

СПЕЦИФИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ДВУХФАЗНОМ ПОРИСТОМ МАТЕРИАЛЕ*

А.В. Аттетков, И.К. Волков, Е.В. Пилявская

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия
e-mail: e.pilyavskaya@mail.ru

Рассмотрена задача о стационарной ударной волне, распространяющейся в двухфазном пористом материале — несжимаемой вязкопластической среде, содержащей сферические поры одинакового радиуса (регулярная ячеистая схема; наличием газа в порах пренебрегается) с покрытием их поверхности (несжимаемая вязкая среда). Предполагается, что характерная длина волны много больше размеров пор и расстояния между ними. Разработана математическая модель, используемая при анализе волнового профиля в изучаемой системе. С применением методов качественной теории дифференциальных уравнений обоснована возможность существования минимальной скорости распространения ударной волны в двухфазном пористом материале. Отмечено, что ее появление физически обусловлено проявлением механических свойств вязкопластической фазы двухфазного пористого материала. Подробно исследован инерционный режим пластического затекания пор. Теоретически установлена возможность существования критической скорости распространения ударной волны, приводящей к полному пластическому затеканию пор во фронте волны.

Ключевые слова: ударная волна, двухфазный пористый материал, качественная теория дифференциальных уравнений.

SPECIFIC FEATURES OF SHOCK WAVE PROPAGATION IN THE TWO-PHASE POROUS MATERIAL

A.V. Attetkov, I.K. Volkov, E.V. Pilyavskaya

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
e-mail: e.pilyavskaya@mail.ru

The problem on a stationary shock wave propagating in a two-phase porous material is considered. The material is an incompressible viscoplastic medium containing spherical pores of identical radius (a regular cellular scheme; the presence of gas in pores is neglected) with covering of their surfaces (incompressible viscous medium). It is supposed that the characteristic wavelength is much more than sizes of pores and distances between them. The mathematical model used in the analysis of a wave profile in the system under study is developed. The possibility of existence of the minimum speed of the shock wave propagation in a two-phase porous material is theoretically substantiated with application of methods of the qualitative theory of differential equations. It is noted that its emergence is physically caused by mechanical properties of a viscoplastic phase of a two-phase porous material. The inertial mode of a plastic wicking of pores is investigated in detail. The possibility of existence of the critical speed of the shock wave propagation leading to the full plastic wicking of pores at the wave front is theoretically established.

Keywords: shock wave, two-phase porous material, qualitative theory of differential equations.

* Материалы статьи основаны на докладе, сделанном на VII Всероссийской конференции “Необратимые процессы в природе и технике”, Москва, 29–31 января 2013 г.

Постановка задачи и математическая модель. Рассматривается задача о стационарной ударной волне (УВ) [1–5], распространяющейся со скоростью D в двухфазном пористом материале — несжимаемой вязкопластической среде (фаза 1), содержащей сферические поры радиуса a (регулярная ячеистая схема [6]; наличием газа в порах пренебрегается) с покрытием их поверхности (фаза 2; несжимаемая вязкая среда). В предположении, что характерная длина волны много больше размеров пор и расстояния между ними, в системе координат, связанной с волной, интегралы уравнений сохранения массы и импульса на фронте УВ можно представить в виде, справедливом для всех промежуточных состояний в волне (объемным содержанием фазы 2 пренебрегается) [4, 5],

$$p - p_0 = \rho_s D^2 (\alpha_0 - \alpha) \alpha_0^{-2}, \quad (1)$$

где

$$p_0 = \frac{2Y}{3} \ln \frac{\alpha_0}{\delta + \alpha_0 - 1} \quad (2)$$

— амплитуда упругого предвестника (Y — предел текучести материала фазы 1). При этом зависимости между среднеинтегральными и фазовыми значениями величин двухфазного пористого материала определяются равенствами [4]

$$\begin{aligned} p &= \alpha^{-1} [\delta p_2 + (1 - \delta) p_1]; \\ \rho &= \alpha^{-1} \rho_s = \alpha^{-1} [\delta \rho_2 + (1 - \delta) \rho_1] \approx \alpha^{-1} \rho_1; \\ \alpha &= \frac{b^3}{b^3 - a^3}; \quad \delta = \frac{c^3 - a^3}{b^3 - a^3}, \end{aligned}$$

где p — давление; ρ — плотность; b — радиус сферического объема характерного (представительного) элемента двухфазного пористого материала; c — радиус контактной границы фаз; α, δ — концентрационные симплексы подобия пористого материала. При этом, согласно [4], результирующее уравнение связи, определяющее скачок начального состояния двухфазного пористого материала во фронте УВ, динамически неравновесно и может быть представлено в виде суммы динамических слагаемых $p_d(\ddot{\alpha}, \dot{\alpha}, \alpha, \delta)$ и $p_v(\dot{\alpha}, \alpha, \delta)$, отражающих инерционные и вязкие эффекты при затекании пор, и слагаемого $p_s(\alpha, \delta)$, характеризующего статическое сопротивление материала фазы 1,

$$p = p_d(\ddot{\alpha}, \dot{\alpha}, \alpha, \delta) + p_v(\dot{\alpha}, \alpha, \delta) + p_s(\alpha, \delta). \quad (3)$$

Уравнение (1) с учетом равенства (2) и уравнения связи (3), в котором нужно перейти к переменному $\xi = (x - Dt)/a_0$, определяет структуру фронта стационарной УВ в двухфазном пористом материале. Математическая модель, используемая при анализе волнового про-

филя в изучаемой системе, имеет вид:

$$\frac{d^2\alpha}{d\xi^2} = \left\{ \frac{B(\alpha, \delta, \gamma)}{6} \left(\frac{d\alpha}{d\xi} \right)^2 + \frac{4kR(\alpha_0 - 1)^{2/3}}{3(\alpha - 1)} \times \right. \\ \left. \times \frac{(\alpha - 1)(1 - \delta) + \zeta\alpha\delta}{\delta + \alpha - 1} \left(\frac{d\alpha}{d\xi} \right) - F(\alpha, \alpha_0, \delta, \gamma, k) \right\} \times \\ \times A^{-1}(\alpha, \delta, \gamma), \quad \xi > 0; \quad (4)$$

$$\exists \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{d\alpha}{d\xi} = 0; \quad \exists \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \alpha = \alpha_0,$$

где

$$F(\alpha, \alpha_0, \delta, \gamma, k) = \alpha(\alpha_0 - 1)^{2/3} \times \\ \times \left\{ [1 + (\gamma - 1)\delta] \frac{\alpha_0 - \alpha}{\alpha_0^2} + \frac{2k^2}{3} \ln \frac{\alpha_0(\delta + \alpha - 1)}{\alpha(\delta + \alpha_0 - 1)} \right\}; \quad (5) \\ \alpha \in [1, \alpha_0]; \quad \zeta \in \mathbb{R}^+; \quad \gamma \in \mathbb{R}^+; \quad 0 < \delta \leq 1;$$

и структура функционалов $A(\alpha, \delta, \gamma)$ и $B(\alpha, \delta, \gamma)$ известна [4].

В математической модели (4), (5)

$$k = \frac{1}{D} \sqrt{\frac{Y}{\rho_1}}; \quad R = \frac{\eta}{\alpha_0 \sqrt{Y \rho_1}}; \quad \zeta = \frac{\mu}{\eta}; \quad \gamma = \frac{\rho_2}{\rho_1};$$

η, μ — коэффициенты вязкости фаз 1 и 2 соответственно; индекс “0” относится к начальным значениям величин.

Системы алгебраических уравнений для определения точек покоя системы (4), (5). Для достижения цели исследования удобнее ввести новое переменное

$$g \triangleq d\alpha/d\xi. \quad (6)$$

В этом случае $d^2\alpha/d\xi^2 = dg/d\xi$ и, согласно (4), (5), приходим к нормальной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\alpha}{d\xi} = g; \\ \frac{dg}{d\xi} = \left\{ \frac{B(\alpha, \delta, \gamma)}{6} g^2 + \frac{4kR(\alpha_0 - 1)^{2/3}}{3(\alpha - 1)} \times \right. \\ \left. \times \frac{(\alpha - 1)(1 - \delta) + \zeta\alpha\delta}{\delta + \alpha - 1} g - F(\alpha, \alpha_0, \delta, \gamma, k) \right\} A^{-1}(\alpha, \delta, \gamma). \quad (7)$$

В фазовой плоскости $\alpha 0g$ точки покоя изучаемой системы, представленной математической моделью (4), (5), определяются как корни

алгебраических систем

$$\begin{aligned} g &= 0, \\ F(\alpha, \alpha_0, \delta, \gamma, k) &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

и

$$\begin{aligned} g &= 0, \\ A(\alpha, \delta, \gamma) &= \infty, \end{aligned} \quad (9)$$

принадлежащие множеству (рис. 1)

$$G = \left\{ \left[\begin{array}{c} \alpha \\ g \end{array} \right] \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \alpha \leq \alpha_0 \right\},$$

что непосредственно следует из (5) и (7). А так как $g = 0$ и в системе (8), и в системе (9), то в случае своего существования любая точка покоя изучаемой системы принадлежит отрезку $[1, \alpha_0]$ оси 0α , т.е. имеет координаты $(\alpha, 0)$, где $\alpha \in [1, \alpha_0]$.

Точки покоя, определяемые системой (8).

1. Согласно (8) и (5), при любых значениях входящих параметров всегда существует точка покоя $O_0 = (\alpha_0, 0)$, являющаяся очевидной.

2. Выясним, является ли точкой покоя изучаемой системы точка $O_1 = (1, 0)$; ее наличие связано с физическим процессом полного затекания пор во фронте УВ. Следует отметить, что, согласно (5), имеет место очевидное неравенство

$$1 + (\gamma - 1)\delta > 0, \quad (10)$$

а второе уравнение системы (8) может быть представлено в эквивалентном виде

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{2k^2\alpha_0^2}{3[1 + (\gamma - 1)\delta]} \ln \frac{\alpha_0(\delta + \alpha - 1)}{\alpha(\delta + \alpha_0 - 1)}. \quad (11)$$

Полагая в равенстве (11) $\alpha = 1$, приходим к новому равенству

$$\alpha_0 - 1 = -\frac{2k^2\alpha_0^2}{3[1 + (\gamma - 1)\delta]} \ln \frac{\alpha_0\delta}{\delta + \alpha_0 - 1}, \quad (12)$$

которое может быть реализовано лишь в том случае, когда $\alpha_0\delta/(\delta + \alpha_0 - 1) < 1$, т.е. при выполнении условия

$$\delta < 1, \quad (13)$$

так как имеет место неравенство (10), согласно (5) справедливо неравенство $\alpha_0 - 1 > 0$ и

$$\left(\frac{\alpha_0\delta}{\delta + \alpha_0 - 1} < 1 \right) \Leftrightarrow (\alpha_0\delta < \delta + \alpha_0 - 1) \Leftrightarrow (\delta < 1).$$

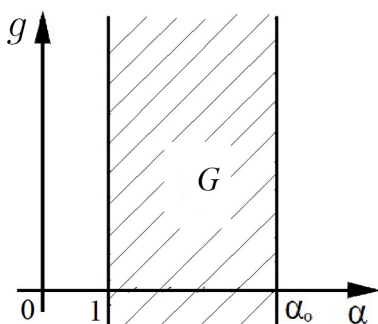


Рис. 1. Допустимое множество для точек покоя изучаемой системы

Таким образом, точка $O_1 = (1, 0)$ — точка покоя изучаемой системы, если выполнено условие (13) и равенство

$$k^2 = k_1^2 \triangleq \frac{3(\alpha_0 - 1)[1 + (\gamma - 1)\delta]}{2\alpha_0^2 \ln[(\delta + \alpha_0 - 1)/(\alpha_0\delta)]}, \quad (14)$$

которое непосредственно следует из (12).

3. При выполнении неравенства (13) выражение, стоящее в правой части равенства (11) под знаком натурального логарифма, принимает лишь значения, меньшие единицы $\forall \alpha \in (1, \alpha_0)$, поскольку

$$\left(\frac{\alpha_0(\delta + \alpha - 1)}{\alpha(\delta + \alpha_0 - 1)} < 1 \right) \Leftrightarrow (\delta < 1|_{\alpha_0 > \alpha}). \quad (15)$$

4. Пусть далее

$$\begin{aligned} \varphi_1(\alpha) &\triangleq \alpha_0 - \alpha; \quad \varphi_2(\alpha, k^2) \triangleq k^2 \varphi(\gamma, \delta) \ln \frac{\alpha(\delta + \alpha_0 - 1)}{\alpha_0(\delta + \alpha - 1)}; \\ \varphi(\gamma, \delta) &\triangleq \frac{2\alpha_0^2}{3[1 + (\gamma - 1)\delta]}. \end{aligned} \quad (16)$$

В этом случае с учетом (10), (13), (15) и (16) при $\alpha \in (1, \alpha_0)$ имеют место неравенства

$$\varphi(\gamma, \delta) > 0; \quad \varphi_1(\alpha) > 0; \quad \varphi_2(\alpha, k^2)|_{k^2 > 0} > 0,$$

а так как

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \varphi_2(\alpha, k^2)}{\partial \alpha} \right|_{k^2 > 0} &= -k^2 \varphi(\gamma, \delta) \frac{1 - \delta}{\alpha(\delta + \alpha - 1)} \Big|_{k^2 > 0} < 0; \\ \left. \frac{\partial^2 \varphi_2(\alpha, k^2)}{\partial \alpha^2} \right|_{k^2 > 0} &= k^2 \varphi(\gamma, \delta) (1 - \delta) \frac{\delta + 2\alpha - 1}{\alpha^2(\delta + \alpha - 1)^2} \Big|_{k^2 > 0} > 0; \end{aligned}$$

$$\varphi_2(\alpha_0, k^2) \equiv 0, \quad \forall k^2 \geq 0;$$

$$\left. \varphi_2(\alpha, k^2) \right|_{\substack{\alpha \in (1, \alpha_0), \\ k^2 \rightarrow +0}} \rightarrow +0;$$

$$\varphi_2(1, k^2) = k^2 \varphi(\gamma, \delta) \ln \frac{\delta + \alpha_0 - 1}{\alpha_0 \delta};$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_2(\alpha, k^2)}{\partial \alpha} \right|_{\substack{\alpha = \alpha_0, \\ k^2 > 0}} = k_{\max}^2 \varphi(\gamma, \delta) \frac{\delta - 1}{\alpha_0(\delta + \alpha_0 - 1)} = -1;$$

$$k_{\max}^2 = \frac{\alpha_0(\delta + \alpha_0 - 1)}{\varphi(\gamma, \delta)(1 - \delta)}, \quad (17)$$

то при $k_1^2 < k^2 < k_{\max}^2$ уравнение (12) определяет единственную точку

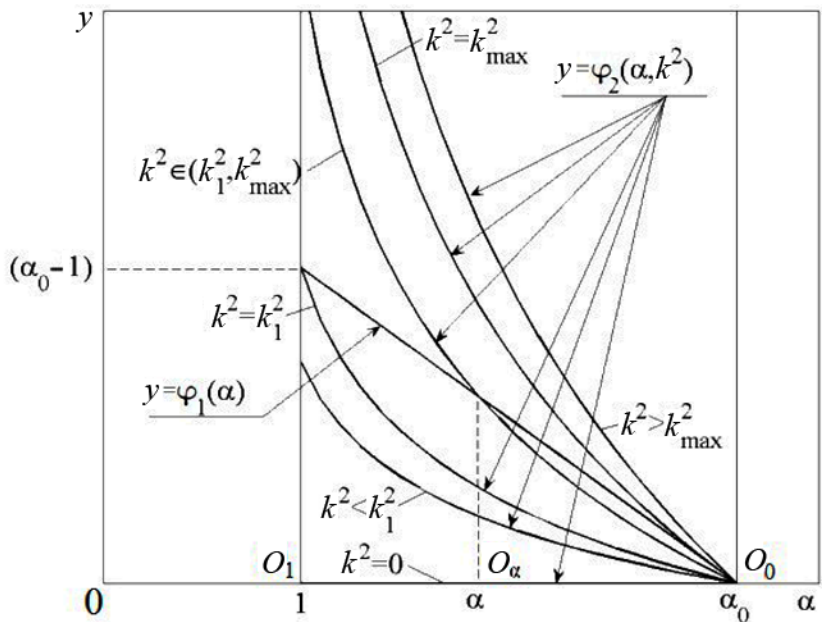


Рис. 2. Зависимость положения третьей точки покоя изучаемой системы от значения бифуркационного параметра k

покоя $O_\alpha = (\alpha, 0)$ (рис. 2), где $\alpha \in (1, \alpha_0)$, а значения k_1^2 и k_{\max}^2 определены равенствами (14) и (17) соответственно. Кроме того, при $k^2 < k_1^2$ система (8) определяет единственную точку покоя $O_0 = (\alpha_0, 0)$. При $k^2 = k_1^2$ появляется вторая точка покоя $O_1 = (1, 0)$, которая с ростом значения параметра k^2 начинает “перемещаться” по отрезку, соединяющему точки $(1, \alpha_0 - 1)$ и $(\alpha_0, 0)$, от точки $(1, \alpha_0 - 1)$ к точке $(\alpha_0, 0)$. При $k^2 = k_{\max}^2$ эта вторая точка покоя “попадает” в точку покоя $O_0 = (\alpha_0, 0)$; при дальнейшем росте параметра k^2 данная точка исчезает из зоны анализа. Значение параметра k_{\max}^2 , определенное равенством (17), где функционал $\varphi(\gamma, \delta)$ задан последним равенством (16), устанавливает условие существования минимальной скорости распространения УВ в двухфазном пористом материале:

$$D_{\min} = \left\{ \frac{2Y\alpha_0(1-\delta)}{3\rho_1(\delta + \alpha_0 - 1)[1 + (\gamma - 1)\delta]} \right\}^{1/2}. \quad (18)$$

Ее появление физически обусловлено проявлением механических свойств фазы 1 изучаемого материала. При $\delta = 0$ равенство (18) известно [1, 2].

Классификация точек покоя. Согласно (5), система (9) определяет единственную точку покоя $O_1 = (1, 0)$, которая всегда существует безотносительно к значениям определяющих безразмерных параметров системы. При этом параметр k^2 является бифуркационным параметром. Действительно, при $k^2 \in (0, k_1^2) \cup (k_{\max}^2, +\infty)$ изучаемая

система имеет две точки покоя $O_1 = (1, 0)$ и $O_0 = (\alpha_0, 0)$. При значении параметра $k^2 = k_1^2$, где k_1^2 определено равенством (14), точка покоя O_1 становится двойной; с ростом значений параметра k^2 из этой точки выходит третья точка покоя $O_\alpha = (\alpha, 0)$ и начинает свое движение по оси 0α в направлении точки покоя $O_0 = (\alpha_0, 0)$. При $k^2 = k_{\max}^2$, где k_{\max}^2 определено равенством (17), точка O_0 становится уже двойной точкой покоя.

Для удобства дальнейших рассуждений представим систему (7) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{d\xi} &= f(\alpha, g); \\ \frac{dg}{d\xi} &= \varphi(\alpha, g), \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$f(\alpha, g) = g;$$

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha, g) &= \left\{ \frac{B(\alpha, \delta, \gamma)}{6} g^2 + \frac{4kR(\alpha_0 - 1)^{2/3}}{\times} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{(\alpha - 1)(1 - \delta) + \zeta\alpha\delta}{\delta + \alpha - 1} g - F(\alpha, \alpha_0, \delta, \gamma, k) \right\} A^{-1}(\alpha, \delta, \gamma). \end{aligned}$$

Качественное поведение фазовых кривых системы (19) определяется корнями характеристического уравнения [7, 8]

$$|J - \lambda I_2| = 0,$$

где $J = J(\alpha, g)$ – матрица Якоби, имеющая вид

$$J(\alpha, g) \triangleq \begin{bmatrix} \partial f / \partial \alpha & \partial f / \partial g \\ \partial \varphi / \partial \alpha & \partial \varphi / \partial g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \partial \varphi / \partial \alpha & \partial \varphi / \partial g \end{bmatrix};$$

λ – собственное число матрицы Якоби; I_2 – единичная матрица второго порядка.

В точках покоя изучаемой системы, определяемых как корни алгебраической системы (8),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} &= -A^{-1}(\alpha, \delta, \gamma) (\alpha_0 - 1)^{2/3} \left\{ \frac{2k^2(1 - \delta)}{3(\delta + \alpha - 1)} - \frac{1 + (\gamma - 1)\delta}{\alpha_0^2} \alpha \right\}; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial g} &= \frac{4kR(\alpha_0 - 1)^{2/3}}{3(\alpha - 1)} \frac{(\alpha - 1)(1 - \delta) + \zeta\alpha\delta}{\delta + \alpha - 1} A^{-1}(\alpha, \delta, \gamma), \end{aligned} \quad (20)$$

а собственные числа матрицы Якоби в этих точках имеют вид

$$|J - \lambda I_2| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \partial\varphi/\partial\alpha & \partial\varphi/\partial g - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial g} \pm \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial g}\right)^2 + 4\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}} \right\}.$$

Точка покоя системы (19) асимптотически устойчива, если $(\operatorname{Re}\lambda_1 < 0 \wedge \operatorname{Re}\lambda_2 < 0)$; устойчива — при $(\operatorname{Re}\lambda_1 \leq 0 \wedge \operatorname{Re}\lambda_2 \leq 0)$; неустойчива — в случае $(\operatorname{Re}\lambda_1 \geq 0 \vee \operatorname{Re}\lambda_2 \geq 0)$, где $\operatorname{Re}\lambda$ — вещественная часть комплексного числа λ .

Критическая скорость распространения УВ (инерционный режим пластического затекания пор). При $R = 0$ исходное дифференциальное уравнение (4) интегрируется и с учетом (6) может быть представлено в виде

$$g^2 = \frac{2(\alpha_0 - 1)^{2/3}}{3} A^{-1}(\alpha, \delta, \gamma) \left\{ [1 + (\gamma - 1)\delta] \frac{(\alpha_0 - \alpha)^2 (2\alpha + \alpha_0)}{2\alpha_0^2} - \right. \\ \left. - k^2 \left[(1 - \delta)(\alpha_0 - \alpha) + (1 - \delta)^2 \ln \frac{\delta + \alpha_0 - 1}{\delta + \alpha - 1} + \alpha^2 \ln \frac{\alpha_0(\delta + \alpha - 1)}{\alpha(\delta + \alpha_0 - 1)} \right] \right\}. \quad (21)$$

Рассмотрим поведение полученного решения в окрестности точки покоя $O_1 = (1, 0)$. Формально принимая $\alpha = 1$ в множителе в фигурных скобках правой части выражения (21) и учитывая асимптотическую оценку

$$A(\alpha, \delta, \gamma) \underset{\alpha \rightarrow 1+0}{\sim} (3\varepsilon^{1/3})^{-1},$$

где $\varepsilon = \alpha - 1$, получаем

$$g^2 = \frac{\varepsilon^{1/3} (\alpha_0 - 1)^{8/3} (2 + \alpha_0)}{2\alpha_0^2} [1 + (\gamma - 1)\delta] \left\{ 1 - \left(\frac{k}{k_{cr}}\right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{4\varepsilon\alpha_0^2 k^2}{(\alpha_0 - 1)^2 (2 + \alpha_0) [1 + (\gamma - 1)\delta]} \ln \frac{1}{\delta + \varepsilon} \right\}; \\ k_{cr}^2 = (\alpha_0 - 1)^2 (2 + \alpha_0) [1 + (\gamma - 1)\delta] \times \\ \times \left\{ 2\alpha_0^2 \left[(1 - \delta)(\alpha_0 - 1) - \delta(2 - \delta) \ln \frac{\delta + \alpha_0 - 1}{\delta} + \ln \alpha_0 \right] \right\}^{-1}.$$

Значение параметра k_{cr}^2 устанавливает условие существования критической скорости распространения УВ, превышающей D_{\min} , которая определена равенством (18), и приводящей к полному пластическому затеканию пор во фронте УВ:

$$D_{cr} = \frac{\alpha_0}{\alpha_0 - 1} \times \left\{ \frac{2Y [(\alpha_0 - 1)(1 - \delta) - \delta(2 - \delta) \ln [\delta^{-1}(\delta + \alpha_0 - 1)] + \ln \alpha_0]}{\rho_1(\alpha_0 + 2)[1 + (\gamma - 1)\delta]} \right\}^{1/2}.$$

При этом справедлива асимптотическая оценка

$$(k = k_{cr}) \Rightarrow g \underset{\varepsilon \rightarrow +0}{\sim} \varepsilon^{2/3} [\ln(\delta + \varepsilon)]^{-1/3}.$$

Установление топологической структуры разбиения фазовой плоскости $g0\varepsilon$ на траектории по их типам является предметом дальнейших исследований авторов.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (грант НШ – 255.2012.8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дунин С.З., Сурков В.В. Динамика закрытия пор во фронте ударной волны // Прикладная математика и механика. 1979. Т. 43, вып. 3. С. 511–518.
2. Дунин С.З., Сурков В.В. Структура фронта ударной волны в твердой пористой среде // Журнал прикладной механики и технической физики. 1979. № 5. С. 106–114.
3. Влияние неравновесного разогрева на поведение пористого вещества при ударном сжатии / А.В. Аттетков [и др.] // Журнал прикладной механики и технической физики. 1984. № 6. С. 120–127.
4. Attetkov A.V., Golovina E.V., Ermolaev B.S. Mathematical simulation of mesoscopic processes of heat dissipation and heat transfer in a two-phase porous material subjected to shock compression // Journal of Heat Transfer Research. 2008. Vol. 39, No. 6. P. 479–487.
5. Плявская Е.В., Аттетков А.В. Эффекты тепловой диссипации при распространении ударной волны в двухфазном пористом материале // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2011. № 3. С. 53–58.
6. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред: В 2 ч. М.: Наука, 1987.
7. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. М.: Мир, 1986. 248 с.
8. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990. 488 с.

REFERENCES

1. Dunin S.Z., Surkov V.V. Dynamics of the closing of pores at the shock wave front. *J. Appl. Math. Mech.*, 1979, vol. 43, no. 3, pp. 550–558. doi: 10.1016/0021-8928(79)90103-5
2. Dunin S.Z., Surkov V.V. Structure of a shock wave front in a porous solid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1979, vol. 20, no. 5, pp. 612–618.
3. Attetkov A.V., Vlasova L.N., Selivanov V.V., Solov'ev V.S. Effect of nonequilibrium heating on the behavior of a porous material in shock compression. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1984, vol. 25, no. 6, pp. 914–921.

4. *Attetkov A.V., Golovina E.V., Ermolaev B.S.* Mathematical simulation of mesoscopic processes of heat dissipation and heat transfer in a two-phase porous material subjected to shock compression. *Heat Transfer – Jpn. Res.*, 2008, vol. 39, no. 6. pp. 479–487. doi: 10.1615/HeatTransRes.v39.i6.20
5. *Pilyavskaya E.V., Attetkov A.V.* Effects of heat dissipation in the propagation of the shock wave in a two-phase porous material. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Ser. Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ. Ser. Nat. Sci.], 2011, no. 3. pp. 53–58 (in Russ.).
6. *Nigmatulin R.I.* Dinamika mnogofaznykh sred. V 2-kh chastyakh. [Dynamics of multiphase media. Parts 1 and 2]. Moscow, Nauka Publ., 1987.
7. *Arrowsmith D.K., Place C.M.* Ordinary Differential Equations: A Qualitative Approach with Applications. New York, Chapman and Hall, 1982. 252 p. (Russ. ed.: Errousmit D., Pleyes K. Obychkovennye differentsial'nye uravneniya. Kachestvennaya teoriya s prilozheniyami. Moscow, Mir Publ., 1986. 248 p.).
8. *Bautin N.N., Leontovich E.A.* Metody i priemy kachestvennogo issledovaniya dinamicheskikh sistem na ploskosti [Methods and techniques of the qualitative study of dynamical systems on the plane]. Moscow, Nauka Publ., 1990. 488 p.

Статья поступила в редакцию 14.01.2013

Александр Владимирович Аттетков — канд. техн. наук, старший научный сотрудник, доцент кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 100 научных работ в области физики горения и взрыва, химической физики и математического моделирования.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

A.V. Attetkov — Ph. D. (Eng.), senior researcher, assoc. professor of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 100 publications in the field of physics of combustion and explosion, chemical physics and mathematical simulation.

Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005 Russia.

Игорь Куприянович Волков — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 140 научных работ в области математической физики, математического моделирования и математической генетики.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

I.K. Volkov — Dr. Sci. (Phys.-Math.), professor of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 140 publications in the field of mathematical simulation and mathematical genetics.

Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005 Russia.

Елена Владимировна Пилявская — аспирантка кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 10 научных работ в области математического моделирования ударно-волновых процессов в многофазных средах.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Ye.V. Pilyavskaya — post-graduate of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 10 publications in the field of mathematical simulation of shock-wave processes in multiphase materials.

Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul., 5, Moscow, 105005 Russia.