УДК 537.86

А. М. Макаров, Л. А. Лунёва,
К. А. Макаров

К ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ ОПЫТА КУЛОНА

Получена оценка возможной погрешности классических опытов Кулона в зависимости от геометрических параметров расчетной схемы и отношения величин зарядов или потенциалов на поверхности первой и второй сфер.

История открытия закона взаимодействия электрических зарядов между собой [1] сохранила имена Джозефа Пристли (1733–1804), Джона Робисона (1739–1805), Генри Кавендиша (1731–1810) и Шарля Огюстена Кулона (1736–1806). В 1766 г. Пристли провел опыты, которые показали, что при электризации полого металлического сосуда на его внутренней поверхности отсутствует электрический заряд, а в воздухе внутри сосуда отсутствует электрическая сила. “Разве нельзя заключить, — говорит он, — из этого опыта, что сила электрического притяжения подчиняется тем же законам, что и сила тяжести, а следовательно, зависит от квадрата расстояния между зарядами? Легко показать, что если бы Земля была полой, то тело, находящееся внутри нее, притягивалось бы к одной ее стороне не более, чем к другой”. Робисон в 1769 г. провел прямые опыты и обнаружил, что при отталкивании двух электрических зарядов одного знака сила взаимодействия оказалась обратно пропорциональна расстоянию между ними, возведенному в степень 2,06, а при притяжении двух разноименных зарядов — обратно пропорциональна расстоянию между зарядами в степени, меньшей 2. Он предположил, что правильный результат — показатель степени равен точно двум. Через четыре года Кавендиш выполнил редкий по точности эксперимент, из которого следовал результат Пристли и Робисона. К сожалению, описание этого опыта и его результаты не были своевременно опубликованы.

В 1785 г. Кулон независимо от предыдущих исследователей с помощью крутильных весов провел серию опытов по взаимодействию маленьких проводящих сфер, заряженных одноименными и разноименными электрическими зарядами. “Закон Кулона” был окончательно установлен.

Фундаментальный характер закона Кулона, естественно, вызывал желание установить степень его обоснованности. Одна из таких попыток была предпринята еще Дж. К. Максвеллом: его результаты вычисления возможной погрешности показателя степени, в которую надо возвести расстояние между точечными зарядами, в опыте Кавендиша составили величину 1/21600. В настоящее время закон Кулона для макроскопических тел проверен значительно точнее [2].

Представляет интерес оценка погрешности непосредственно опыта Кулона, возникающая из-за неравномерности распределения электрического заряда по поверхностям проводящих сфер. Такая оценка в принципе могла быть выполнена после 1813 г. благодаря трудам С.Д. Пуассона (1781–1840), который сумел определить распределение поверхностной плотности электрических зарядов на поверхностях двух заряженных проводящих сфер, помещенных на произвольное конечное расстояние друг от друга, в том числе и касающихся друг друга. У. Томсон (1824–1907) (лорд Кельвин) предложил использовать для изучения рассматриваемой физической ситуации метод отражений, аналитические выкладки практически были выполнены Б. Риманом (1826–1866) и впервые опубликованы в книге [3] и воспроизведены в классическом издании [4]. Упомянутое решение мало пригодно для практических расчетов взаимодействия двух проводящих заряженных сфер.

Современные методы решения задач электростатики позволяют выполнить необходимые расчеты в замкнутой форме и получить оценку возможной погрешности опытов Кулона в зависимости от геометрических параметров расчетной схемы и отношения величины зарядов на поверхности первой и второй сферы.

Рассмотрим две проводящие сферы (одна вне другой) с заданными значениями радиусов. Пусть центры сфер расположены на оси z с известным расстоянием между ними. Задачу о распределении потенциала электростатического поля в пространстве между сферами удобно решать с использованием бисферической систем координат [5, 6].

Бисферические координаты введем соотношениями:

$$x = \frac{a \cdot \sin\eta \cdot \cos\varphi}{\operatorname{ch}\mu - \cos\eta}, \quad y = \frac{a \cdot \sin\eta \cdot \sin\varphi}{\operatorname{ch}\mu - \cos\eta}, \quad z = \frac{a \cdot \operatorname{sh}\mu}{\operatorname{ch}\mu - \cos\eta}, \tag{1}$$

где a — параметр бисферической системы координат. Коэффициенты Ляме бисферической системы координат имеют вид

$$h_\mu = \frac{a}{\operatorname{ch}\mu - \cos\eta}, \quad h_\eta = \frac{a}{\operatorname{ch}\mu - \cos\eta}, \quad h_\varphi = \frac{a \cdot \sin\eta}{\operatorname{ch}\mu - \cos\eta},$$

расстояние от начала координат до точки наблюдения определяется выражением

$$r = a\sqrt{\frac{\operatorname{ch}\mu + \cos\eta}{\operatorname{ch}\mu - \cos\eta}}.$$

Пределы изменения бисферических координат суть:

$$|\mu| < \infty, \quad 0 < \eta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

Распределение в свободном от электрических зарядов пространстве потенциала электростатического поля описывается уравнением Лапласа

$$\Delta\psi = \frac{1}{h_\mu^3}\left[\frac{\partial}{\partial\mu}\left(h_\mu\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right) + \frac{1}{\sin\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(h_\mu\sin\eta\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right) + \frac{h_\mu}{\sin^2\eta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right] = 0. \tag{2}$$

Уравнение Лапласа в бисферических координатах допускает разделение переменных

$$\psi = \sqrt{\operatorname{ch}\mu - \cos\eta}\cdot M(\mu)\,H(\eta)\,\Phi(\varphi).$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций $\Phi(\varphi)$, $M(\mu)$ и $H(\eta)$ имеет вид

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -m^2\Phi,$$

$$\frac{d^2M}{d\mu^2} = \left(n + \frac{1}{2}\right)M,$$

$$\frac{1}{\sin\eta}\frac{d}{d\eta}\sin\eta\frac{dH}{d\eta} + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\eta}\right)H,$$

где m и n — целые числа $(m \leqslant n)$.

Элементарное решение уравнения (2) имеет форму

$$\sqrt{\operatorname{ch}\mu - \cos\eta}\cdot e^{\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\mu}\,P_n^m(\cos\eta),$$

где $P_n^m(\cos\eta)$ — присоединенные полиномы Лежандра. В задачах с осевой симметрией (рассматриваемый случай) параметр $m = 0$, поскольку потенциал электростатического поля не должен зависеть от угловой координаты φ. При этом элементарное решение приобретает форму

$$\sqrt{\operatorname{ch}\mu - \cos\eta}\cdot e^{\pm(n+\frac{1}{2})\cdot\mu}\,P_n^(\cos\eta),$$

где $P_n(\cos\eta)$ — полином Лежандра степени n.

Общее решение уравнения Лапласа (2) можно записать в виде

$$\psi = \sqrt{\operatorname{ch}\mu - \cos\eta}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\mu} + B_n e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\mu}\right]P_n(\cos\eta).$$

Уравнение $\mu = 0$ определяет в пространстве поверхность сферы, центр которой лежит на оси симметрии. Допустим, что сферические поверхности, описываемые уравнениями $\mu = \mu_1 = \text{const}$ и

$\mu = \mu_2 =$ const, — граничные поверхности идеальных проводников, тогда на этих поверхностях должны выполняться условия

$$\begin{aligned} \psi &= V_1 = \text{ const}, \quad \mu = \mu_1, \\ \psi &= V_2 = \text{ const}, \quad \mu = \mu_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Распределение в пространстве вне описанных сфер (случай $\mu_1\mu_2 < 0$) потенциала электростатического поля, удовлетворяющее граничным условиям (3), имеет вид

$$\psi = \sqrt{2}\,\sqrt{\operatorname{ch}\mu - \cos\eta}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\begin{array}{l} V_1 e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot|\mu_1|}\,\dfrac{\operatorname{sh}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(\mu-\mu_2)\right)}{\operatorname{sh}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(\mu_1-\mu_2)\right)}+ \\ +V_2 e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot|\mu_2|}\,\dfrac{\operatorname{sh}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(\mu-\mu_1)\right)}{\operatorname{sh}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(\mu_2-\mu_1)\right)} \end{array}\right\} P_n(\cos\eta).$$

Распределение электрических зарядов по поверхности проводника пропорционально градиенту потенциала электростатического поля в малой окрестности этой поверхности. В системе единиц СГСЕ для поверхностной плотности электрических зарядов получаем

$$\sigma = -\frac{\operatorname{ch}\mu - \cos\eta}{4\pi\, a}\frac{\partial\psi}{\partial\mu}, \quad \mu = \mu_1,\ \mu_2.$$

Выпишем явные зависимости для распределения поверхностных плотностей электрического заряда на рассматриваемых сферах:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{\operatorname{ch}\mu - \cos\eta}{4\pi\, a}\,\left(F_{11}V_1 + F_{12}V_2\right); \\ \sigma_2 &= -\frac{\operatorname{ch}\mu - \cos\eta}{4\pi\, a}\,\left(F_{21}V_1 + F_{22}V_2\right), \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$F_{11} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\operatorname{sh}\mu_1}{\sqrt{\operatorname{ch}\mu_1 - \cos\eta}} + \sqrt{2}\sqrt{\operatorname{ch}\mu_1 - \cos\eta}\,\times\right.$$

$$\left.\times\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\operatorname{ch}(n+1/2)(\mu_1-\mu_2)}{\operatorname{sh}(n+1/2)(\mu_1-\mu_2)}\right)e^{-(n+1/2)|\mu_1|}P_n(\cos\eta),$$

$$F_{12} = \sqrt{2}\,\sqrt{\operatorname{ch}\mu_1 - \cos\eta}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\operatorname{sh}(n+1/2)(\mu_2-\mu_1)}\,e^{-(n+1/2)|\mu_2|}P_n(\cos\eta),$$

$$F_{21} = \sqrt{2}\,\sqrt{\operatorname{ch}\mu_2 - \cos\eta}\,\times$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\operatorname{sh}(n+1/2)(\mu_1-\mu_2)}\,e^{-(n+1/2)\,|\mu_1|}P_n(\cos\eta), \quad (5)$$

$$F_{22} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\operatorname{sh}\mu_2}{\sqrt{\operatorname{ch}\mu_2-\cos\eta}} + \sqrt{2}\sqrt{\operatorname{ch}\mu_2-\cos\eta}\times\right.$$

$$\left.\times\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\operatorname{ch}(n+1/2)(\mu_2-\mu_1)}{\operatorname{sh}(n+1/2)(\mu_2-\mu_1)}\right)e^{-(n+1/2)|\mu_2|}P_n(\cos\eta).$$

Площадь элементарного участка поверхности сферы, описываемой уравнением $\mu =$ const, имеет вид

$$dS = h_\eta\, h_\varphi\, d\eta\, d\varphi = \frac{a^2\sin\eta}{(\operatorname{ch}\mu-\cos\eta)^2}.$$

Зависимости (4), (5) позволяют рассчитать суммарные величины электрических зарядов на рассматриваемых сферических поверхностях:

$$Q_1(a,\mu_1,\mu_2,V_1,V_2) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sigma_1 a^2\sin\eta\, d\eta\, d\varphi}{(\operatorname{ch}\mu_1-\cos\eta)^2},$$

$$Q_2(a,\mu_1,\mu_2,V_1,V_2) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sigma_2 a^2\sin\eta\, d\eta\, d\varphi}{(\operatorname{ch}\mu_2-\cos\eta)^2}.$$

Интегрирование по угловой координате φ сводится к умножению подынтегрального выражения на величину 2π, а интегрирование по переменной η может быть выполнено в аналитической форме с учетом известного соотношения:

$$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}\mu-\cos\eta}} = \sqrt{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)|\mu|}P_n(\cos\eta),$$

и условия ортогональности полиномов Лежандра:

$$\int_0^{\pi}P_m(\cos\eta)\,P_n(\cos\eta)\sin\eta\, d\eta = \begin{cases} 0 \;\text{ при }\; m\neq n,\\ \dfrac{2}{2n+1}\;\text{ при }\; n=m.\end{cases}$$

Окончательные выражения для расчета величин электрического заряда на поверхностях рассматриваемых сфер имеют вид

$$Q_1 = Q_{11}V_1 + Q_{12}V_2, \quad Q_2 = Q_{21}V_1 + Q_{22}V_2, \quad (6)$$

где

$$Q_{11} = -a \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)|\mu_1|} \left[\frac{\mu_1}{|\mu_1|} + \frac{\operatorname{ch}\left(n+\dfrac{1}{2}\right)(\mu_1-\mu_2)}{\operatorname{sh}\left(n+\dfrac{1}{2}\right)(\mu_1-\mu_2)} \right],$$

$$Q_{12} = -a \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)(|\mu_1|+|\mu_2|)} \frac{1}{\operatorname{sh}\left(n+\dfrac{1}{1}\right)(\mu_2-\mu_1)},$$

$$Q_{21} = -a \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)(|\mu_1|+|\mu_2|)} \frac{1}{\operatorname{sh}\left(n+\dfrac{1}{1}\right)(\mu_1-\mu_2)},$$

$$Q_{22} = -a \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)|\mu_2|} \left[\frac{\mu_2}{|\mu_2|} + \frac{\operatorname{ch}\left(n+\dfrac{1}{2}\right)(\mu_2-\mu_1)}{\operatorname{sh}\left(n+\dfrac{1}{2}\right)(\mu_2-\mu_1)} \right].$$

Линейная форма связи между электрическими потенциалами рассматриваемых сфер и электрическими зарядами этих сфер (6) позволяет в зависимости от входных условий исследования использовать в качестве заданных априори величин либо потенциалы, либо электрические заряды на поверхности заряженных сфер.

При исследовании возможной погрешности классических опытов Кулона удобно считать заданными радиусы первой и второй сфер r_1 и r_2 и расстояние между центрами рассматриваемых сфер R_0. Параметры бисферической системы координат определяются при этом следующими зависимостями:

$$\operatorname{ch}\mu_1 = \frac{R_0^2 + r_1^2 - r_2^2}{2R_0 r_1}, \quad \operatorname{ch}\mu_2 = \frac{R_0^2 + r_2^2 - r_1^2}{2R_0 r_2}, \quad a = \frac{R_0^2 - r_1^2 - r_2^2}{2R_0}.$$

Допустим, что при заданных изначально значениях электрических потенциалов на поверхностях рассматриваемых сфер рассчитаны величины электрических зарядов и рассчитана величина силы взаимодействия двух сфер в предположении, что эти заряды сосредоточены в центрах сферических поверхностей:

$$F_0 = \frac{Q_1 Q_2}{R_0^2}.$$

Рассчитаем силу взаимодействия рассматриваемых сфер с учетом полученного ранее распределения электрических зарядов по их поверхностям в условиях осевой симметрии задачи:

$$F = \int\limits_{S_1}\int\limits_{S_2} \frac{\sigma_1\,\sigma_2\,(z_2 - z_1)}{\left((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right)^{3/2}}\,dS_1 dS_2. \qquad (7)$$

Значения координат x, y, z в подынтегральной функции выражения (7) определяются в соответствии с соотношениями (1). Значение силы взаимодействия двух сфер, рассчитанное по формуле (7), является реальной величиной, а отношение F/F_0 может служить оценкой величины одной из составляющих погрешности классического опыта Кулона.

Как следует из проведенного анализа, величина погрешности зависит от соотношения геометрических параметров системы (отношение расстояния между центрами сфер к радиусу одной из сфер, отношение радиуса второй сферы к радиусу первой сферы) и отношения зарядов или потенциалов сфер.

Зависимость величины одной из составляющих погрешности классического опыта Кулона от отношения расстояния R_0 между центрами сфер к радиусу одной из сфер приведена в табл. 1. Отношения сил взаимодействия F/F_0 рассматриваемых сфер рассчитаны для одинаковых сфер радиусов $r_1 = r_2 = 0{,}3$ и изменяемой величины R_0 в диапазоне от 0,9 до 6,0. Значения величин потенциалов на поверхностях заряженных сфер задавались одинаковыми: $V_1 = V_2 = 1$. Все величины для расчета использованы в системе единиц СГСЕ.

В табл. 2 приведена зависимость F/F_0 от отношения радиуса второй сферы к радиусу первой сферы при $r_1 = 0{,}3$, $R_0 = 6{,}0$ и $V_1 = V_2 = 1{,}0$.

В табл. 3 приведена зависимость F/F_0 от отношения потенциалов поверхностей заряженных сфер при $r_1 = r_2 = 0{,}3$, $R_0 = 6{,}0$ и $V_1 = 1{,}0$.

Таблица 1

R_0/r	3	4	5	6	7	8	9	10	20
F/F_0	0,7552	0,8960	0,9411	0,9597	0,9688	0,9738	0,9768	0,9786	0,9829

Таблица 2

r_2/r_1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F/F_0	0,9817	0,9798	0,9773	0,9741	0,9702	0,9654	0,9596	0,9525	0,9437

Таблица 3

V_2/V_1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F/F_0	0,9829	0,9825	0,9822	0,9818	0,9813	0,9807	0,9801	0,9794	0,9785

Анализ приведенной серии результатов численных расчетов позволяет выбрать приемлемую комбинацию значимых параметров для обеспечения заданной точности измерений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уиттекер Э. История теории эфира и электричества. – Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. – 512 с.
2. Калашников С. Г. Электричество: Учеб. пособие. – 5-е изд., испр. и доп. – М.: Наука, 1985. – 576 с.
3. Hattendorf. Vorlesungen ueber Schwere / Elektrizitaet und Magnetismus. – Hannover, 1876.
4. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. – Л. – М.: ОНТИ, 1937. – 998 с.
5. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. – Т. 1. – 930 с.
6. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. –М.: Изд-во иностранной литературы, 1960. – Т. 2. – 886 с.

Статья поступила в редакцию 18.10.2006

Анатолий Макарович Макаров родился в 1939 г., окончил в 1966 г. МВТУ им. Н.Э. Баумана. Д-р техн. наук, профессор кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э.Баумана, лауреат Государственной премии СССР в области науки и техники. Автор более 200 научных работ в области математического моделирования физических процессов.

A. M. Makarov (b. 1939) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1966. D. Sc.(Eng.), professor of “Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Winner of the State Prize if the USSR in Science and Technology. Author of more than 200 publications in the field of mathematical simulation of physical processes.

Любовь Александровна Лунёва родилась в 1948 г., окончила в 1971 г. МВТУ им. Н.Э. Баумана. Канд. техн. наук, доцент кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 30 научных работ в области математической физики.

L.A. Lunyova (b. 1948) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1971. Ph. D. (Eng.), assoc. professor of “Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 30 publications in the field of mathematical physics.

Константин Анатольевич Макаров родился в 1968 г., окончил в 1991 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Канд. техн. наук, и.о. доцента кафедры “Гидравлика” МГТУ им. Н.Э.Баумана. Автор более 20 научных работ в области гидродинамических процессов.

A. M. Makarov (b. 1939) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1966. Ph. D. (Eng.), acting assoc. professor of “Hydraulics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 20 publications in the field of hydro-dynamical processes.