УДК 517.958:57

П. А. Садовский

КРИТИЧЕСКИЕ СЛУЧАИ УСТОЙЧИВОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТРЕХВИДОВОЙ ПОПУЛЯЦИИ

Исследована устойчивость системы уравнений, описывающих математическую модель Лотки–Вольтерра трехвидовой конкуренции, в предположении, что характеристическое уравнение системы имеет нулевой корень кратности не менее единицы. Получены условия на коэффициенты, при которых система устойчива.

Рассмотрим математическую модель Лотки–Вольтерра трехвидовой конкуренции, описываемую системой уравнений [1]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(1 - x_1 - bx_2 - ax_3), \\ \dot{x}_2 = x_2(1 - ax_1 - x_2 - bx_3), \\ \dot{x}_3 = x_3(r - bx_1 - ax_2 - x_3), \end{cases}$$

$x_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ — численность популяции i-го вида; положительные коэффициенты a, b, r, характеризующие скорость изменения численности популяций, таковы, что система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + bx_2 + ax_3 = 1, \\ ax_1 + x_2 + bx_3 = 1, \\ bx_1 + ax_2 + x_3 = r \end{cases}$$

имеет единственное положительное решение $x_i = x_i^* > 0$.

Некритические случаи (с ненулевыми решениями характеристического уравнения линеаризованной системы) такого варианта модели подробно освещены в работах [1, 2]. В этой работе впервые исследуется устойчивость положения равновесия $M(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ в предположении, что характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет нулевые решения кратности не менее единицы, а ненулевые решения характеристического уравнения имеют отрицательную действительную часть. Случай, когда $a = b = 1$, не рассматривается, так как система с такими коэффициентами имеет либо бесконечно много, либо ни одного решения.

Более подробное описание модели Лотки–Вольтерра и альтернативных моделей популяций можно найти в работе [2].

Преобразование исходной системы. Уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = (y_1 + x_1^*)(1 - x_1^* - bx_2^* - ax_3^* - y_1 - by_2 - ay_3), \\ \dot{y}_2 = (y_2 + x_2^*)(1 - ax_1^* - x_2^* - bx_3^* - ay_1 - y_2 - by_3), \\ \dot{y}_3 = (y_3 + x_3^*)(r - bx_1^* - ax_2^* - x_3^* - by_1 - ay_2 - y_3). \end{cases} \qquad (1)$$

С учетом соотношений

$$\begin{cases} x_1^* + bx_2^* + ax_3^* = 1, \\ ax_1^* + x_2^* + bx_3^* = 1, \\ bx_1^* + ax_2^* + x_3^* = r \end{cases} \qquad (2)$$

получаем

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = (y_1 + x_1^*)(-y_1 - by_2 - ay_3), \\ \dot{y}_2 = (y_2 + x_2^*)(-ay_1 - y_2 - by_3), \\ \dot{y}_3 = (y_3 + x_3^*)(-by_1 - ay_2 - y_3) \end{cases} \qquad (3)$$

или

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -x_1^* y_1 - bx_1^* y_2 - ax_1^* y_3 - (y_1 + by_2 + ay_3)y_1, \\ \dot{y}_2 = -ax_2^* y_1 - x_2^* y_2 - bx_2^* y_3 - (ay_1 + y_2 + by_3)y_2, \\ \dot{y}_3 = -bx_3^* y_1 - ax_3^* y_2 - x_3^* y_3 - (by_1 + ay_2 + y_3)y_3. \end{cases}$$

Выразим x_i^* через коэффициенты a, b и r. Решение системы (2) таково:

$$x_i^* = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, 3,$$

где

$$\Delta = 1 + a^3 + b^3 - 3ab = (1 + a + b)F(a, b),$$

$$\Delta_1 = F(a,b) + (r-1)(b^2 - a), \qquad \Delta_2 = F(a,b) + (r-1)(a^2 - b),$$
$$\Delta_3 = F(a,b) + (r-1)(1 - ab), \quad F(a,b) = a^2 + b^2 + 1 - ab - a - b.$$

Так как функцию $F(a, b)$ можно преобразовать к виду

$$F(a,b) = \frac{(a + b - 2)^2}{4} + \frac{3(a - b)^2}{4} > 0,$$

то $\Delta > 0$, $\Delta_i \geqslant 0$.

Условия существования кратных нулевых решений характеристического уравнения. С учетом введенных обозначений получаем характеристическое уравнение следующего вида:

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0,$$

где $a_1 = x_1^* + x_2^* + x_3^*$, $a_2 = (x_1^*x_2^* + x_1^*x_3^* + x_2^*x_3^*)(1 - ab)$, $a_3 = \Delta x_1^*x_2^*x_3^*$.

Для существования одного нулевого корня и двух корней с отрицательной действительной частью характеристического уравнения достаточно выполнения следующих условий:

$$a_3 = 0, \qquad a_2 > 0, \qquad a_1 > 0,$$

равносильных

$$\begin{cases} x_1^* x_2^* x_3^* = 0, \\ (x_1^* x_2^* + x_1^* x_3^* + x_2^* x_3^*)(1 - ab) > 0, \\ x_1^* + x_2^* + x_3^* > 0. \end{cases}$$

Подставляя выражения для x_i^* и учитывая, что $\Delta > 0$ и $x_i^* = \dfrac{\Delta_i}{\Delta} > 0$, получаем

$$\begin{cases} \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 = 0, \\ \Delta_1 \Delta_2 + \Delta_1 \Delta_3 + \Delta_2 \Delta_3 > 0, \\ 1 - ab > 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Первое уравнение этой системы распадается на совокупность трех условий:

$$\left[\begin{array}{ll} \Delta_1 = F(a, b) + (r - 1)(b^2 - a) = 0, & \text{при } \Delta_2 \Delta_3 > 0, \\ \Delta_2 = F(a, b) + (r - 1)(a^2 - b) = 0, & \text{при } \Delta_1 \Delta_3 > 0, \\ \Delta_3 = F(a, b) + (r - 1)(1 - ab) = 0, & \text{при } \Delta_1 \Delta_2 > 0. \end{array} \right. \qquad (5)$$

Для существования двух нулевых решений и одного решения с отрицательной действительной частью характеристического уравнения достаточно выполнения следующих условий:

$$a_3 = 0, \qquad a_2 = 0, \qquad a_1 > 0,$$

равносильных

$$\begin{cases} x_1^* x_2^* x_3^* = 0, \\ (x_1^* x_2^* + x_1^* x_3^* + x_2^* x_3^*)(1 - ab) = 0, \\ x_1^* + x_2^* + x_3^* > 0. \end{cases}$$

Подставляя выражения для x_i^* и учитывая, что $\Delta > 0$ и $x_i^* = \dfrac{\Delta_i}{\Delta} > 0$, получаем два условия:

$$\Delta_1 \Delta_2 + \Delta_1 \Delta_3 + \Delta_2 \Delta_3 = 0$$

или

$$\begin{cases} \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 = 0, \\ 1 - ab = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Случай одного нулевого корня. Для исследования устойчивости системы в этом критическом случае приведем систему (3) к специальному виду [3–5]:

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = \Xi(\xi, \xi_1, \xi_2), \\ \dfrac{d\xi_1}{dt} = p_{11}\xi_1 + p_{12}\xi_2 + p_1\xi + \Xi_1(\xi, \xi_1, \xi_2), \\ \dfrac{d\xi_2}{dt} = p_{21}\xi_1 + p_{22}\xi_2 + p_2\xi + \Xi_2(\xi, \xi_1, \xi_2), \end{cases} \tag{7}$$

где $\Xi(\xi, \xi_1, \xi_2)$ и $\Xi_i(\xi, \xi_1, \xi_2)$, $i = 1, 2$ — аналитические функции, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка.

Условия существования нулевого корня характеристического уравнения (5) автоматически приводят систему (3) к специальному виду. Рассмотрим каждое из трех условий отдельно.

Будем предполагать, что $a \neq b$. Рассмотрим вначале случай $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2\Delta_3 \neq 0$. Введем обозначение

$$r = r_0 = 1 - \frac{F(a,b)}{b^2 - a}.$$

При замене переменных

$$\xi = y_1, \qquad \xi_1 = y_2, \qquad \xi_2 = y_3$$

система (7) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -(\xi + b\xi_1 + a\xi_2)\xi = \Xi(\xi, \xi_1, \xi_2), \\ \dot{\xi}_1 = -ax_2^*\xi - x_2^*\xi_1 - bx_2^*\xi_2 - (a\xi + \xi_1 + b\xi_2)\xi_1, \\ \dot{\xi}_2 = -bx_3^*\xi - ax_3^*\xi_1 - x_3^*\xi_2 - (b\xi + a\xi_1 + \xi_2)\xi_2. \end{cases} \tag{8}$$

Система (3) имеет решение

$$y_i = x_i^*(r) - x_i^*(r_0),$$

переходящее с учетом замены координат в следующее:

$$\xi_1 = x_2^*(r) - x_2^*(r_0), \quad \xi_2 = x_3^*(r) - x_3^*(r_0), \quad \xi = x_1^*(r) - x_1^*(r_0).$$

Это же решение является решением системы

$$\begin{cases} -(\xi + b\xi_1 + a\xi_2)\xi = 0, \\ -ax_2^*\xi - x_2^*\xi_1 - bx_2^*\xi_2 - (a\xi + \xi_1 + b\xi_2)\xi_1 = 0, \\ -bx_3^*\xi - ax_3^*\xi_1 - x_3^*\xi_2 - (b\xi + a\xi_1 + \xi_2)\xi_2 = 0. \end{cases}$$

Из последних двух уравнений системы получим

$$\xi_1 = \frac{b^2 - a}{1 - ab}\xi, \quad \xi_2 = \frac{a^2 - b}{1 - ab}\xi.$$

Подставив выражения $\xi_1(\xi)$ и $\xi_2(\xi)$ в первое уравнение системы, будем иметь

$$-\frac{\Delta}{1-ab}\xi = 0.$$

Это уравнение отвечает решению $\xi = x_1^*(r) - x_1^*(r_0)$ (при выполнении всех условий, необходимых для существования нулевого корня характеристического уравнения). Кроме того, два корня характеристического уравнения системы (8) (без первого уравнения системы) имеют отрицательные действительные части.

Таким образом, с учетом всех этих характеристик мы получили *особенный случай*. Как было доказано в работе [4], невозмущенное движение устойчиво, но не асимптотически. Кроме того, устойчиво всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному.

К такому же результату можно прийти, применив формально метод, предложенный Ляпуновым и приведенный в работе [4]. Для устойчивости системы такого вида необходимо, чтобы степень младшего члена разложения функции $\Xi(\xi, \xi_1, \xi_2)$ была нечетной, а коэффициент при нем отрицателен, если сама система удовлетворяет следующим ограничениям:

1) $\Xi(\xi, 0, 0)$ не обращается тождественно в нуль;

2) степень младшего члена разложения $\Xi_i(\xi, 0, 0)$ не меньше степени младшего члена разложения $\Xi(\xi, 0, 0)$;

3) все коэффициенты при линейных членах системы равны нулю.

Для выполнения последнего требования выполним еще одну замену переменных:

$$\xi_1 = u_1(\xi), \quad \xi_2 = u_2(\xi),$$

где функции $u_i(\xi)$, $i = 1, 2$, являются решениями нелинейной системы уравнений

$$\begin{cases} -ax_2^*\xi - x_2^*\xi_1 - bx_2^*\xi_2 - (a\xi + \xi_1 + b\xi_2)\xi_1 = 0, \\ -bx_3^*\xi - ax_3^*\xi_1 - x_3^*\xi_2 - (b\xi + a\xi_1 + \xi_2)\xi_2 = 0. \end{cases}$$

Поскольку это система четвертого порядка, существует четыре решения:

$$\begin{array}{llll} \xi_1 = -x_2^*, & \xi_1 = -x_2^*, & \xi_1 = -a\xi + bx_3^*, & \xi_1 = \dfrac{b^2 - a}{1 - ab}\xi, \\ \xi_2 = -x_3^*, & \xi_2 = -b\xi + ax_2^*, & \xi_2 = -x_3^*, & \xi_2 = \dfrac{a^2 - b}{1 - ab}\xi. \end{array}$$

Первые три решения не подходят (так как $\xi_i \neq$ const). Подставляя четвертое решение в выражение для $\Xi_i(\xi, \xi_1, \xi_2)$, получаем

$$\Xi_1 \equiv 0, \quad \Xi_2 \equiv 0.$$

Поскольку

$$\Xi_i = -\frac{d\xi_i}{d\xi}\Xi,$$

то

$$\Xi \equiv 0.$$

Таким образом, мы получили *особенный случай*. Результаты численного моделирования приведены на рис. 1.

Проведя аналогичные выкладки для случаев $\Delta_2 = 0$ и $\Delta_3 = 0$, нетрудно увидеть, что и при этих условиях получаем *особенный случай*. Таким образом, система (1) с одним нулевым корнем и двумя с отрицательными действительными корнями характеристического уравнения устойчива, но не асимптотически.

Рассмотрим теперь случай $a = b$. При этом система (2) имеет два одинаковых корня:

$$x_1^* = x_2^* = \frac{1 - ar}{-2a^2 + a + 1}, \quad x_3^* = \frac{r(a+1) - 2a}{-2a^2 + a + 1}.$$

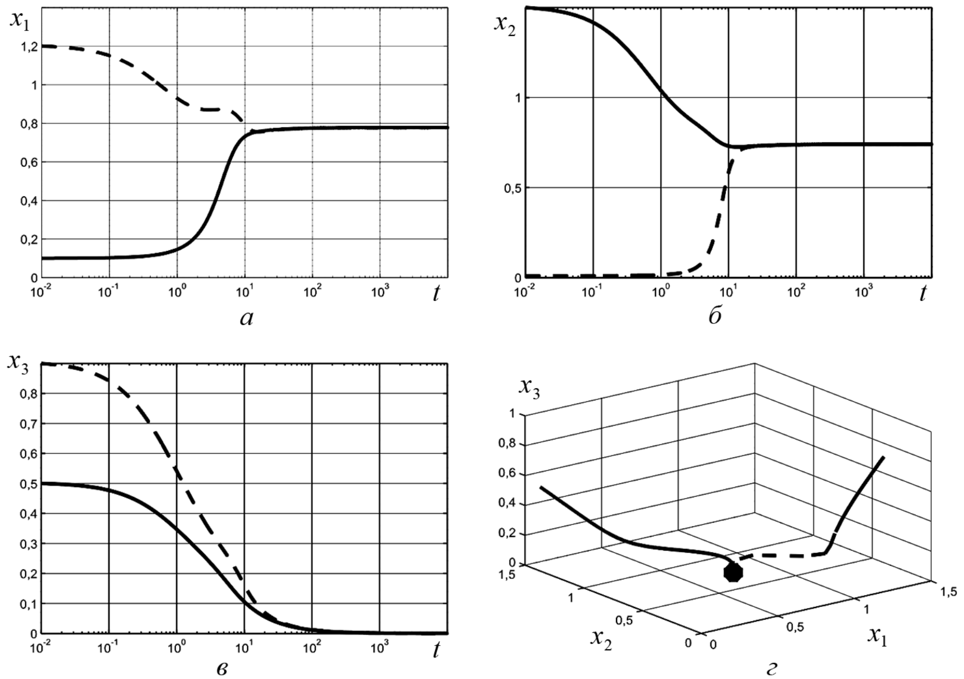

Рис. 1. Зависимость численности первой (*а*), второй (*б*) и третьей (*в*) популяций от времени; фазовый график численности популяций (*г*):

параметры интегрирования: $x_3^* = 0$, $a = \dfrac{1}{3}$, $b = \dfrac{3}{10}$, $r = \dfrac{389}{810}$, $x^* = \left(\dfrac{7}{9}, \dfrac{20}{27}, 0\right)$; сплошная кривая — $x_1^0 = \left(\dfrac{1}{10}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$; штриховая — $x_2^0 = \left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{1}{100}, \dfrac{9}{10}\right)$

Условия существования (4) одного нулевого корня характеристического уравнения принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \Delta_3 = 0, \\ \Delta_1^2 > 0, \\ a^2 < 1. \end{cases}$$

Таким образом, система (1) при $a = b$ имеет один нулевой корень характеристического уравнения только при $\Delta_3 = 0$. Являясь частным случаем системы при $\Delta_3 = 0$, эта система также является устойчивой, но не асимптотически. При $\Delta_3 \neq 0$ и $a = b$ система либо не имеет ни одного корня, либо имеет два нулевых корня характеристического уравнения.

Кратный нулевой корень. Рассмотрим теперь первое условие существования кратного нулевого корня характеристического уравнения, используя теоремы, приведенные в работе [4]. Для существования двух нулевых корней достаточно равенства нулю любых двух из трех величин x_i (если $a \neq b$):

$$\left[\begin{array}{l} x_1^* x_2^* = 0, \\ x_1^* x_3^* = 0, \\ x_2^* x_3^* = 0. \end{array}\right.$$

Рассмотрим сначала первое из этих условий $x_1^* x_2^* = 0$. Из этого условия следует $a = b \neq 1$. При этом $r = \dfrac{1}{a}$, $x_3^* = \dfrac{1}{a}$. Приведем систему (3) к специальному виду:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \Xi_1(\xi_1, \xi_2, \xi), \\ \dot{\xi}_2 = \Xi_2(\xi_1, \xi_2, \xi), \\ \dot{\xi} = p_1\xi_1 + p_2\xi_2 + p\xi\Xi(\xi_1, \xi_2, \xi), \end{cases} \tag{9}$$

где $\Xi(\xi_1, \xi_2, \xi)$ и $\Xi_i(\xi_1, \xi_2, \xi)$, $i = 1, 2,$ — аналитические функции, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка.

Введя замену переменных

$$\xi_1 = y_1, \qquad \xi_2 = y_2, \qquad \xi = y_3,$$

получаем

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = -(\xi_1 + a\xi_2 + a\xi)\xi_1 = \Xi_1(\xi_1, \xi_2, \xi), \\ \dot{\xi}_2 = -(a\xi_1 + \xi_2 + a\xi)\xi_2 = \Xi_2(\xi_1, \xi_2, \xi), \\ \dot{\xi} = -ax_3^*\xi_1 - ax_3^*\xi_2 - x_3^*\xi - (a\xi_1 + a\xi_2 + \xi)\xi. \end{cases} \tag{10}$$

Приведем эту систему к “укороченному” виду [4]:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \widetilde{\Xi}_1(\xi_1, \xi_2), \\ \dot{\xi}_2 = \widetilde{\Xi}_2(\xi_1, \xi_2), \end{cases} \tag{11}$$

где $\tilde{\Xi}_i(\xi_1, \xi_2)$ представляют собой разложения по степеням ξ_1 и ξ_2 функций $\Xi_i(\xi_1, \xi_2, u(\xi_1, \xi_2))$. Функцию $u(\xi_1, \xi_2)$ будем искать как формальный ряд, удовлетворяющий уравнению в частных производных

$$-\frac{\partial u(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_1}(\xi_1 + a\xi_2 + au(\xi_1,\xi_2)\xi_1) -$$

$$-\frac{\partial u(\xi_1,\xi_2)}{\partial \xi_2}(a\xi_1 + \xi_2 + au(\xi_1,\xi_2)\xi_2) = \tag{12}$$

$$= -ax_3^*\xi_1 - ax_3^*\xi_2 - x_3^*u(\xi_1,\xi_2) - (a\xi_1 + a\xi_2 + u(\xi_1,\xi_2))u(\xi_1,\xi_2). \tag{13}$$

В работе [4] было доказано, что при не зависящих от времени коэффициентах системы (10) существует одно и только одно разложение по степеням ξ_i

$$u = u^{(1)}(\xi_1,\xi_2) + u^{(2)}(\xi_1,\xi_2) + \ldots,$$

формально удовлетворяющее уравнению (12), а задача устойчивости системы (10) эквивалентна задаче устойчивости “укороченной” системы, если задача устойчивости решается конечным числом членов.

Решение уравнения (12) имеет вид

$$u(\xi_1,\xi_2) = -a\xi_1 - a\xi_2 + (a^2-1)\frac{a}{x_3^*}\xi_1^2 + 2a^2\frac{a-1}{x_3^*}\xi_1\xi_2 + (a^2-1)\frac{a}{x_3^*}\xi_2^2 + \ldots,$$

и система (11) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = (a^2-1)\xi_1^2 + a(a-1)\xi_1\xi_2 + \Psi_1(\xi_1,\xi_2) = \widetilde{\Xi}_1(\xi_1,\xi_2) + \Psi_1(\xi_1,\xi_2), \\ \dot{\xi}_2 = a(a-1)\xi_1\xi_2 + (a^2-1)\xi_2^2 + \Psi_2(\xi_1,\xi_2) = \widetilde{\Xi}_2(\xi_1,\xi_2) + \Psi_2(\xi_1,\xi_2), \end{cases}$$

где Ψ_i являются степенными рядами по ξ_1 и ξ_2, начинающимися членами не меньше третьего порядка.

Введем две формы третьего порядка

$$\begin{cases} P(\xi_1,\xi_2) = \xi_1\widetilde{\Xi}_1(\xi_1,\xi_2) + \xi_2\widetilde{\Xi}_2(\xi_1,\xi_2), \\ G(\xi_1,\xi_2) = \xi_1\widetilde{\Xi}_2(\xi_1,\xi_2) - \xi_2\widetilde{\Xi}_1(\xi_1,\xi_2), \end{cases}$$

имеющие вид

$$\begin{cases} P(\xi_1,\xi_2) = (a^2-1)(\xi_1^3 + \xi_2^3) + a(a-1)(\xi_1+\xi_2)\xi_1\xi_2, \\ G(\xi_1,\xi_2) = (1-a)\xi_1\xi_2(\xi_1-\xi_2). \end{cases}$$

Форма $G(\xi_1,\xi_2)$ не является знакоопределенной, уравнение $G(\xi_1,\xi_2) = 0$ определяет три прямые, проходящие через начало

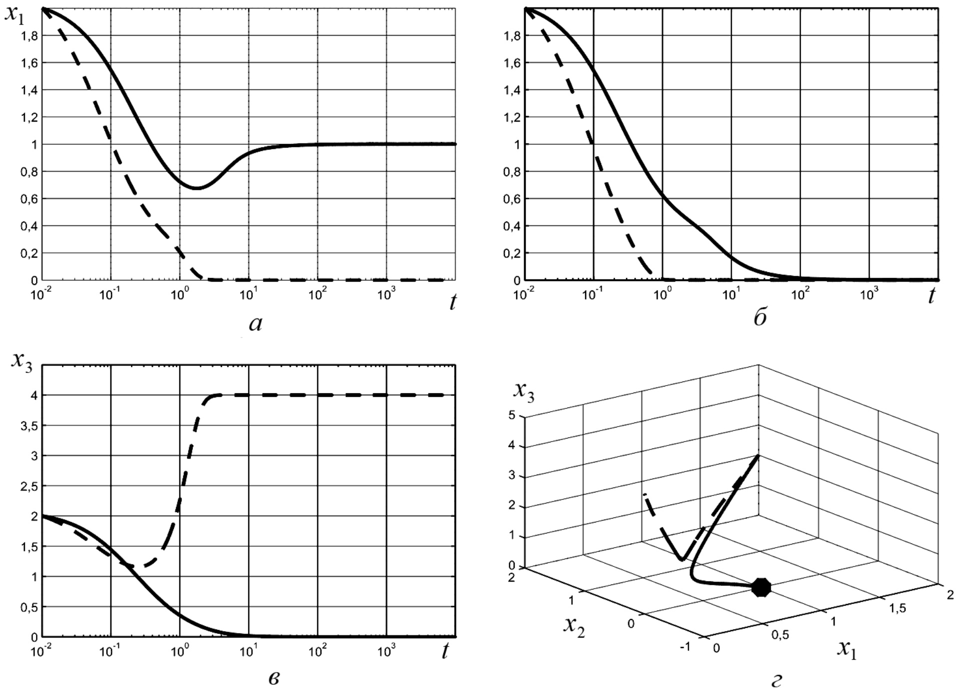

Рис. 2. Зависимость численности первой (*а*), второй (*б*) и третьей (*в*) популяций от времени; фазовый график численности популяций (*г*):

параметры интегрирования: $x_2^* x_3^* = 0$. сплошная кривая — $a = 1$, $b = \frac{1}{4}$, $r = \frac{1}{4}$, $x_0 = (1,\, 2,\, 2)$, $x^* = (1,\, 0,\, 0)$; штриховая — $a = 1$, $b = 4$, $r = 4$, $x^* = (2,\, 2,\, 2)$, $x^* = (1,\, 0,\, 0)$

координат:

$$\xi_1 = 0,$$
$$\xi_2 = 0,$$
$$\xi_1 = \xi_2.$$

Форма $P(\xi_1, \xi_2)$ на всех прямых $G(\xi_1, \xi_2) = 0$ (кроме начала координат) принимает отрицательные значения при $0 < a < 1$ и положительные значения при $a > 1$. В первом случае невозмущенное движение асимптотически устойчиво, во втором — неустойчиво. Результаты численного моделирования для обоих случаев приведены на рис. 2.

Похожим образом можно рассмотреть случаи $x_1^* x_3^* = 0$ (при этом $b = 1$, $r = a$, $x_2^* \equiv 1$) и $x_2^* x_3^* = 0$ (при этом $a = 1$, $r = b$, $x_1^* \equiv 1$). Аналогично случаю $x_1^* x_2^* = 0$, движение асимптотически устойчиво при $a < 1$ для $x_1^* x_3^* = 0$ и при $b < 1$ для $x_2^* x_3^* = 0$.

Из второго условия (6) существования двукратного нулевого корня

$$\begin{cases} \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 = 0, \\ \quad 1 - ab = 0 \end{cases}$$

получаем

$$a = b = 1,$$

что противоречит условиям, наложенным на коэффициенты: $a > 0$, $b > 0$, $r > 0$, $r \neq 1$, такие, что система

$$\begin{cases} x_1 + bx_2 + ax_3 = 1, \\ ax_1 + x_2 + bx_3 = 1, \\ bx_1 + ax_2 + x_3 = r, \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Выводы. Получены следующие условия устойчивости системы с кратным нулевым корнем характеристического уравнения. В случае одного нулевого корня система устойчива, но не асимптотически, если выполняется следующее условие:

$$ab \leqslant 1.$$

В случае двух нулевых и одного корня с отрицательной действительной частью получены следующие результаты:

1. При $0 < a = b \neq 1$, $r = \dfrac{1}{a}$ система (1) устойчива, причем положение равновесия имеет координаты $x^* = (0, 0, \dfrac{1}{a})$. При $a > 1$ система неустойчива.

2. При $b = 1$, $r = a$, $0 < a < 1$, система (1) устойчива, причем положение равновесия имеет координаты $x^* = (0, 1, 0)$. При $a > 1$ система неустойчива.

3. При $a = 1$, $r = b$, $0 < b < 1$, система (1) устойчива, причем положение равновесия имеет координаты $x^* = (1, 0, 0)$. При $a > 1$ система неустойчива.

4. Кроме того, система (1) при заданных ограничениях (2) на параметры a, b и r не может иметь три нулевых корня характеристического уравнения, и система

$$\begin{cases} \Delta_1 = \dfrac{a^2 + b^2 + 1 - ab - a - b + (r-1)(b^2 - a)}{a^2 + b^2 + 1 - ab - a - b} = 0, \\ \Delta_2 = \dfrac{a^2 + b^2 + 1 - ab - a - b + (r-1)(a^2 - b)}{a^2 + b^2 + 1 - ab - a - b} = 0, \\ \Delta_3 = \dfrac{a^2 + b^2 + 1 - ab - a - b + (r-1)(1 - ab)}{a^2 + b^2 + 1 - ab - a - b} = 0 \end{cases}$$

не имеет решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федоров В. Ю., Гильманов Т. Г. Экология. – М. : Изд-во МГУ, 1980. – 464 с.
2. Васильев М. Д. Исследование одной математической модели трехвидовой конкуренции // Мат. заметки ЯГУ, 2003. – Т. 10, № 2. – С. 33–39.
3. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. – М. : Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1950. – 473 с.
4. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. – М. : Едиториал УРСС, 2-е изд., 2004. – 432 с.
5. Малкин И. Г. Об устойчивости движения в смысле Ляпунова // Матем. сб., 1938. – Т. 3, № 1. – С. 47–101.

Статья поступила в редакцию 11.04.2006

Петр Алексеевич Садовский родился в 1983 г., студент кафедры “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специализируется в области математического моделирования.

P.A. Sadovsky (b. 1983) — student of the Bauman Moscow State Technical University. Specializes in the field of motion stability of mechanical systems.