УДК 517.977

Д. А. Фетисов

ИССЛЕДОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ РЕГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ КВАЗИКАНОНИЧЕСКОГО ВИДА

Рассмотрена задача исследования управляемости нелинейных динамических систем. Получено необходимое и достаточное условие существования решения терминальной задачи для регулярных систем квазиканонического вида. Доказана управляемость таких систем для случая, когда правая часть последнего уравнения имеет специальный вид.

Проблема управляемости динамических систем составляет значительный раздел современной теории управления. В линейной постановке эти вопросы хорошо изучены, получены необходимые и достаточные условия управляемости линейных систем. За последние годы накопилось много результатов и по исследованию нелинейных систем.

В монографии [1] на основе использования метода инвариантных соотношений получено необходимое условие управляемости автономной нелинейной системы. Для неавтономных систем предложен способ приведения системы к треугольной форме, дающий возможность для определенного класса систем получить достаточные условия управляемости.

В работе [2] рассмотрена задача исследования управляемости аффинных систем. В частности, доказана локальная управляемость аффинной системы в окрестности точки, в которой управляемо линейное приближение этой системы. Также получено необходимое и достаточное условие локальной управляемости системы с нулевым дрейфом.

Одно из направлений анализа управляемости нелинейных систем заключается в преобразовании исходной системы в некоторую эквивалентную систему того или иного специального вида, для которого рассматриваемая задача может быть решена с помощью известных методов. Эта идея использована для исследования управляемости аффинных систем в работах [3–5]. В работе [4] задача нахождения множеств достижимости и условий управляемости нелинейных систем решена с помощью дифференциально-геометрического метода, основанного на анализе структуры фазовых пространств и введенного в работе частично определенного многозначного представления. В монографии [3] изложены результаты по преобразованию аффинных систем, которые затем используются для описания множеств достижимости и исследования управляемости этих систем. Подробно изложен метод описания множеств достижимости для двумерных аффинных систем с управлением.

В данной работе рассматривается задача исследования управляемости систем, эквивалентных регулярным системам квазиканонического вида.

Основные определения. Рассмотрим нелинейную систему с управлением

$$\dot{x} = F(x, u), \tag{1}$$

где $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^m$. Будем предполагать, что система (1) при фиксировании любого начального состояния $x_0 \in \mathbf{R}^n$ и любого непрерывного управления $u(t)$, $t \in [0, t_k]$, такова, что соответствующая задача Коши

$$\dot{x} = F(x, u(t)), \quad x(0) = x_0, \tag{2}$$

имеет и притом единственное решение $x = x(t)$, определенное при $t \in [0, t_k]$.

Пусть ограничения на состояния системы заданы в виде

$$x \in O \subset \mathbf{R}^n. \tag{3}$$

Множество O называют множеством допустимых состояний системы (1).

Состояние $x_k \in O$ системы (1), (3) называют достижимым за интервал времени $[0, t_k]$ из состояния $x_0 \in O$, если существует такое непрерывное управление $u(t)$, определенное на $[0, t_k]$, что для решения соответствующей задачи Коши (2) выполнены условия:

1) $x(t) \in O$ при всех $t \in [0, t_k]$,

2) $x(t_k) = x_k$.

Если все состояния $x_k \in O$ системы (1), (3) достижимы за интервал времени $[0, t_k]$ из состояния $x_0 \in O$, то эту систему называют управляемой за интервал времени $[0, t_k]$ из состояния x_0.

Если система (1), (3) управляема за интервал времени $[0, t_k]$ из любого допустимого состояния $x_0 \in O$, то систему (1) называют управляемой за интервал времени $[0, t_k]$ на множестве O.

Свойства управляемости и достижимости для нелинейных систем непосредственно связаны с существованием решений терминальных задач для этих систем. Под терминальной задачей понимают нахождение управления, переводящего систему за некоторый интервал времени из заданного начального состояния в заданное конечное.

Далее будем рассматривать аффинную систему со скалярным управлением:

$$\dot{x} = G_1(x) + G_2(x)u, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad u \in \mathbf{R}, \tag{4}$$

$$G_i(x) = (G_{i1}(x), \ldots, G_{in}(x))^{\mathrm{т}}, \quad G_{ij}(x) \in C^\infty(\mathbf{R}), \quad i = 1, 2,\ j = \overline{1, n},$$

и задачу нахождения такого непрерывного управления $u = u(t)$, $t \in [0, t_k]$, которое за время t_k переводит эту систему из начального состояния

$$x(0) = x_0 \tag{5}$$

в конечное

$$x(t_k) = x_k. \tag{6}$$

Будем предполагать, что множеством допустимых состояний O является все пространство $\mathbf{R}^n$.

Известно, что если система (4) эквивалентна в $\mathbf{R}^n$ системе регулярного канонического вида, определенной на $\mathbf{R}^n$, то эта система управляема в $\mathbf{R}^n$ за любой интервал времени $[0, t_k]$. Далее будем считать, что система (4) не преобразуется к системе канонического вида.

Терминальная задача для регулярной системы квазиканонического вида. Пусть аффинная система (4) эквивалентна в $\mathbf{R}^n$ регулярной системе квазиканонического вида:

$$\begin{array}{rcl} \dot{z}_1 & = & z_2 \\ \dot{z}_2 & = & z_3 \\ & \dots & \\ \dot{z}_{n-1} & = & f(z,\eta) + g(z,\eta)u \\ \dot{\eta} & = & q(z,\eta), \end{array} \tag{7}$$

где $z = (z_1, z_2, \dots, z_{n-1})^{\text{т}} \in \mathbf{R}^{n-1}$, $\eta \in \mathbf{R}$, $f(z,\eta), g(z,\eta) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $g(z,\eta)$ не обращается в нуль в $\mathbf{R}^n$.

Отображение эквивалентности $\Phi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ позволяет сформулировать для системы (7) эквивалентную терминальную задачу: найти непрерывное управление $u = u(t)$, $t \in [0, t_k]$, переводящее систему (7) за тот же интервал времени из начального состояния

$$\Phi(x_0) = (z_{10}, z_{20}, \dots, z_{n-1,0}, \eta_0)^{\text{т}} \tag{8}$$

в конечное состояние

$$\Phi(x_k) = (z_{1k}, z_{2k}, \dots, z_{n-1,k}, \eta_k)^{\text{т}}. \tag{9}$$

Решение этой терминальной задачи одновременно является и решением исходной задачи (5), (6) для аффинной системы (4), так как при переходе к эквивалентной системе квазиканонического вида управление и время не преобразуются, а отображение Φ^{-1} отображает траектории системы (7) в траектории аффинной системы (4), реализуемые тем же управлением.

Теорема 1. *Для того чтобы существовало непрерывное управление* $u = u(t)$, $t \in [0, t_k]$, *являющееся решением терминальной задачи* (8),

(9) *для системы* (7), *необходимо и достаточно, чтобы существовала функция* $B(t) \in C^{n-1}([0, t_k])$, *удовлетворяющая условиям*

$$\begin{matrix} B(0) = z_{10}, & \dot{B}(0) = z_{20}, & \ldots, & B^{(n-2)}(0) = z_{n-1,0}, \\ B(t_k) = z_{1k}, & \dot{B}(t_k) = z_{2k}, & \ldots, & B^{(n-2)}(t_k) = z_{n-1,k}, \end{matrix} \tag{10}$$

и такая, что задача Коши

$$\dot{\eta} = q(\overline{B}(t), \eta), \quad \eta(0) = \eta_0, \tag{11}$$

$$\overline{B}(t) = (B(t), \dot{B}(t), \ldots, B^{(n-2)}(t))^{\text{т}}$$

имеет решение $\eta(t)$, *определенное при* $t \in [0, t_k]$ *и удовлетворяющее условию*

$$\eta(t_k) = \eta_k. \tag{12}$$

Доказательство. Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $B(t)$ – некоторая функция, удовлетворяющая условиям (10), и такая, что на $[0, t_k]$ существует решение $\eta(t)$ задачи Коши (11) и для этого решения выполнено условие (12).

Рассмотрим управление

$$u(t) = \frac{B^{(n-1)}(t) - f(\overline{B}(t), \eta(t))}{g(\overline{B}(t), \eta(t))}. \tag{13}$$

Оно непрерывно, так как в системе (7), согласно сделанному предположению, функция $g(z, \eta)$ не обращается в нуль.

Покажем, что управление (13) является решением терминальной задачи (8), (9) для системы (7).

Подставим в систему (7) управление (13) и функции $B(t)$, $\dot{B}(t)$, $\ldots$, $B^{(n-2)}(t)$, $\eta(t)$ вместо переменных z_1, z_2, $\ldots$, z_{n-1}, η. При этом получим тождество. Действительно, первые $n-2$ уравнения системы (7) обратятся в тождество по самому построению данной системы функций, $(n-1)$-е — исходя из вида управления (13), последнее уравнение — по предположению теоремы (так как функция $\eta(t)$ является решением задачи Коши (11) и удовлетворяет условию (12)).

Кроме того, для построенной системы функций выполняются граничные условия (8) и (9). Это следует из выполнения условий (10) для функции $B(t)$ и условия (12) для решения $\eta(t)$ задачи Коши (11).

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $u = u(t)$, $t \in [0, t_k]$, — управление, являющееся решением терминальной задачи (8), (9) для системы (7). Пусть $z_1(t)$, $z_2(t)$, $\ldots$, $z_{n-1}(t)$, $\eta(t)$ — решение системы

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\ldots \\ \dot{z}_{n-1} &= f(z, \eta) + g(z, \eta)u(t) \\ \dot{\eta} &= q(z, \eta), \end{aligned} \tag{14}$$

удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} &z_1(0) = z_{10}, \quad z_2(0) = z_{20}, \quad \ldots, \quad z_{n-1}(0) = z_{n-1,0}, \\ &z_1(t_k) = z_{1k}, \quad z_2(t_k) = z_{2k}, \quad \ldots, \quad z_{n-1}(t_k) = z_{n-1,k}, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\eta(0) = \eta_0, \qquad \eta(t_k) = \eta_k. \tag{16}$$

Обозначим $B(t) \equiv z_1(t)$. Из первых $n-2$ уравнений системы (14) следует, что

$$\dot{B}(t) \equiv z_2(t), \ldots, B^{(n-2)}(t) \equiv z_{n-1}(t).$$

Так как $z_1(t)$, …, $z_{n-1}(t)$ удовлетворяют условиям (15), функция $B(t)$ удовлетворяет условиям (10).

Осталось показать, что существует решение задачи Коши (11) и это решение удовлетворяет условию (12). В соответствии с принятыми обозначениями и условиями (16) этим решением является функция $\eta(t)$.

Таким образом, согласно ***теореме 1***, чтобы убедиться в существовании решения терминальной задачи (8), (9) для системы (7), достаточно найти функцию $B(t)$, удовлетворяющую указанным в теореме условиям. Предложим следующий способ поиска этой функции.

Пусть функция $b(t) \in C^{n-1}([0, t_k])$ и выполнены условия

$$\begin{aligned} &b(0) = z_{10}, \quad \dot{b}(0) = z_{20}, \quad \ldots, \quad b^{(n-2)}(0) = z_{n-1,0}, \\ &b(t_k) = z_{1k}, \quad \dot{b}(t_k) = z_{2k}, \quad \ldots, \quad b^{(n-2)}(t_k) = z_{n-1,k} \end{aligned} \tag{17}$$

В качестве такой функции всегда можно взять интерполяционный многочлен степени $2n-3$. Будем искать $B(t)$ из ***теоремы 1*** в виде

$$B(t) = b(t) + c\, d(t), \tag{18}$$

где c — пока не известная константа, функция $d(t)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} &d(0) = 0, \quad \dot{d}(0) = 0, \quad \ldots, \quad d^{(n-2)}(0) = 0, \\ &d(t_k) = 0, \quad \dot{d}(t_k) = 0, \quad \ldots, \quad d^{(n-2)}(t_k) = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

В качестве такой функции можно взять любой многочлен, для которого выполняются соотношения (19), например

$$d(t) = t^{n-1}(t_k - t)^{n-1}. \tag{20}$$

При любых значениях c функция $B(t)$ вида (18) удовлетворяет условиям (10). Обозначим

$$\overline{b}(t) = (b(t), \dot{b}(t), \ldots, b^{(n-2)}(t))^{\mathrm{т}}, \qquad \overline{d}(t) = (d(t), \dot{d}(t), \ldots, d^{(n-2)}(t))^{\mathrm{т}},$$

так что $\overline{B}(t) = \overline{b}(t) + c\,\overline{d}(t)$. Тогда задача Коши (11) с учетом условия (12) преобразуется к граничной задаче

$$\dot{\eta} = q(\overline{b}(t) + c\,\overline{d}(t), \eta), \quad \eta(0) = \eta_0, \quad \eta(t_k) = \eta_k. \tag{21}$$

Если удастся найти $c = c_*$, для которого существует решение $\eta(t)$ граничной задачи (21), получим, что функция $B_*(t) = b(t) + c_*\, d(t)$ удовлетворяет всем условиям ***теоремы 1*** и, следовательно, терминальная задача (8), (9) для системы (7) имеет решение.

Далее будем считать, что в системе (7) функция $q(z, \eta)$ является произведением функций $Q(z)$ и $R(\eta)$, причем $R(\eta)$ не обращается в нуль в $\mathbf{R}$. Такая система имеет вид

$$\begin{array}{rcl} \dot z_1 & = & z_2 \\ \dot z_2 & = & z_3 \\ & \ldots & \\ \dot z_{n-1} & = & f(z,\eta) + g(z,\eta)u \\ \dot\eta & = & Q(z)\, R(\eta). \end{array} \tag{22}$$

Для системы (22) граничная задача (21) преобразуется к виду

$$\dot\eta = Q(\overline{b}(t) + c\,\overline{d}(t))R(\eta), \quad \eta(0) = \eta_0, \quad \eta(t_k) = \eta_k. \tag{23}$$

Интегрируя это уравнение с разделяющимися переменными на отрезке $[0, t_k]$ и учитывая начальные и конечные значения переменной η, получим

$$\int\limits_{\eta_0}^{\eta_k} \frac{d\eta}{R(\eta)} = \int\limits_0^{t_k} Q(\overline{b}(t) + c\,\overline{d}(t))dt. \tag{24}$$

Уравнение (24) представляет собой уравнение для определения неизвестной константы c. Пусть это уравнение имеет решение $c = c_*$. Найденному значению $c = c_*$ будет соответствовать решение $\eta(t)$ граничной задачи (23) в том случае, если уравнение

$$\int\limits_{\eta_0}^{\eta} \frac{d\eta}{R(\eta)} = \int\limits_0^{t} Q(\overline{b}(t) + c_*\,\overline{d}(t))dt$$

разрешимо относительно η для всех $t \in [0, t_k]$.

Таким образом, для существования решения терминальной задачи достаточно выполнения двух условий:

1) существования решения $c = c_*$ уравнения (24),

2) разрешимости уравнения (23) относительно η при всех $t \in [0, t_k]$.

Пусть в системе (22) функция $Q(z)$ представима в виде

$$Q(z) = Q_1(z_1)Q_2(z) + Q_3(z), \quad z = (z_1, \ldots, z_{n-1})^{\mathrm{т}}, \tag{25}$$

где функции $Q_1(z_1) \in C(\mathbf{R})$, $Q_2(z) \in C(\mathbf{R}^{n-1})$, $Q_3(z) \in C(\mathbf{R}^{n-1})$ и удовлетворяют следующим условиям:

$$\lim_{z_1\to+\infty} Q_1(z_1) = +\infty, \qquad \lim_{z_1\to-\infty} Q_1(z_1) = -\infty, \tag{26}$$

функция $Q_2(z)$ положительна и ограничена в $\mathbf{R}^{n-1}$:

$$\exists N_1, N_2 > 0 \;\forall z \in \mathbf{R}^{n-1}: \; N_1 \le Q_2(z) \le N_2, \tag{27}$$

при любом p функция $Q_3(z)$ ограничена снизу на множестве $\{z \in \mathbf{R}^{n-1} : z_1 \ge p\}$, т.е.

$$\forall p \;\exists L_1 \in \mathbf{R} \;\forall z_1 : \; z_1 \ge p \;\Rightarrow\; Q_3(z) \ge L_1, \tag{28}$$

при любом p функция $Q_3(z)$ ограничена сверху на множестве $\{z \in \mathbf{R}^{n-1} : z_1 \le p\}$, т.е.

$$\forall p \;\exists L_2 \in \mathbf{R} \;\forall z_1 : \; z_1 \le p \;\Rightarrow\; Q_3(z) \le L_2. \tag{29}$$

Теорема 2. *Пусть в системе* (22) *функция* $Q(z)$ *имеет вид* (25)*, функции* $Q_1(z_1)$*,* $Q_2(z)$*,* $Q_3(z)$ *удовлетворяют условиям* (26)–(29)*, областью значений функции*

$$\Psi(\eta) = \int\limits_0^{\eta} \frac{d\eta}{R(\eta)}$$

является все множество действительных чисел. Тогда система (22) *управляема в* $\mathbf{R}^n$ *за любой интервал времени* $[0, t_k]$.

Доказательство. Рассмотрим для системы (22) с функцией $Q(z)$ вида (25) задачу нахождения управления $u = u(t)$, $t \in [0, t_k]$, переводящего систему из некоторого начального состояния (8) в конечное состояние (9) за время t_k. Покажем, что если $Q_1(z_1)$, $Q_2(z)$, $Q_3(z)$ обладают свойствами (26)–(29), то всегда существует функция $B(t)$, для которой выполняются условия ***теоремы 1***.

Будем искать $B(t)$ в виде (18). Выберем в качестве функции $b(t)$ интерполяционный многочлен степени $2n-3$, удовлетворяющий условиям (17), в качестве $d(t)$ — многочлен (20). Такой выбор гарантирует выполнение условий (10). Покажем, что, каковы бы ни были начальное и конечное состояния системы, существует значение константы c, при котором граничная задача (23) имеет решение. Для этого достаточно показать существование решения уравнения (24). Для системы (22) с функцией $Q(z)$ вида (25) уравнение (24) принимает вид

$$\int\limits_{\eta_0}^{\eta_k} \frac{d\eta}{R(\eta)} = \int\limits_0^{t_k} [Q_1(b(t) + c\,d(t))Q_2(\overline{b}(t) + c\,\overline{d}(t)) + Q_3(\overline{b}(t) + c\,\overline{d}(t))]dt. \tag{30}$$

Покажем, что

$$\lim_{c\to+\infty}\int\limits_0^{t_k}[Q_1(b(t)+c\,d(t))Q_2(\overline{b}(t)+c\,\overline{d}(t))+Q_3(\overline{b}(t)+c\,\overline{d}(t))]dt=+\infty. \tag{31}$$

Представим интеграл в виде суммы

$$\int\limits_0^{t_k}[Q_1(b(t)+c\,d(t))Q_2(\overline{b}(t)+c\,\overline{d}(t))+Q_3(\overline{b}(t)+c\,\overline{d}(t))]dt=$$

$$=\int\limits_0^{t_k}Q_1(b(t)+c\,d(t))Q_2(\overline{b}(t)+c\,\overline{d}(t))dt+\int\limits_0^{t_k}Q_3(\overline{b}(t)+c\,\overline{d}(t))dt. \tag{32}$$

Рассмотрим сначала интеграл, содержащий произведение функций Q_1 и Q_2.

По условию функция $Q_2(z)$ удовлетворяет условию (27), поэтому

$$\forall c\;\forall t\in[0,t_k]:\quad 0<N_1\le Q_2(\overline{b}(t)+c\,\overline{d}(t))\le N_2. \tag{33}$$

Функция $b(t)$, как непрерывная функция t, достигает на отрезке $[0,t_k]$ наибольшего и наименьшего значений. Обозначим их через $b_{\max}$ и $b_{\min}$.

Возьмем произвольные значения t_1, t_2, принадлежащие интервалу $(0,t_k)$, так что $0<t_1<t_2<t_k$ (рис. 1). На отрезке $[t_1,t_2]$ функция $d(t)$ достигает своего наименьшего значения $d_{\min}$, причем $d_{\min}>0$.

По условию теоремы

$$\lim_{z_1\to+\infty}Q_1(z_1)=+\infty\quad\Leftrightarrow\quad\forall\epsilon>0\;\exists\delta>0\;\forall z_1:\;z_1>\delta\;\Rightarrow\;Q_1(z_1)>\epsilon.$$

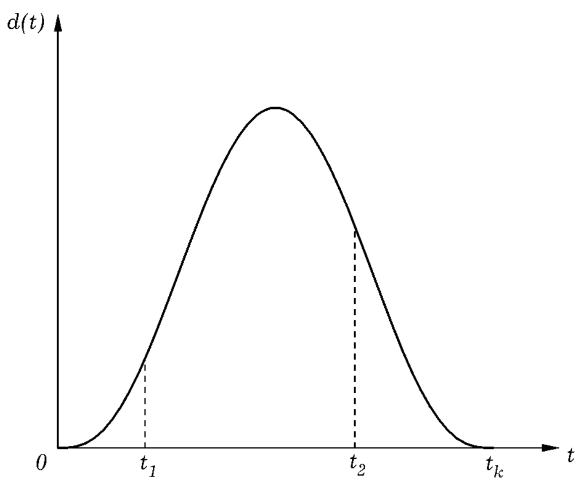

Рис. 1. Функция $d(t)$

Пусть зафиксировано произвольное $\epsilon > 0$ и для него выбрано соответствующее $\delta > 0$.

Если $\delta > b_{\min}$, обозначим
$$\sigma = \frac{\delta - b_{\min}}{d_{\min}} > 0.$$
Тогда для всех $c > \sigma$ и $t \in [t_1, t_2]$ получим
$$b(t) + c\,d(t) > b_{\min} + \sigma\,d_{\min} = b_{\min} + \frac{\delta - b_{\min}}{d_{\min}}\,d_{\min} = \delta.$$
Если $\delta \le b_{\min}$, возьмем в качестве σ любое положительное число. Тогда для всех $c > \sigma$ и $t \in [t_1, t_2]$ будет справедливо неравенство
$$b(t) + c\,d(t) > b_{\min} \ge \delta.$$
Таким образом,
$$\forall\epsilon > 0\ \exists\sigma > 0\ \forall t \in [t_1, t_2]\ \forall c > \sigma:\ b(t) + c\,d(t) > \delta,\ Q_1(b(t) + c\,d(t)) > \epsilon.$$
Используя неравенство (33), для произведения функций Q_1 и Q_2 получим
$$\forall t \in [t_1, t_2]: \quad Q_1(b(t) + c\,d(t))Q_2(\overline{b}(t) + c\,\overline{d}(t)) > N_1\epsilon.$$
Проинтегрируем последнее неравенство:
$$\int\limits_{t_1}^{t_2} Q_1(b(t) + c\,d(t))Q_2(\overline{b}(t) + c\,\overline{d}(t))dt > N_1\epsilon(t_2 - t_1).$$
Таким образом,
$$\forall\epsilon > 0\ \exists\sigma > 0\ \forall c:\ c > \sigma\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \int\limits_{t_1}^{t_2} Q_1(b(t) + c\,d(t))Q_2(\overline{b}(t) + c\,\overline{d}(t))dt > N_1\epsilon(t_2 - t_1),$$
а это означает, что
$$\lim_{c\to+\infty} \int\limits_{t_1}^{t_2} Q_1(b(t) + c\,d(t))Q_2(\overline{b}(t) + c\,\overline{d}(t))dt = +\infty.$$
Интеграл по отрезку $[0, t_k]$ можно представить в виде суммы интегралов по отрезкам $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_k]$:
$$\int\limits_0^{t_k} Q_1(b(t) + c\,d(t))Q_2(\overline{b}(t) + c\,\overline{d}(t))dt =$$

$$= \int_0^{t_1} Q_1(b(t) + c\,d(t))Q_2(\overline{b}(t) + c\,\overline{d}(t))dt +$$
$$+ \int_{t_1}^{t_2} Q_1(b(t) + c\,d(t))Q_2(\overline{b}(t) + c\,\overline{d}(t))dt +$$
$$+ \int_{t_2}^{t_k} Q_1(b(t) + c\,d(t))Q_2(\overline{b}(t) + c\,\overline{d}(t))dt. \quad (34)$$

Как только что было доказано, интеграл по отрезку $[t_1, t_2]$ является положительной бесконечно большой величиной при $c \to +\infty$. Оценим интегралы по отрезкам $[0, t_1]$ и $[t_2, t_k]$. Заметим, что на этих отрезках

$$\min_{[0,t_1]} d(t) = \min_{[t_2,t_k]} d(t) = 0,$$

поэтому

$$\forall c > 0 \;\forall t \in [0, t_1] \cup [t_2, t_k] : \; b(t) + c\,d(t) \geq b_{\min}.$$

Получаем, что при всех $c > 0$ и $t \in [0, t_1] \cup [t_2, t_k]$ аргумент функции $Q_1(b(t) + c\,d(t))$ принимает значения, больше либо равные $b_{\min}$. Функция $Q_1(z_1)$ непрерывна на $[b_{\min}, +\infty)$ и $\lim\limits_{z_1 \to +\infty} Q_1(z_1) = +\infty$. Следовательно, $Q_1(z_1)$ на $[b_{\min}, +\infty)$ ограничена снизу:

$$\exists M_1 : \quad Q_1(z_1) \geq M_1 \quad \text{при} \quad z_1 \in [b_{\min}, +\infty) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad Q_1(b(t) + c\,d(t)) \geq M_1 \quad \text{при} \quad t \in [0, t_1] \cup [t_2, t_k], \quad c > 0. \quad (35)$$

Всегда можно считать, что $M_1 < 0$. Тогда из соотношений (35) и (27) получаем, что для произведения функций $Q_1(b(t) + c\,d(t))$ и $Q_2(\overline{b}(t) + c\,\overline{d}(t))$ справедлива оценка:

$$\forall c > 0 \;\forall t \in [0, t_1] \cup [t_2, t_k] : \; Q_1(b(t) + c\,d(t))Q_2(\overline{b}(t) + c\,\overline{d}(t)) \geq M_1 N_2. \quad (36)$$

Таким образом, функция $Q_1(b(t) + c\,d(t))Q_2(\overline{b}(t) + c\,\overline{d}(t))$ ограничена снизу, и из соотношения (36) получаем, что при $c > 0$

$$\int_0^{t_1} Q_1(b(t) + c\,d(t))Q_2(\overline{b}(t) + c\,\overline{d}(t))dt \geq M_1 N_2 t_1,$$

$$\int_{t_2}^{t_k} Q_1(b(t) + c\,d(t))Q_2(\overline{b}(t) + c\,\overline{d}(t))dt \geq M_1 N_2 (t_k - t_2).$$

Используя формулу (34), получаем

$$\lim_{c\to+\infty}\int_0^{t_k} Q_1(b(t)+c\,d(t))Q_2(\overline{b}(t)+c\,\overline{d}(t))dt=+\infty. \tag{37}$$

Оценим при $c>0$ второй интеграл в представлении (32):

$$\int_0^{t_k} Q_3(\overline{b}(t)+c\,\overline{d}(t))dt,$$

используя свойства (28) и (29) функции $Q_3(z)$.

Наименьшее значение функции $d(t)$ на отрезке $[0,t_k]$ равно нулю, поэтому

$$\forall c>0\ \forall t\in[0,t_k]:\ b(t)+c\,d(t)\geq b_{\min}.$$

Это означает, что если $c>0$, $t\in[0,t_k]$, то значения аргумента функции $Q_3(z)$ при $z=\overline{b}(t)+c\,\overline{d}(t)$ принадлежат множеству $\{z\in\mathbf{R}^{n-1}:\ z_1\geq b_{\min}\}$. Согласно условию (28), для $p=b_{\min}$ найдется такое L_1, что при $z_1\geq b_{\min}$ $\quad Q_3(z)\geq L_1$. Отсюда следует, что

$$\forall c>0\ \forall t\in[0,t_k]:\ Q_3(\overline{b}(t)+c\,\overline{d}(t))\geq L_1,\ \int_0^{t_k} Q_3(\overline{b}(t)+c\,\overline{d}(t))dt\geq L_1t_k.$$

Используя представление (32), равенство (37) и последнее соотношение, убеждаемся в справедивости утверждения (31).

Покажем теперь, что

$$\lim_{c\to-\infty}\int_0^{t_k}[Q_1(b(t)+c\,d(t))Q_2(\overline{b}(t)+c\,\overline{d}(t))+Q_3(\overline{b}(t)+c\,\overline{d}(t))]dt=-\infty. \tag{38}$$

Для этого снова воспользуемся представлением (32) и рассмотрим сначала интеграл, содержащий произведение функций Q_1 и Q_2.

Выберем отрезок $[t_1,t_2]\subset[0,t_k]$ (рис. 1). На отрезке $[t_1,t_2]$ функция $d(t)$ достигает своего наименьшего значения $d_{\min}$, причем $d_{\min}>0$.

По условию

$$\lim_{z_1\to-\infty}Q_1(z_1)=-\infty\ \Leftrightarrow\ \forall\epsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall z_1:\ z_1<-\delta\ \Rightarrow\ Q_1(z_1)<-\epsilon.$$

Зафиксируем произвольное $\epsilon>0$ и выберем для него соответствующее δ.

Если $\delta>-b_{\max}$, обозначим

$$\sigma=\frac{\delta+b_{\max}}{d_{\min}}>0.$$

Тогда при $c < -\sigma$ и $t \in [t_1, t_2]$ получим

$$b(t) + c\,d(t) < b_{\max} - \sigma\, d_{\min} = b_{\max} - \frac{\delta + b_{\max}}{d_{\min}}\, d_{\min} = -\delta.$$

Если $\delta \leq -b_{\max}$, возьмем в качестве σ любое положительное число. Тогда для всех $c < -\sigma$ и $t \in [t_1, t_2]$ будет справедливо неравенство

$$b(t) + c\,d(t) < b_{\max} \leq -\delta.$$

Таким образом,

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \sigma > 0\ \forall t \in [t_1, t_2]\ \forall c < -\sigma :$$
$$b(t) + c\,d(t) < -\delta, \quad Q_1(b(t) + c\,d(t)) < -\epsilon.$$

Из последнего неравенства и соотношения (33) получим

$$Q_1(b(t) + c\,d(t))Q_2(\overline{b}(t) + c\,\overline{d}(t))dt < -N_1\epsilon.$$

Проинтегрируем это неравенство:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} Q_1(b(t) + c\,d(t))Q_2(\overline{b}(t) + c\,\overline{d}(t))dt < -N_1\epsilon(t_2 - t_1).$$

Таким образом,

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \sigma > 0\ \forall c :\ c < -\sigma\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int\limits_{t_1}^{t_2} Q_1(b(t) + c\,d(t))Q_2(\overline{b}(t) + c\,\overline{d}(t))dt < -N_1\epsilon(t_2 - t_1),$$

а это означает, что

$$\lim_{c \to -\infty} \int\limits_{t_1}^{t_2} Q_1(b(t) + c\,d(t))Q_2(\overline{b}(t) + c\,\overline{d}(t))dt = -\infty.$$

Рассмотрим теперь отрезки $[0, t_1]$ и $[t_2, t_k]$. На них наименьшее значение функции $d(t)$ равно нулю, поэтому

$$\forall c < 0\ \forall t \in [0, t_1] \cup [t_2, t_k] :\ b(t) + c\,d(t) \leq b_{\max}.$$

Таким образом, для всех $c < 0$ и $t \in [0, t_1] \cup [t_2, t_k]$ аргумент функции $Q_1(b(t) + c\,d(t))$ принимает значения, меньше либо равные $b_{\max}$. Функция $Q_1(z_1)$ непрерывна на $(-\infty, b_{\max}]$ и $\lim\limits_{z_1 \to -\infty} Q_1(z_1) = -\infty$. Следовательно, $Q_1(z_1)$ на $(-\infty, b_{\max}]$ ограничена сверху:

$$\exists M_2 :\ Q_1(z_1) \leq M_2 \quad \text{при} \quad z_1 \in (-\infty, b_{\max}]$$
$$\Rightarrow \quad Q_1(b(t) + c\,d(t)) \leq M_2 \quad \text{при} \quad t \in [0, t_1] \cup [t_2, t_k], \quad c < 0. \quad (39)$$

Всегда можно считать, что $M_2 > 0$. Тогда из соотношений (39) и (27) получаем, что для произведения функций $Q_1(b(t) + c\,d(t))$ и $Q_2(\overline{b}(t) + c\,\overline{d}(t))$ справедлива оценка:

$$\forall c < 0\ \forall t \in [0, t_1] \cup [t_2, t_k]:\ Q_1(b(t) + c\,d(t))Q_2(\overline{b}(t) + c\,\overline{d}(t)) \le M_2N_2. \tag{40}$$

Таким образом, функция $Q_1(b(t) + c\,d(t))Q_2(\overline{b}(t) + c\,\overline{d}(t))$ ограничена сверху и из соотношения (40) получаем, что при $c < 0$

$$\int\limits_0^{t_1} Q_1(b(t) + c\,d(t))Q_2(\overline{b}(t) + c\,\overline{d}(t))dt \le M_2N_2t_1,$$

$$\int\limits_{t_2}^{t_k} Q_1(b(t) + c\,d(t))Q_2(\overline{b}(t) + c\,\overline{d}(t))dt \le M_2N_2(t_k - t_2).$$

Используя формулу (34), получаем

$$\lim_{c\to-\infty} \int\limits_0^{t_k} Q_1(b(t) + c\,d(t))Q_2(\overline{b}(t) + c\,\overline{d}(t))dt = -\infty. \tag{41}$$

Оценим при $c < 0$ второй интеграл в формуле (32):

$$\int\limits_0^{t_k} Q_3(\overline{b}(t) + c\,\overline{d}(t))dt,$$

используя свойства (28) и (29) функции $Q_3(z)$.

Наименьшее значение функции $d(t)$ на отрезке $[0, t_k]$ равно нулю, поэтому

$$\forall c < 0\ \forall t \in [0, t_k]:\ b(t) + c\,d(t) \le b_{\max},$$

и если $c < 0$, $t \in [0, t_k]$, то значения аргумента функции $Q_3(z)$ при $z = \overline{b}(t) + c\,\overline{d}(t)$ принадлежат множеству $\{z \in \mathbf{R}^{n-1}:\ z_1 \le b_{\max}\}$. Согласно условию (28), для $p = b_{\max}$ существует такое L_2, что при $z_1 \le b_{\max}\quad Q_3(z) \le L_2$. Это означает, что

$$\forall c < 0\ \forall t \in [0, t_k]:\ Q_3(\overline{b}(t)+c\,\overline{d}(t)) \le L_2,\ \int\limits_0^{t_k} Q_3(\overline{b}(t)+c\,\overline{d}(t))dt \le L_2t_k.$$

Из формулы (32), равенства (41) и последней оценки получаем утверждение (38).

Обозначим

$$v(c) = \int\limits_0^{t_k} Q(\overline{b}(t) + c\,\overline{d}(t))\,dt. \tag{42}$$

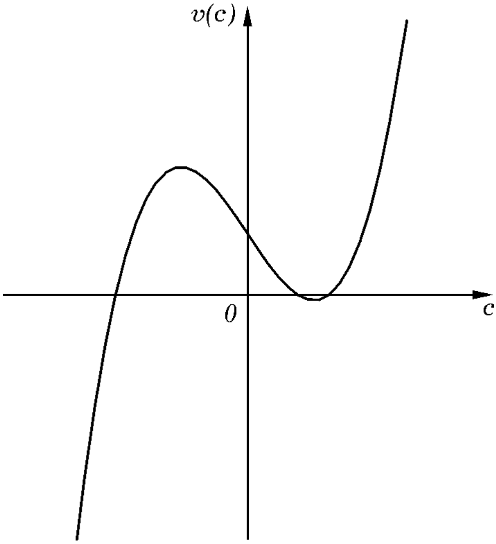

Рис. 2. Функция $v(c)$ в условиях теоремы 2

Функция $s(t,c) = Q(\overline{b}(t)+c\,\overline{d}(t))$ непрерывна на множестве $[0,t_k]\times\mathbf{R}$. Согласно свойству интегралов, зависящих от параметра, функция $v(c)$ непрерывна на $\mathbf{R}$. Кроме того, из доказанного следует, что

$$\lim_{c\to+\infty} v(c) = +\infty, \qquad \lim_{c\to-\infty} v(c) = -\infty. \tag{43}$$

Примерный вид функции $v(c)$, удовлетворяющей указанным условиям, приведен на рис. 2.

С использованием введенных обозначений уравнение (30) примет вид

$$\int\limits_{\eta_0}^{\eta_k} \frac{d\eta}{R(\eta)} = v(c). \tag{44}$$

Каковы бы ни были начальное и конечное состояния системы (22) с функцией $Q(z)$ вида (25), из доказанных свойств функции $v(c)$ следует, что найдется значение $c = c_*$, удовлетворяющее этому уравнению. Это означает, что при $c = c_*$ существует решение граничной задачи (23). Следовательно, функция $B_*(t) = b(t) + c_*\,d(t)$ удовлетворяет условиям ***теоремы 1***, и терминальная задача имеет решение для любого начального и конечного состояния системы (22). В соответствии с определением системы, управляемой за данный интервал времени на множестве O, заключаем, что система (22) с функцией $Q(z)$ вида (25) управляема в $\mathbf{R}^n$ за любой интервал $[0,t_k]$.

Заметим, что доказательство ***теоремы 2*** дает способ нахождения решения уравнения (44). Пусть зафиксированы начальное $(z_{10},\ldots$ $\ldots, z_{n-1,0}, \eta_0)^{\mathrm{т}}$ и конечное $(z_{1k},\ldots, z_{n-1,k}, \eta_k)^{\mathrm{т}}$ состояния системы (22).

Функция $v(c)$ в правой части уравнения (44) удовлетворяет условию (43), поэтому каким бы ни было значение интеграла в левой части этого уравнения, всегда можно подобрать достаточно большое по модулю отрицательное число $c = c_1$ так, что

$$\int\limits_{\eta_0}^{\eta_k} \frac{d\eta}{R(\eta)} > v(c_1),$$

и достаточно большое положительное число $c = c_2$ так, что

$$\int\limits_{\eta_0}^{\eta_k} \frac{d\eta}{R(\eta)} < v(c_2).$$

Чтобы найти приближенное решение уравнения (44), нужно применить к отрезку $[c_1, c_2]$ метод деления отрезка пополам. Этот метод приведет к одному из корней уравнения (44).

Пример. Рассмотрим систему третьего порядка

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= f(z,\eta) + g(z,\eta)u, \\ \dot{\eta} &= (z_1^3 + \cos z_2)\, R(\eta), \end{aligned} \tag{45}$$

где $g(z,\eta) \neq 0$ в $\mathbf{R}^3$, $R(\eta) \neq 0$ в $\mathbf{R}$. Покажем, что эта система на любом открытом множестве в $\mathbf{R}^3$ не эквивалентна системе канонического вида. Столбцы координат векторных полей G_1 и G_2 имеют вид

$$G_1(z,\eta) = \begin{pmatrix} z_2 \\ f(z,\eta) \\ (z_1^3 + \cos z_2)R(\eta) \end{pmatrix}, \quad G_2(z,\eta) = \begin{pmatrix} 0 \\ g(z,\eta) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы на некотором множестве в $\mathbf{R}^3$ система (45) была эквивалентна системе канонического вида, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $\phi = \phi(z,\eta)$, являющаяся решением системы уравнений в частных производных

$$G_2\phi(z,\eta) = 0, \quad [G_1, G_2]\phi(z,\eta) = 0,$$

и такая, что соотношения

$$\zeta_1 = \phi(z,\eta), \quad \zeta_2 = G_1\phi(z,\eta), \quad \zeta_3 = G_1^2\phi(z,\eta)$$

задают на этом множестве невырожденную замену переменных.

Вычислим столбец координат векторного поля $[G_1, G_2]$, опуская для краткости записи аргументы у функций $f(z,\eta)$, $g(z,\eta)$ и их производных:

$$[G_1,G_2]=\begin{pmatrix}0&0&0\\ g'_{z_1}&g'_{z_2}&g'_\eta\\ 0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_2\\ f\\ (z_1^3+\cos z_2)R(\eta)\end{pmatrix}-$$

$$-\begin{pmatrix}0&1&0\\ f'_{z_1}&f'_{z_2}&f'_\eta\\ 3z_1^2R(\eta)&-R(\eta)\sin z_2&(z_1^3+\cos z_2)R'(\eta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ g\\ 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-g\\ \chi(z,\eta)\\ gR(\eta)\sin z_2\end{pmatrix},$$

где $\chi(z,\eta)=g'_{z_1}z_2+g'_{z_2}f+g'_\eta(z_1^3+\cos z_2)R(\eta)-f'_{z_2}g$.

Следовательно, функция $\phi(z,\eta)$ должна быть решением системы уравнений в частных производных

$$g\frac{\partial\phi}{\partial z_2}=0,\quad -g\frac{\partial\phi}{\partial z_1}+\chi(z,\eta)\frac{\partial\phi}{\partial z_2}+gR(\eta)\sin z_2\frac{\partial\phi}{\partial\eta}=0.$$

По предположению $g(z,\eta)\neq 0$ в $\mathbf{R}$, поэтому из первого уравнения следует, что функция ϕ не зависит от переменной z_2. Тогда второе уравнение принимает вид

$$-\frac{\partial\phi}{\partial z_1}+R(\eta)\sin z_2\frac{\partial\phi}{\partial\eta}=0.$$

Дифференцируя его по z_2, получаем, что на открытом множестве в пространстве состояний системы должно выполняться равенство

$$R(\eta)\cos z_2\frac{\partial\phi}{\partial\eta}=0.$$

Это возможно лишь в случае, если функция ϕ не зависит от η. Тогда из второго уравнения следует, что

$$\frac{\partial\phi}{\partial z_1}=0,$$

поэтому решениями системы уравнений в частных производных являются только функции $\phi=$ const. Если функция ϕ постоянна, то соответствующие соотношения не задают невырожденную замену переменных.

Пусть $R(\eta)=1/(\eta^2+1)$. Покажем, что для системы (45) выполнены условия ***теоремы 2***. Функция $Q(z)$ имеет вид (25), причем

$$Q_1(z_1)=z_1^3,\qquad Q_2(z)\equiv 1,\qquad Q_3(z)=\cos z_2.$$

Функция $Q_1(z_1)$ удовлетворяет условиям (26):

$$\lim_{z_1 \to +\infty} z_1^3 = +\infty, \qquad \lim_{z_1 \to -\infty} z_1^3 = -\infty,$$

функция $Q_2(z)$ положительна и ограничена в $\mathbf{R}^2$ – константы N_1 и N_2 из условия (27) равны 1, функция $Q_3(z)$ ограничена:

$$\forall z \in \mathbf{R}^2 \qquad -1 \leqslant \cos z_2 \leqslant 1,$$

поэтому для нее выполнены условия (28) и (29) — достаточно для любого p взять $L_1 = -1$, $L_2 = 1$.

Таким образом, система (45) удовлетворяет условиям ***теоремы 2***, и, следовательно, управляема в $\mathbf{R}^3$ за любой интервал времени $[0, t_k]$.

Далее будем полагать, что функции $f(z,\eta)$, $g(z,\eta)$ имеют следующий вид:

$$f(z,\eta) = z_1 z_2, \quad g(z,\eta) = 4 + \eta^2.$$

Найдем управление $u(t)$, переводящее систему (45) с функциями $f(z,\eta)$, $g(z,\eta)$, $R(\eta)$ указанного вида из начального состояния $(0,0,0)^{\mathrm{T}}$ в конечное состояние $(5,5,-5)^{\mathrm{T}}$ за интервал времени $[0,5]$.

Функция $b(t)$, удовлетворяющая на отрезке $[0,5]$ граничным условиям по z, имеет вид

$$b(t) = \frac{3}{25}t^3 - \frac{2}{5}t^2.$$

В соответствии с формулой (20) при $n = 3$, $t_k = 5$

$$d(t) = t^2(5-t)^2.$$

Уравнение (30) принимает вид

$$-\frac{140}{3} = \int\limits_0^5 [(b(t) + c\,d(t))^3 + \cos(\dot{b}(t) + c\,\dot{d}(t))]dt.$$

Приближенное значение корня этого уравнения, полученное методом деления отрезка пополам, равно $c_* = -0{,}0786$. Следовательно, функция $B(t)$ из ***теоремы 1*** определяется выражением

$$B(t) = b(t) + c_*\,d(t) = \frac{3}{25}t^3 - \frac{2}{5}t^2 - 0,0786\,t^2(5-t)^2.$$

Траектории $z_1(t)$, $z_2(t)$, удовлетворяющие граничным условиям по z, имеют вид

$$z_1(t) = B(t), \qquad z_2(t) = \dot{B}(t).$$

Соответствующие графики приведены на рис. 3.

Траектория $\eta(t)$ находится как решение задачи Коши:

$$\dot{\eta} = \frac{B^3(t) + \cos\dot{B}(t)}{\eta^2+1}, \quad \eta(0) = 0.$$

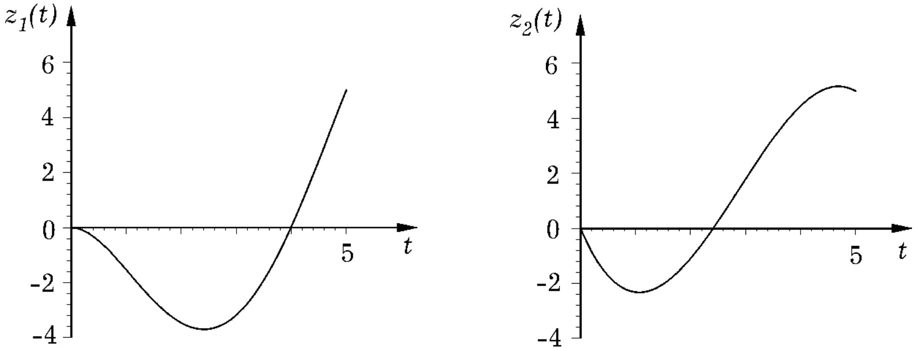

Рис. 3. Траектории $z_1(t)$, $z_2(t)$

Результат численного решения приведен на рис. 4.

Управление $u(t), t \in [0, 5]$, являющееся решением рассматриваемой терминальной задачи, можно найти, используя формулу (13):

$$u(t) = \frac{\ddot{B}(t) - B(t)\dot{B}(t)}{4 + \eta^2(t)}.$$

Полученная зависимость $u(t)$ показана на рис. 5.

Выводы. Задача исследования управляемости нелинейной динамической системы сформулирована как задача исследования существования решения соответствующих терминальных задач. Получено необходимое и достаточное условие существования решения терминальной задачи для регулярной системы квазиканонического вида. Доказана управляемость в $\mathbf{R}^n$ такой системы для случая, когда правая часть последнего уравнения имеет специальный вид. Приведен пример системы третьего порядка, которая не эквивалентна системе канонического вида на любом открытом множестве в $\mathbf{R}^3$, но является управляемой в $\mathbf{R}^3$.

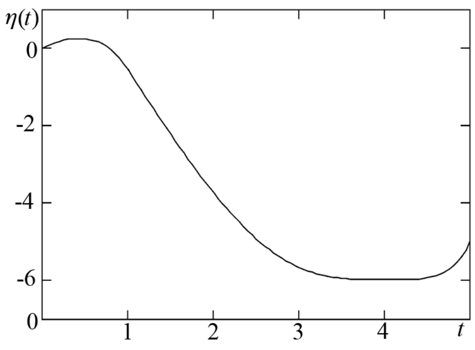

Рис. 4. Траектория $\eta(t)$

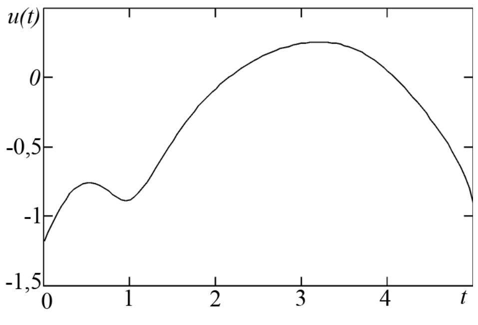

Рис. 5. Управление $u(t)$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00840) и программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (проект НШ 2094-2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковалев А. М. Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. – Киев: Наукова думка, 1980.
2. Sastry S. Nonlinear systems: analysis, stability, and control. Springer Verlag, New York, 1999.
3. Краснощеченко В. И., Крищенко А. П. Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. – 520 с.
4. Крищенко А. П. Исследование управляемости и множеств достижимости нелинейных систем управления // Автоматика и телемеханика. – 1984. – № 6. – С. 30–36.
5. Жевнин А. А., Крищенко А. П. Управляемость нелинейных систем и синтез алгоритмов управления // Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 258. – № 4. – С. 805–809.

Статья поступила в редакцию 22.12.2005

Дмитрий Анатольевич Фетисов родился в 1980 г., окончил МГТУ им. Н.Э. Баумана в 2003 г. Аспирант кафедры "Математическое моделирование" МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 2 научных работ в области нелинейной теории управления.

D.A. Fetisov (1980) graduated from the Bauman Moscow State Technical University in 2003. Post-graduate of "Mathematical Simulation" department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 2 publications in the field of nonlinear theory of control.
