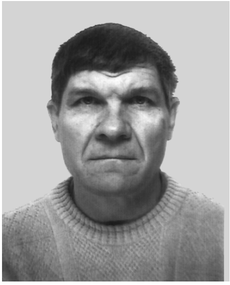

Анатолий Николаевич Канатников родился в 1954 г., окончил в 1976 г. МГУ им. М.В. Ломоносова. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 30 научных работ в области теории функций, дифференциальных уравнений и информатики.

A. N. Kanatnikov (b.1954) graduated from the Lomonosov Moscow State University in 1976. D. Sc.(Phys.-Math.), assoc. professor of “Mathematical Simulation” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 30 publications in the field of theory of functions, differential equations and information technology.

УДК 512.562

Г. Л. Луканкин, И. Г. Табакова

О ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Исследованы свойства голоморфных функций двух комплексных переменных. С помощью интегрального представления А. Темлякова получены новые результаты решения задачи Римана.

В середине 50-х годов А. Темляков получил интегральные представления для функций голоморфных в двоякокруговых областях пространства C^2 [1]. Источником интегралов Темлякова послужила найденная им формула обращения формулы Уитеккера. Интегральные представления Темлякова обладают рядом отличительных особенностей. Во-первых, последний внутренний интеграл в них либо интеграл Коши (интегральное представление Темлякова 1-го рода), либо некоторый линейный интегральный дифференциальный оператор этого интеграла (интегральное представление Темлякова 2-го рода). Во-вторых, ядром представлений Темлякова является голоморфное ядро Коши — единое для всего класса рассматриваемых областей, причем знаменатель ядра — многочлен первой степени относительно внешних переменных.

Тесная связь интегральных представлений Темлякова с интегралом Коши одного комплексного переменного дает возможность усилить методы исследований теории функций многих комплексных переменных всесторонне разработанным аппаратом одномерного интеграла типа Коши и его приложениями. Кроме того, интегральные представления Темлякова являются удобным аппаратом для исследования свойств голоморфных функций многих комплексных переменных с целью их использования при рассмотрении пространственных краевых задач [4, 5].

В настоящей статье для заданной определяющей области $K = \{(\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2) : |\mathrm{Z}_1| + |\mathrm{Z}_2| < 1\}$ ставятся и решаются задачи Римана, а именно: 1) задача о скачке; 2) однородная задача; 3) неоднородная задача.

Эти задачи рассматриваются на окружности особенностей

$$\mathrm{B}_1 = \{(\mathrm{Z}_1, \mathrm{Z}_2) : |\mathrm{Z}_1| = 1,\ \mathrm{Z}_2 = 0\}.$$

Задача Римана для гиперконуса с краевым условием на окружности особенностей. Функцию $F = F\,(z_1, z_2)$, заданную во всех точках пространства C^2, кроме точек окружностей

$$B_1 = \{(z_1, z_2) :\ |z_1| = 1,\ z_2 = 0\} \text{ и } B_{-1} = \{(z_1, z_2) :\ z_1 = 0,\ |z_2| = 1\}$$

будем называть функцией класса (T), если:

а) функция $F\ (z_1,z_2)$ непрерывна во всем пространстве C^2, за исключением точек окружностей B_1 и B_2, голоморфна в области $K \cup E_1 \cup E_2$, где

$$K = \{(z_1, z_2) :\ |z_1| + |z_2| <\ 1\},$$

$$E_1 = \{(z_1, z_2) :\ |z_1| - |z_2| >\ 1\},$$

$$E_2 = \{(z_1, z_2) :\ |z_2| - |z_1| >\ 1\},$$

а в области $E = C^2 \backslash \overline{(K \bigcup E_1 \bigcup E_2)}$ для нее существуют операторы

$$D_{z_1} F = \frac{\partial F}{\partial z_1} - \frac{1}{z_1}\left[k\overline{z}_1 \frac{\partial F}{\partial \overline{z}_1} + (k+1)\,\overline{z}_2 \frac{\partial F}{\partial \overline{z}_2}\right]$$

и

$$D_{z_2} F = \frac{\partial F}{\partial z_2} + \frac{1}{z_2}\left[(k-1)\,\overline{z}_1 \frac{\partial F}{\partial \overline{z}_1} + k\overline{z}_2 \frac{\partial F}{\partial \overline{z}_2}\right],$$

где $k = |z_1|^2 - |z_2|^2$;

б) при стремлении точки $(z_1,\ z_2)$ к любой точке $(z_1^0,\ z_2^0) \in B_S$, $S = \pm 1$, функция $F\,(z_1,\ z_2)$ стремится к определенным конечным пределам:

$$F^+\left(z_1^0,\ z_2^0\right) = \lim_{(z_1,z_2)\to\left(z_1^0,z_2^0\right)\in B_s} F\,(z_1,\ z_2)\,,\quad (z_1,\ z_2) \in K,$$

$$F^-\left(z_1^0,\ z_2^0\right) = \lim_{(z_1,z_2)\to\left(z_1^0,z_2^0\right)} F\,(z_1,\ z_2)\,,\quad (z_1, z_2) \in E_1 \cup E_2,$$

$$F_\delta\left(z_1^0,\ z_2^0\right) = \lim_{(z_1,z_2)\to\left(z_1^0,z_2^0\right)} F\,(z_1,\ z_2)\,,\quad (z_1, z_2) \in \delta,$$

$$\delta = \{\,(z_1,\ z_2) : |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2m\,|z_1|\,|z_2| - 1 = 0\},$$

$$|m| \leqslant 1,\ \arg z_1 - \arg z_2 = l,$$

$$\arg_S 0 = \frac{1}{2}\left[(1+S)\arg z_1^0 + (1-S)\arg z_2^0\right] - Sl,$$

$$(z_1^0,\, z_2^0) \in B_S, \quad S = \pm 1, \quad |l| < 2\pi.$$

Будем говорить, что функция $p(t,\varsigma)$ принадлежит классу λ, если $p(t,\varsigma)$ непрерывна и периодична с периодом 2π по t и удовлетворяет условию Гёльдера по ς:

$$|p\,(t,\ \varsigma) - p\,(t,\ \varsigma_0)\,| < A^*\,|\varsigma - \varsigma_0|^{\lambda},$$

где $0 < \lambda \leqslant 1$, A^* — некоторая постоянная, причем λ и A^* не зависят от t.

Очевидно, что всякая функция $F\,(z_1,\ z_2)$, представимая интегралом типа Темлякова 1-го рода

$$F = \frac{1}{4\pi^2 i}\int\limits_0^{2\pi} dt \int\limits_{|\varsigma|=1} \frac{\psi\,(t,\ \varsigma)}{\varsigma - u}d\varsigma, \tag{1}$$

где $\psi(t,\,\varsigma) \in \lambda$, $u = z_1 + z_2 e^{it}$, принадлежит классу (T).

Предельные значения $F_\delta\,(\varsigma,\,o)\,(F_\delta\,(o,\,\varsigma))$ функции $F\,(z_1,\ z_2)$ класса (T) в точках окружности особенностей $\hat{B}_1\,(B_{-1})$ по двумерным поверхностям δ из области E называют поверхностными пределами в точках окружности особенностей $\hat{B}_1\,(B_{-1})$.

Следует отметить, что разность двух поверхностных пределов по двумерным поверхностям δ_1 и δ_2 (δ_k, $k = 1,\ 2$, получается из δ заменой m на m_k, $|m_k| \leqslant 1$) в точках окружности особенностей выражается формулой

$$F_{\delta_1}\left(z_1^0,\ z_2^0\right) - F_{\delta_2}\left(z_1^0,\ z_2^0\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{l_1+\alpha_1}^{l_2+\alpha_2} \psi\,(t,\ u_0)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{l_1+\alpha_1}^{l_2+\alpha_2} \psi\,(t,\ u_0)\,dt, \tag{2}$$

где $|\alpha_k| \leqslant \pi$, $|l_k| \leqslant 2\pi$, $(k = 1, 2)$.

Приведем без доказательства две вспомогательные леммы.

Лемма 1. Интеграл типа Темлякова 1-го рода на множестве бесконечных точек обращается в нуль, т.е. исчезает, если точка (z_1, z_2) стремится к точкам (z_1^0, ∞) и $(\infty,\ z_2^0)$ по любому пути, а к точке $(\infty; \infty)$ — по любому пути, расположенному на гиперповерхности $|z_2| = |z_1| + b$, где b — любое действительное число.

В качестве ***следствия*** этой леммы отметим, что ни одна из постоянных, кроме нуля, не может быть представлена интегралом (1).

Будем говорить, что функция $q = q(\varsigma, l_1, \alpha_1, l_2, \alpha_2)$ принадлежит классу λ_1 $(q \in \lambda_1)$, если она допускает непрерывные частные производные по действительным переменным l_k, $\alpha_k = \alpha_{m_k}$ $(k = 1, 2;\ |l_k| < 2\pi,\ |\alpha_k| \leqslant \pi)$, такие, что

$$\frac{\partial q}{\partial l_k} + \frac{\partial q}{\partial \alpha_k} = \frac{(-1)^k}{\pi}\psi(l_k + \alpha_k,\ \varsigma) \quad (k = 1, 2),$$
$$\frac{\partial q}{\partial l_k} - \frac{\partial q}{\partial \alpha_k} = \frac{(-1)^k}{\pi}\psi(l_k - \alpha_k,\ \varsigma) \quad (k = 1, 2), \tag{3}$$

где

$$\psi(t,\ \varsigma) \in \lambda, \quad q(\varsigma, l_1, \alpha_1, l_2, \alpha_2) = 0. \tag{4}$$

Лемма 2. Для того, чтобы функция $q = q(\varsigma, l_1, \alpha_1, l_2, \alpha_2)$ была представлена в виде

$$q = \sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^k}{2\pi} \int\limits_{l_k-\alpha_k}^{l_k+\alpha_k} \psi(t,\ \varsigma)dt, \tag{5}$$

где $\psi(t,\ \varsigma) \in \lambda$, необходимо и достаточно, чтобы $q(\varsigma, l_1, \alpha_1, l_2, \alpha_2) \in \lambda_1$.

1. Задача о скачке. Требуется найти функцию $F(z_1, z_2)$ класса (T), исчезающую на многообразии бесконечных точек, разность поверхностных пределов которой в точках окружности особенностей B_1 удовлетворяет соотношению

$$F_{\delta_k}(\varsigma, o) - F_{\delta_2}(\varsigma, o) = q(\varsigma, l_1, \alpha_1, l_2, \alpha_2), \tag{6}$$

где $q \in \lambda_1$, $\delta_k = \delta_{m_k}$, δ_k — есть поверхность, отвечающая заданиям $l = l_k$ и $m = m_k$.

Решение. По лемме 2 найдется такая функция $\psi(t, \varsigma) \in \lambda$, что

$$q = \sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^k}{2\pi} \int\limits_{l_k-\alpha_k}^{l_k+\alpha_k} \psi(t,\ \varsigma)dt,$$

поэтому формула (6) эквивалентна формуле

$$F_{\delta_1}(\varsigma,\ o) - F_{\delta_2}(\varsigma, o) = \sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^k}{2\pi} \int\limits_{l_k-\alpha_k}^{l_k+\alpha_k} \psi(t, \varsigma)dt. \tag{7}$$

Функция $F(z_1, z_2)$, определяемая формулой (1), является функцией класса (T) и дает единственное решение поставленной задачи. В самом деле, функция $F(z_1, z_2)$ является функцией класса (T), удовлетворяет в силу формулы (2) условию (6) и исчезает на многообразии бесконечных точек.

Допустим теперь, что задача имеет еще одно решение в классе функций, представимых интегралом (1), и пусть

$$\tilde{F} = \frac{1}{4\pi^2 i} \int\limits_0^{2\pi} dt \int\limits_{|\varsigma|=1} \frac{\tilde{\psi}(t,\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - u},$$

где $\tilde{\psi}(t,\varsigma) \in \lambda$, означает разность этих двух решений. Тогда, в силу формулы (6) должно быть

$$\tilde{F}_{\delta_1}(\varsigma, o) - \tilde{F}_{\delta_2}(\varsigma, o) = 0,$$

т.е. $q = 0$. Отсюда следует, что $\tilde{\psi}(t,\varsigma) \equiv 0$, поэтому $\tilde{F} \equiv 0$.

Замечание 1. Если от искомой функции потребовать, чтобы на многообразии бесконечных точек она обращалась в наперед заданное число A, то решение задачи, как легко видеть, будет даваться формулой

$$F(z_1, z_2) = A,$$

где $F(z_1, z_2)$ есть интеграл (1).

Будем говорить, что функция

$$G = G(\varsigma, l_1, \alpha_1, l_2, \alpha_2) \in \lambda_2,$$

если она допускает непрерывные частные производные по действительным переменным l_k, d_k, $|l_k| < 2\pi$, $|d_k| \leqslant \pi$, $k = 1,\ 2$, такие, что

$$\frac{\partial G}{\partial l_k} + \frac{\partial G}{\partial \alpha_k} = \frac{(-1)^k}{\pi} G\psi(l_k + \alpha_k, \varsigma) \quad (k = 1, 2),$$

$$\frac{\partial G}{\partial l_k} - \frac{\partial G}{\partial \alpha_k} = \frac{(-1)^{k+1}}{\pi} G\psi(l_k - \alpha_k, \varsigma) \quad (k = 1, 2),$$

где $\psi(t,\varsigma) \in \lambda$, $G(\varsigma, l_1, \alpha_1, l_1, \alpha_1) = 1$.

Лемма 3. Для того, чтобы функция $G \in \lambda_2$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $G = \exp q$, где $q \in \lambda_1$.

2. Однородная задача. Требуется найти функцию $f(z_1, z_2)$ класса (T), обращающуюся в единицу на многообразии бесконечных точек, поверхностные пределы которой на многообразии бесконечных точек в точках окружности особенностей B_1 удовлетворяют соотношению

$$f_{\delta_1}(\varsigma, o) = G(\varsigma, l_1, \alpha_1, l_2, \alpha_2) f_{\delta_2}(\varsigma, o), \tag{8}$$

где $G \in \lambda_2$.

Решение. Логарифмируя условие (8):

$$\ln f_{\delta_1}(\varsigma, o) = \ln G(\varsigma, l_1, \alpha_1, l_2, \alpha_2) + \ln f_{\delta_2}(\varsigma, o),$$

и замечая, что, на основании леммы 3 и определения функции $q \in \lambda_1$:

$$\ln G = q + 2\pi i \equiv \sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^k}{2\pi} \int\limits_{l_k-\alpha_k}^{l_k+\alpha_k} \psi(t,\varsigma)dt + 2\pi n i,$$

где $\psi(t,\varsigma) \in \lambda$, а $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, имеем

$$\ln f_{\delta_1}(\varsigma, o) - \ln f_{\delta_2}(\varsigma, o) = \sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^k}{2\pi} \int\limits_{l_k-\alpha_k}^{l_k+\alpha_k} \psi(t,\varsigma)dt + 2\pi n i. \qquad (9)$$

Полагая

$$\tau(z_1, z_2) = \ln f(z_1, z_2);$$

$$q_n = \sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^k}{2\pi} \int\limits_{l_k-\alpha_k}^{l_k+\alpha_k} \psi(t,\varsigma)dt + 2\pi n i,$$

где n — произвольным образом фиксированное целое число, условие (9) перепишется так:

$$\tau_{\delta_1}(\varsigma, o) - \tau_{\varsigma_2}(\varsigma, o) = q_n. \qquad (10)$$

Таким образом, мы пришли к задаче отыскания функции класса (T) по разности поверхностных пределов в точках окружности особенностей B_1, решаемой, если в ее краевом условии правая часть q есть функция класса λ_1 и, следовательно, $q(\varsigma, l_1, \alpha_1, l_1, \alpha_1) = 0$.

Поэтому для разрешимости нашей задачи с краевым условием (10) правая часть q_n должна удовлетворять условию

$$q_n(\varsigma, l_1, \alpha_1, l_1, \alpha_1) = 0. \qquad (11)$$

Из условия (11) и определения q_n получаем, что задача с краевым условием (10) будет разрешима при $n = 0$. Решение ее в классе функций, представимых интегралом типа Темлякова 1-го рода, при дополнительном условии исчезновения решения в бесконечных точках имеет вид

$$\tau = \frac{1}{4\pi^2 i} \int\limits_0^{2\pi} dt \int\limits_{|\varsigma|=1} \frac{\psi(t,\varsigma)}{\varsigma - u} d\varsigma, \qquad (12)$$

и, значит, решение поставленной краевой однородной задачи дается формулой

$$f(z_1, z_2) = e^{\tau(Z_1, Z_2)}. \qquad (13)$$

Очевидно, что функция $f(z_1, z_2)$, задаваемая формулой (13), принадлежит классу (T) и обращается в единицу в бесконечных точках.

Замечание 2. Если от искомой функции в однородной задаче потребовать, чтобы на многообразии бесконечных точек она обращалась в любое наперед заданное число B, то решение однородной задачи будет задаваться формулой

$$f(z_1,\ z_2) = Be^{\tau(z_1,z_2)}.$$

Рассмотрим теперь неоднородную задачу линейного сопряжения.

3. Неоднородная задача. Требуется найти две функции $f(z_1, z_2)$ и $\tilde{f}(z_1, z_2)$ класса (T) при дополнительном условии обращения в единицу функции $f(z_1, z_2)$ и в нуль функции $\tilde{f}(z_1, z_2)$ на многообразии бесконечных точек, поверхностные пределы которых в точках окружности B_1 удовлетворяют соотношению

$$f_{\delta_1}(\varsigma, o)\tilde{f}_{\delta_1}(\varsigma, o) =$$

$$= G(\varsigma, l_1, \alpha_1, l_2, \alpha_2) f_{\delta_2}(\varsigma, o)\tilde{f}_{\delta_2}(\varsigma, o) + q(\varsigma, l_1, \alpha_1, l_2, \alpha_2) f_{\delta_1}(\varsigma, o), \quad (14)$$

где $G \in \lambda_2$, $q \in \lambda_1$.

Решение поставленной задачи сводится к решению однородной задачи линейного сопряжения и задачи о скачке. Так как по условию искомая функция $f(z_1, z_2)$ должна обращаться в единицу в бесконечных точках, а $G \in \lambda_2$ и, следовательно,

$$G = e^{q_1} = \exp\left[\sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^k}{2\pi} \int\limits_{l_k-\alpha_k}^{l_k+\alpha_k} \psi(t, \varsigma)dt\right],$$

то, находя функцию $f(z_1, z_2)$ из условия

$$f_{\delta_1}(\varsigma, o) = Gf_{\delta_2}(\varsigma, o), \quad (15)$$

которое является краевым условием однородной задачи, имеем

$$f(z_1, z_2) = e^{\tau(z_1,z_2)}, \quad (16)$$

где $\tau(z_1, z_2)$ — интеграл выражения (12).

Поверхностные пределы найденной функции $f(z_1, z_2)$ удовлетворяют соотношению (15), поэтому, заменяя в равенстве (14) произведение функций $Gf_{\delta_2}(\varsigma, o)$ по формуле (15) на $f_{\delta_1}(\varsigma, o)$, получим условие, которому должна удовлетворять функция $\tilde{f}(z_1, z_2)$ в точках окружности B_1:

$$\tilde{f}_{\delta_1}(\varsigma, o) - \tilde{f}_{\delta_2}(\varsigma, o) = q,$$

или, так как $q \in \lambda_1$, что то же самое:

$$\tilde{f}_{\delta_1}(\varsigma, o) - \tilde{f}_{\delta_2}(\varsigma, o) = \sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^k}{2\pi} \int\limits_{l_k-\alpha_k}^{l_k+\alpha_k} \psi(t, \varsigma)dt.$$

Отсюда, на основании решения задачи о скачке, получим

$$\tilde{f} = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^{2\pi} dt \int_{|\varsigma|=1} \frac{\tilde{\psi}(t,\ \varsigma) d\varsigma}{\varsigma - u}, \tag{17}$$

где $\tilde{\psi}(t,\varsigma) \in \lambda$.

Замечание 3. Если в неоднородной задаче потребовать, чтобы искомые функции $f(z_1, z_2)$ и $\tilde{f}(z_1, z_2)$ в бесконечных точках обращались соответственно в произвольные значения C и D, то решение такой задачи запишется в виде

$$f(z_1, z_2) = Ce^{\tau(z_1, z_2)},$$

$$\tilde{f}(z_1, z_2) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^{2\pi} dt \int_{|\varsigma|=1} \frac{\tilde{\psi}(t,\ \varsigma)\alpha\varsigma}{\varsigma - u} + D.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А й з е н б е р г Л. А. Об интегралах Темлякова и граничных свойствах аналитических функций двух комплексных переменных // ДАН СССР. – 1958. – Т. 120, № 5. – С. 935–938.
2. B u n g a r t L. Holomorphic functions with values in locally convex spaces and applications to integral formulas // Trans. Amer. Math. Soc. – 1964. – № 2. – P. 611–636.
3. Г а х о в Ф. Д. Краевые задачи.: – М., Физматгиз, 1963. – 543 С.
4. Л у к а н к и н Г. Л. О некоторых краевых задачах для функций двух комплексных переменных // Ученые записки МОПИ им. Н.К. Крупской. – 1970. – Т. 269. – С. 23–48.
5. Л у к а н к и н Г. Л., Л а т ы ш е в А. В., Р ы н д и н а С. В. Граничная задача для одного класса линейных релаксационных нестационарных уравнений // Известия МАИ ВШ. – 2001. – № 2(16). – С. 94–101.
6. Ф у к с Б. А. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. – М.: Физматгиз, 1962. – 472 с.

Статья поступила в редакцию 26.04.2006