}, \quad \nu_1 < \dfrac{\nu_3}{2}, & \nu_2 < \dfrac{\nu_3}{2}, \end{cases}$$

а локализующие множества имеют вид

$$\Omega_q:\ (q+1)x^2 + qy^2 + \big(z - \beta(2q+1)\big)^2 \le \rho_1\beta^2(2q+1)^2, \quad -1 < q < 0. \qquad (13)$$

Чтобы найти пересечение семейства множеств (13), как и выше, собираем коэффициенты при q, сводя неравенство к квадратному относительно q, и используем условия (11). В результате приходим к неравенствам, описывающим множество $\Omega_{(-1,0)}$ в случае $\nu_1 \geq \nu_2$, $\nu_2 < \nu_3$:

$$y^2 \geq \begin{cases} g_2(\rho_1, x, z), & (4-3\rho_1)\beta^2 \leq x^2 + (z-\beta)^2 \leq \rho_1\beta^2; \\ (z+\beta)^2 - \rho_1\beta^2, & x^2 + (z-\beta)^2 < (4-3\rho_1)\beta^2, \end{cases} \tag{14}$$

где

$$g_2(\rho_1, x, z) = 4\beta^2(\rho_1 - 1) - x^2 + 4\beta z - 4\beta\sqrt{(\rho_1 - 1)[\beta^2\rho_1 - x^2 - (z-\beta)^2]}.$$

Локализующее множество при $q = -1$. В этом случае в выражениях (4) и (5) полагаем $q = -1$, $z - \gamma = Z$ и приходим к задаче поиска точных верхней и нижней граней функции

$$p(X, Z) = \mu_3 Z^2 - 2\gamma Z + (2 - \mu_3)\gamma^2$$

на множестве $|Z| \geq \gamma$. Результаты зависят от знака μ_3. При $\mu_3 > 0$ (т.е. $\nu_2 > \nu_3$) имеем $p_{\sup} = +\infty$, а $p_{\inf}$ — глобальный минимум функции, равный $4\tau_2\gamma^2$. При этом локализующее множество имеет вид

$$\Omega_{-1}: \quad y^2 \leq (z+\beta)^2 - \tau_2\beta^2. \tag{15}$$

При $\mu_3 = 0$ (т.е. $\nu_2 = \nu_3$) $p(X, Z) = 2\gamma(\gamma - Z)$ — линейная функция, рассматриваемая на множестве $|Z| \geq \gamma$. Значит, $p_{\inf} = -\infty$, $p_{\sup} = +$ $+\infty$, а локализующее множество тривиально и совпадает с $\mathbb{R}^3$.

Наконец, при $\mu_3 < 0$ (т.е. $\nu_2 < \nu_3$) имеем $p_{\inf} = -\infty$, $p_{\sup} = 4\rho_2\gamma^2$, где

$$\rho_2 = \begin{cases} \tau_2, & \nu_2 \geq \dfrac{\nu_3}{2}; \\ 1, & \nu_2 < \dfrac{\nu_3}{2}, \end{cases} \tag{16}$$

а локализующее множество имеет вид

$$\Omega_{-1}: \quad y^2 \geq (z+\beta)^2 - \rho_2\beta^2. \tag{17}$$

Локализующие множества при $q < -1$. В этом случае в выражениях (4) и (5) выполняем замену переменных $-\sqrt{|q+1|}x = X$, $z - \gamma = Z$ и приходим к задаче поиска точных верхней и нижней граней функции

$$p(X, Z) = -\mu_1 X^2 + \mu_3 Z^2 - 2\gamma Z + (2 - \mu_3)\gamma^2,$$

где $\mu_1 = 1 - \nu_1/\nu_2$, $\mu_3 = 1 - \nu_3/\nu_2$, на множестве

$$-\nu_1 X^2 + \nu_3 Z^2 \geq \nu_3\gamma^2.$$

Здесь, как и выше, следует рассмотреть различные сочетания знаков коэффициентов μ_1 и μ_3.

Если $\mu_3 = 0$ (т.е. $\nu_2 = \nu_3$), то функция $p(X, Z)$ линейна по Z, значение $p_{\sup} = +\infty$ достигается при $X = 0$, $Z \to +\infty$, а значение $p_{\inf} = -\infty$ — на границе области (т.е. на множестве $-\nu_1 X^2 +$

$+\nu_3 Z^2 = \nu_3\gamma^2$) при $Z \to +\infty$. Значит, при $\nu_2 = \nu_3$ локализующее множество Ω_q, $q < -1$, тривиально: $\Omega_q = \mathbb{R}^3$.

В случае $\mu_1 \leq 0$, $\mu_3 > 0$ (т.е. $\nu_3 < \nu_2 \leq \nu_1$) многочлен $p(X, Z)$ с положительно определенной квадратичной формой рассматривается в замкнутой области, ограниченной гиперболой с действительной осью OZ. В этом случае $p_{\text{sup}} = +\infty$ достигается при $X = 0$, $Z \to +\infty$. Значение p_{inf} достигается при $X = 0$. С учетом этого получаем задачу поиска точной нижней грани $\mu_3 Z^2 - 2\gamma Z + (2-\mu_3)\gamma^2$ при $|Z| \geq \gamma$. Так как $\mu_3 > 0$, глобальный минимум этой функции попадает в область $|Z| \geq \gamma$. Значит, $p_{\text{inf}} = 4\tau_2\gamma^2$, а локализующее множество имеет вид

$$\Omega_q\colon (q+1)x^2 + qy^2 + \bigl(z - \beta(2q+1)\bigr)^2 \geq \tau_2\beta^2(2q+1)^2, \tag{18}$$

причем $\tau_2 < 0$. Собирая коэффициенты при степенях q, неравенство (18) можем представить в виде

$$4\beta^2(1-\tau_2)q^2 + \bigl[4\beta^2(1-\tau_2) + x^2 + y^2 - 4\beta z\bigr]q + \\ + \bigl[-\beta^2\tau_2 + x^2 + (z-\beta)^2\bigr] \geq 0, \quad q < -1. \tag{19}$$

По *теореме 1* неравенство $Ax^2 + Bx + C \geq 0$ выполняется при $x < -1$, если выполняется неравенство $B^2 \leq 4AC$ или пара неравенств $A - B + C \geq 0$, $B - 2A \leq 0$. Указанные условия эквивалентны следующему ограничению на B сверху:

$$B \leq \begin{cases} A + C, & C \leq A; \\ \sqrt{4AC}, & C \geq A. \end{cases} \tag{20}$$

Оно, применительно к выражению (19), дает неравенства, описывающие пересечение $\Omega_{(-\infty,-1)}$ в случае $\nu_3 < \nu_2 \leq \nu_1$:

$$y^2 \leq \begin{cases} (z+\beta)^2 - \tau_2\beta^2, & x^2 + (z-\beta)^2 \leq (4-3\tau_2)\beta^2; \\ g_1(\tau_2, x, z), & x^2 + (z-\beta)^2 > (4-3\tau_2)\beta^2, \end{cases} \tag{21}$$

где

$$g_1(\tau_2, x, z) = 4\beta\sqrt{(1-\tau_2)[x^2 + (z-\beta)^2 - \tau_2\beta^2]} - x^2 + 4\beta z - 4\beta^2(1-\tau_2).$$

При $\mu_1 > 0$, $\mu_3 > 0$ (т.е. $\nu_1 < \nu_2$, $\nu_3 < \nu_2$) функция $-\mu_1 X^2 + \mu_3 Z^2 - 2\gamma Z + (2-\mu_3)\gamma^2$ имеет $p_{\text{sup}} = +\infty$, достигаемый при $X = 0$ и $Z \to \infty$. Значение p_{inf} достигается на границе области (при фиксированном Z наименьшее значение функции достигается при максимальном X), т.е. при $-\nu_1 X^2 + \nu_3 Z^2 = \nu_3\gamma^2$. Мы снова приходим к исследованию на минимум функции $\sigma Z^2 - 2\gamma Z + (2-\sigma)\gamma^2$, где $\sigma = 1 - \nu_3/\nu_1$, на множестве $|Z| \geq \gamma$. Если $\sigma \leq 0$ (т.е. $\nu_1 \leq \nu_3$), точной нижней гранью этой функции является $-\infty$. Если же $\sigma > 0$ (т.е. $\nu_1 > \nu_3$), то в силу неравенства $\sigma \leq 1$ заключаем, что функция достигает наименьшего значения при $Z = \gamma/\sigma$ и $p_{\inf} = 4\tau_1\gamma^2$, где $\tau_1 = \dfrac{\nu_3^2\gamma^2}{\nu_1(\nu_3-\nu_1)}$. Итак, при $\nu_1 \le \nu_3 < \nu_2$ имеем $\Omega_q = \mathbb{R}^3$, $q < -1$; при $\nu_3 < \nu_1 < \nu_2$ имеем $p_{\inf} = 4\tau_1\gamma^2$ и локализующее множество

$$\Omega_q\colon \quad (q+1)x^2 + qy^2 + \bigl(z - \beta(2q+1)\bigr)^2 \ge \tau_1\beta^2(2q+1)^2. \qquad (22)$$

Рассуждая, как и в случае семейства (19), для семейства (22) получаем неравенства, описывающие пересечение $\Omega_{(-\infty,-1)}$:

$$y^2 \le \begin{cases} (z+\beta)^2 - \tau_1\beta^2, & x^2 + (z-\beta)^2 \le (4-3\tau_1)\beta^2; \\ g_1(\tau_1, x, z), & x^2 + (z-\beta)^2 > (4-3\tau_1)\beta^2, \end{cases} \qquad (23)$$

где

$$g_1(\tau_1,x,z) = 4\beta\sqrt{(1-\tau_1)[x^2+(z-\beta)^2-\tau_1\beta^2]} - x^2 + 4\beta z - 4\beta^2(1-\tau_1).$$

Случай $\mu_1 \ge 0$, $\mu_3 < 0$ (т.е. $\nu_1 \le \nu_2 < \nu_3$) аналогичен случаю $\mu_1 \le 0$, $\mu_3 > 0$: исследуется диапазон значений многочлена с отрицательно определенной квадратичной формой в замкнутой области, ограниченной гиперболой. При этом значение $p_{\inf} = -\infty$ достигается при $X = 0$ и $Z \to +\infty$, а $p_{\sup}$ достигается при $X = 0$ как максимум $\mu_3 Z^2 - 2\gamma Z + (2-\mu_3)\gamma^2$ при $|Z| \ge \gamma$. При $\mu_3 \ge -1$ (т.е. $\nu_2 \le \nu_3/2$) это — глобальный максимум, равный $4\tau_2\gamma^2$, а при $\mu_3 < -1$ максимум достигается при $Z = -\gamma$ и равен $4\gamma^2$. Таким образом, в этом случае $p_{\sup} = 4\rho_2\gamma^2$, где ρ_2 определяется равенством (16). Мы приходим к локализующим множествам

$$\Omega_q\colon \quad (q+1)x^2 + qy^2 + \bigl(z - \beta(2q+1)\bigr)^2 \le \rho_2\beta^2(2q+1)^2. \qquad (24)$$

С помощью соотношений (20) получаем неравенства, описывающие пересечение $\Omega_{(-\infty,-1)}$ семейства (24):

$$y^2 \ge \begin{cases} g_2(\rho_2, x, z), & x^2 + (z-\beta)^2 \le (4-3\rho_2)\beta^2; \\ (z+\beta)^2 - \rho_2\beta^2, & x^2 + (z-\beta)^2 > (4-3\rho_2)\beta^2, \end{cases} \qquad (25)$$

где

$$g_2(\rho_2,x,z) = 4\beta^2(\rho_2-1) - x^2 + 4\beta z - 4\beta\sqrt{(\rho_2-1)[\rho_2\beta^2 - x^2 - (z-\beta)^2]}.$$

При $\mu_1 < 0$, $\mu_3 < 0$ (т.е. $\nu_1 > \nu_2$, $\nu_2 < \nu_3$) функция $p(X,Z)$ имеет $p_{\inf} = -\infty$, достигаемый при $X = 0$ и $Z \to \infty$. Значение $p_{\sup}$ достигается на границе области, и мы приходим к исследованию на максимум функции $\sigma Z^2 - 2\gamma Z + (2-\sigma)\gamma^2$, где $\sigma = 1 - \dfrac{\nu_3}{\nu_1}$, при $|Z| \ge \gamma$. Если $\sigma < 0$ (т.е. $\nu_1 < \nu_3$) точная верхняя грань достигается в конечной точке. При этом, если $\sigma \ge -1$ (т.е. $\nu_1 \ge \nu_3/2$), то точка максимума $Z = -\gamma/\sigma$ и $p_{\sup} = 4\tau_1\gamma^2$, а если $\sigma < -1$, то максимум достигается при $Z = -\gamma$ и равен $4\gamma^2$. Если $\sigma \ge 0$ (т.е. $\nu_1 \ge \nu_3$), то $p_{\sup} =$

$= +\infty$. Итак, при $\nu_2 < \nu_3 \le \nu_1$ мы получаем тривиальное семейство локализующих множеств $\Omega_q = \mathbb{R}^3$, $q < -1$, а при $\nu_2 < \nu_1 < \nu_3$ семейство локализующих множеств имеет вид

$$\Omega_q\colon \quad (q+1)x^2 + qy^2 + \big(z - \beta(2q+1)\big)^2 \le \rho_3\beta^2(2q+1)^2, \tag{26}$$

где

$$\rho_3 = \begin{cases} \tau_1, & \nu_1 \ge \dfrac{\nu_3}{2}; \\ 1, & \nu_1 < \dfrac{\nu_3}{2}. \end{cases}$$

С помощью соотношений (20) получаем неравенства, описывающие пересечение $\Omega_{(-\infty,-1)}$ семейства (26):

$$y^2 \ge \begin{cases} g_2(\rho_3, x, z), & x^2 + (z-\beta)^2 \le (4 - 3\rho_3)\beta^2; \\ (z+\beta)^2 - \rho_3\beta^2, & x^2 + (z-\beta)^2 > (4-3\rho_3)\beta^2, \end{cases} \tag{27}$$

где

$$g_2(\rho_3, x, z) = 4\beta^2(\rho_3 - 1) - x^2 + 4\beta z - 4\beta\sqrt{(\rho_3 - 1)[\rho_3\beta^2 - x^2 - (z-\beta)^2]}.$$

Итоговые результаты. Были рассмотрены пять промежутков изменения параметра: 1) $q > 0$; 2) $q = 0$, 3) $-1 < q < 0$, 4) $q = -1$, 5) $q < -1$. Для каждого из этих промежутков получено локализующее множество, в которое попадают все инвариантные компактные множества ПРТ-системы. Окончательный результат — это пересечение всех полученных локализующих множеств, которое естественно описать в виде системы неравенств. Однако вид этих неравенств зависит от соотношений между параметрами ν_1, ν_2, ν_3. Разделим трехмерную область изменения параметров ν_1, ν_2, ν_3 на несколько подобластей (рис. 1):

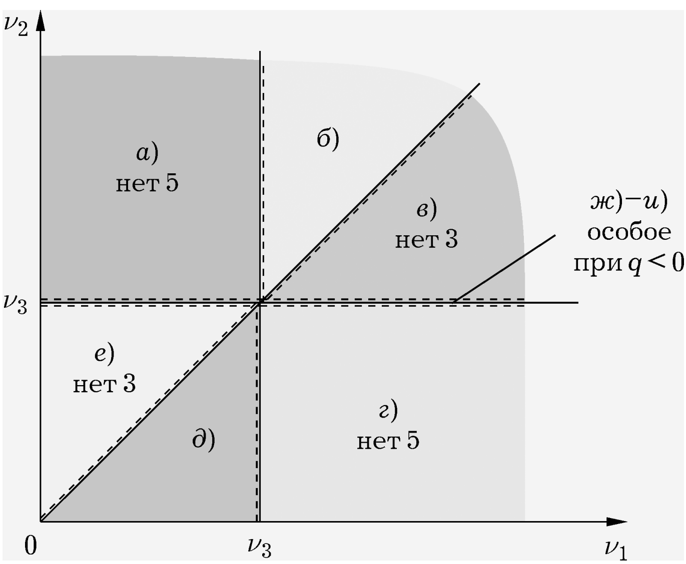

Рис. 1. Область изменения параметров системы

а) $\nu_1 \le \nu_3$, $\nu_2 > \nu_3$ (нет ограничений в диапазоне $q < -1$);
б) $\nu_1 > \nu_3$, $\nu_1 \le \nu_2$ (все ограничения);
в) $\nu_1 > \nu_2$, $\nu_2 > \nu_3$ (нет ограничений в диапазоне $-1 < q < 0$);
г) $\nu_1 \ge \nu_3$, $\nu_2 < \nu_3$ (нет ограничений в диапазоне $q < -1$);
д) $\nu_1 \ge \nu_2$, $\nu_1 < \nu_3$ (все ограничения);
е) $\nu_1 < \nu_2$, $\nu_2 < \nu_3$ (нет ограничений в диапазоне $-1 < q < 0$);
ж) $\nu_2 = \nu_3$, $\nu_1 < \nu_2$ (в диапазоне $q < 0$ особое ограничение, соответствующее $q = -1/2$);
з) $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3$ (в диапазоне $q < 0$ особое ограничение, соответствующее $q = -1/2$).
и) $\nu_2 = \nu_3$, $\nu_1 > \nu_2$ (в диапазоне $q < 0$ особое ограничение, соответствующее $q = -1/2$).

Итоговые результаты представим в каждом из указанных вариантов, по возможности упростив полученную систему неравенств.

Вариант а) $\nu_1 \le \nu_3$, $\nu_2 > \nu_3$. Систему ограничений составляют неравенства (2), (3), (12), (15) После упрощения получаем:

$$\begin{cases} x^2 + (z-\beta)^2 \le \beta^2 \rho_0; \\ y^2 \le 4\beta\sqrt{(\rho_0 - 1)[\beta^2\rho_0 - x^2 - (z-\beta)^2]} - x^2 + 4\beta z + 4\beta^2(\rho_0 - 1); \\ y^2 \le \begin{cases} g_1(\tau_2, x, z), & x^2 + (z-\beta)^2 \le (4 - 3\tau_2)\beta^2; \\ (z+\beta)^2 - \tau_2\beta^2, & x^2 + (z-\beta)^2 > (4 - 3\tau_2)\beta^2, \end{cases} \end{cases}$$

где

$$g_1(\tau_2, x, z) = 4\beta\sqrt{(1-\tau_2)[x^2 + (z-\beta)^2 - \tau_2\beta^2]} - x^2 + 4\beta z - 4\beta^2(1-\tau_2).$$

б) $\nu_1 > \nu_3$, $\nu_1 \le \nu_2$. Систему ограничений составляют неравенства (2), (3), (12), (15), (23). После упрощения получаем

$$\begin{cases} x^2 + (z-\beta)^2 \le \beta^2; \\ y^2 \le 4\beta\sqrt{(1-\tau_2)[x^2 + (z-\beta)^2 - \tau_2\beta^2]} - x^2 + 4\beta z - 4\beta^2(1-\tau_2). \end{cases}$$

Вариант в) $\nu_1 > \nu_2$, $\nu_2 > \nu_3$. Систему ограничений составляют неравенства (2), (3), (15), (21) После упрощения получаем:

$$\begin{cases} x^2 + (z-\beta)^2 \le \beta^2; \\ y^2 \le -x^2 + 4\beta z; \\ y^2 \le (z+\beta)^2 - \tau_2\beta^2. \end{cases}$$

Вариант г) $\nu_1 \geq \nu_3$, $\nu_2 < \nu_3$. Систему ограничений составляют неравенства (2), (3), (14), (17). После упрощения получаем:

$$\begin{cases} x^2 + (z-\beta)^2 \leq \beta^2; \\ y^2 \leq 4\beta\sqrt{(\rho-1)[\beta^2\rho - x^2 - (z-\beta)^2]} - x^2 + 4\beta z + 4\beta^2(\rho-1); \\ y^2 \geq \begin{cases} (z+\beta)^2 - \rho_2\beta^2, & x^2 + (z-\beta)^2 \leq (4-3\rho_2)\beta^2; \\ g_2(\rho_2, x, z), & (4-3\rho_2)\beta^2 \leq x^2 + (z-\beta)^2 \leq \beta^2, \end{cases} \end{cases}$$

где

$$g_2(\rho_2, x, z) = 4\beta^2(\rho_2 - 1) - x^2 + 4\beta z - 4\beta\sqrt{(\rho_2-1)[\rho_2\beta^2 - x^2 - (z-\beta)^2]}.$$

Вариант д) $\nu_1 \geq \nu_2$, $\nu_1 < \nu_3$. Систему ограничений составляют неравенства (2), (3), (14), (17), (26). После упрощения получаем:

$$\begin{cases} x^2 + (z-\beta)^2 \leq \beta^2\rho_0; \\ y^2 \leq 4\beta\sqrt{(\rho-1)[\beta^2\rho - x^2 - (z-\beta)^2]} - x^2 + 4\beta z + 4\beta^2(\rho-1); \\ y^2 \geq \begin{cases} g_2(\rho_1, x, z), & (4-3\rho_1)\beta^2 \leq x^2 + (z-\beta)^2 \leq \rho_1\beta^2; \\ (z+\beta)^2 - \rho_2\beta^2, & x^2 + (z-\beta)^2 \leq (4-3\rho_1)\beta^2; \end{cases} \\ y^2 \geq \begin{cases} g_2(\rho_3, x, z), & x^2 + (z-\beta)^2 \leq (4-3\rho_3)\beta^2; \\ (z+\beta)^2 - \rho_2\beta^2, & x^2 + (z-\beta)^2 > (4-3\rho_3)\beta^2, \end{cases} \end{cases}$$

где

$$g_2(t, x, z) = 4\beta^2(t-1) - x^2 + 4\beta z - 4\beta\sqrt{(t-1)[\beta^2 t - x^2 - (z-\beta)^2]}.$$

Вариант е) $\nu_1 < \nu_2$, $\nu_2 < \nu_3$. Систему ограничений составляют неравенства (2), (3), (17), (25). После упрощения получаем:

$$\begin{cases} x^2 + (z-\beta)^2 \leq \beta^2\rho_0; \\ y^2 \leq 4\beta\sqrt{(\rho_0-1)[\beta^2\rho_0 - x^2 - (z-\beta)^2]} - x^2 + 4\beta z + 4\beta^2(\rho_0-1); \\ y^2 \geq \begin{cases} g_2(\rho_2, x, z), & x^2 + (z-\beta)^2 \leq (4-3\rho_2)\beta^2; \\ (z+\beta)^2 - \rho_2\beta^2, & x^2 + (z-\beta)^2 \geq (4-3\rho_2)\beta^2, \end{cases} \end{cases}$$

где

$$g_2(\rho_2, x, z) = 4\beta^2(\rho_2 - 1) - x^2 + 4\beta z - 4\beta\sqrt{(\rho_2-1)[\rho_2\beta^2 - x^2 - (z-\beta)^2]}.$$

Вариант ж) $\nu_2 = \nu_3$, $\nu_1 < \nu_2$. Систему ограничений составляют неравенства (2), (3), (6). После упрощения получаем:

$$\begin{cases} x^2 + (z-\beta)^2 \le \beta^2 \rho_0; \\ y^2 \le 4\beta^2(\rho_0 - 1) - x^2 + 4\beta z - 4\beta\sqrt{(\rho_0 - 1)[\beta^2\rho_0 - x^2 - (z-\beta)^2]}; \\ y^2 \le x^2 + 2z^2. \end{cases}$$

Вариант з) $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3$. Систему ограничений составляют неравенства (2), (3), (8). После упрощения получаем:

$$\begin{cases} x^2 + (z-\beta)^2 \le \beta^2; \\ x^2 - y^2 + 2z^2 = 0. \end{cases}$$

Вариант и) $\nu_2 = \nu_3$, $\nu_1 > \nu_2$. Систему ограничений составляют неравенства (2), (3), (7). После упрощения получаем:

$$\begin{cases} x^2 + (z-\beta)^2 \le \beta^2; \\ x^2 + 2z^2 \le y^2 \le -x^2 + 4\beta z. \end{cases}$$

Пример. Рассмотрим систему с параметрами $\nu_1 = 2, \nu_2 = 5, \nu_3 = 1$, $\beta = 8$. Значения параметров соответствуют варианту *б*. Следовательно, в данном случае локализующее множество описывается неравенствами

$$\begin{cases} x^2 + (z-\beta)^2 \le \beta^2; \\ y^2 \le 4\beta\sqrt{(1-\tau_2)[x^2 + (z-\beta)^2 - \tau_2\beta^2]} - x^2 + 4\beta z - 4\beta^2(1-\tau_2). \end{cases}$$

Поскольку

$$\tau_2 = \frac{\nu_3^2}{\nu_2(\nu_3 - \nu_2)} = -\frac{1}{20},$$

эти неравенства конкретизируются следующим образом:

$$\begin{cases} x^2 + (z-8)^2 \le 64; \\ y^2 \le 16\sqrt{4{,}2\big[x^2 + (z-8)^2 + 3{,}2\big]} - x^2 + 32z - 33{,}2. \end{cases}$$

Соответствующее множество, а также траектория системы с начальными условиями $x_0 = 0{,}1$, $y_0 = 0$, $z_0 = \sqrt{54}$ показаны на рис. 2.

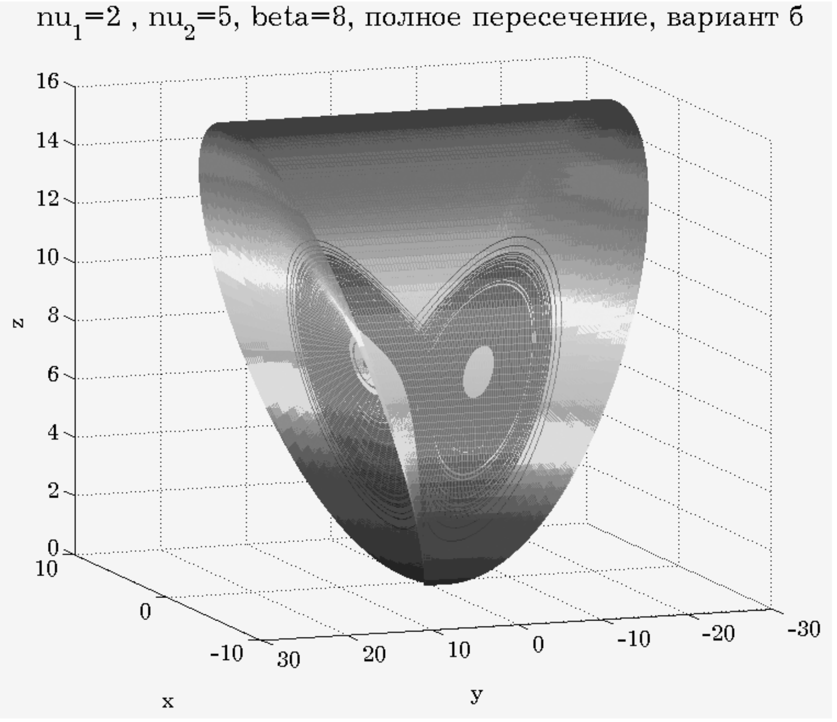

Рис. 2. Локализующее множество ПРТ-системы

Работа выполнена при финансовой поддержке программы ОИТВС РАН “Фундаментальные основы информационных технологий и систем”, проект 1.13, программы Министерства образования и науки “Развитие научного потенциала высшей школы”, проект РНП 2.1.1.2381 и гранта РФФИ 05-01-00840.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. П и к о в с к и й А. С., Р а б и н о в и ч М. И., Т р а х т е н г е р ц В. Ю. Возникновение стохастичности при распадном ограничении параметрической неустойчивости // ЖЭТФ. – 1978. – Т. 74. – С. 1366–1374.
2. Л е о н о в Г. А. Оценки аттракторов и существование гомоклинических орбит в системе Лоренца // Прикладная математика и механика. – 2001. – Т. 65. – № 1. – С. 21–35.
3. К р и щ е н к о А. П. Локализация предельных циклов // Дифференциальные уравнения. – 1995. – № 11. – С. 1858–1865.
4. К р и щ е н к о А. П. Локализация инвариантных компактов динамических систем // Дифференциальные уравнения. – 2005. – № 12. – С. 1597–1604.
5. N e u k i r c h S. Integrals of motion and semipermeable surfaces to bound the amplitude of a plasma instability. Phys. Rev. E. – 2001. V. 63.
6. G i a c o m i n i H., N e u k i r c h S. Integral of motion and the shape of the attractor for the Lorenz model // Phys. Letters A. – 1997. – V. 240. – P. 157–160.

Статья поступила в редакцию 18.10.2006