УДК 512.562

Г. Л. Луканкин, И. Г. Табакова

# КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ЗАДАННОЙ ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЙ ОБЛАСТИ

*Приведено решение задачи Римана–Гильберта для голоморфных функций двух комплексных переменных при задании краевых условий не на всей топологической границе бицилиндра, а на некоторой ее части или на некотором множестве одномерных кривых.*

Краевые задачи линейного сопряжения применяются как в математике (сингулярные и бисингулярные интегральные уравнения, уравнения типа свертки и др.), так и при рассмотрении большого числа прикладных задач в теории упругости, гидродинамики и аэродинамики, дифракции, теории массового обслуживания, в теории переноса частиц и т.д. Среди исследователей краевой задачи следует назвать Пикарда, Привалова, Племели, Карлемана. Существенное развитие эта теория получила в работах Д.Ф. Гахова [1], И.Н. Векуа [2], Г.Л. Луканкина [3, 4], М.Г. Крейна и других.

В настоящей статье исследуется задача Римана–Гильберта в бицилиндрической области при задании краевого условия не на всей топологической границе бицилиндра, а на некоторой ее двумерной части — остове, и задача Римана–Гильберта для бицилиндра с краевым условием на некотором множестве одномерных кривых, лежащих на границе бицилиндра и не принадлежащих остову. Дополнительно к краевому условию задаются значения искомого решения в счетном числе внутренних и граничных точек.

Задача сводится к двум классическим проблемам теории голоморфных функций одной комплексной переменной — краевой задаче Римана–Гильберта и задаче нахождения голоморфной функции в круге по функциональным значениям ее в счетном числе внутренних точек.

Новизна данной работы состоит в том, что задачи Римана–Гильберта исследуются для голоморфных функций двух комплексных переменных, в первом случае краевое условие задано на остове бицилиндра, во втором — на некотором множестве одномерных кривых.

**Постановка и решение краевой задачи Римана–Гильберта для заданной определяющей области с краевым условием на остове.** В качестве заданной определяющей области рассматривается бицилиндрическая область

$$D = \{(w, z) : \ |w| < 1, \ |z| < 1\}$$

в пространстве $C^2$ комплексных переменных $w$, $z$, и на остове бицилиндра

$$\wp = \{(t, \tau):\ |t| = 1,\ |\tau| = 1\}$$

задаются три вещественные непрерывные функции $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Требуется отыскать функцию $f\,(w, z) = u + iv$, голоморфную в области $D$ и непрерывную в $D + \wp$, которая на остове $\wp$ области D удовлетворяла бы условию

$$\operatorname{Re}\left[\bar{\lambda} f\right] = \alpha u + \beta v = \gamma, \quad \lambda = \alpha + i\beta \quad (\text{на } \wp). \tag{1}$$

Следует отметить, что в данном случае краевое условие задается не на всей топологической (трехмерной) границе, а только на некоторой ее двумерной части, а именно, на остове, который представляет собой двумерный тор в пространстве комплексных переменных $w$, $z$.

Точки тора $\wp$ описываются заданием пары угловых координат $(\varphi, \psi)$, $0 \leqslant \varphi, \psi \leqslant 2\pi$, где $\varphi = 0$ отождествляется с $\varphi = 2\pi$, и точно такое же отождествление производится для $\psi$. Таким образом имеем

$$(0, \psi) = (2\pi, \psi)\,, \quad (\varphi, 0) = (\varphi, 2\pi)\,.$$

Введем на торе $\wp$ систему координат, положив

$$t = e^{i\varphi}, \quad \tau = e^{i\psi}, \quad 0 \leqslant \varphi, \psi \leqslant 2\pi.$$

Будем рассматриваемые далее функции, заданные на торе $\wp$, выражать как функции параметров $(\varphi, \psi)$. Предположим, что непрерывная функция $\lambda$ не обращается в нуль ни в одной точке остова. Тогда можно считать $|\lambda| = 1$.

Вычислим интеграл

$$J = \int\limits_C d\omega,$$

где $C$ — некоторый цикл на торе $\wp$. Когда $\varphi$ меняется от 0 до $2\pi$, точки $(\varphi, 0)$ описывают ориентированную замкнутую кривую $C_1$; подобным же образом точки $(\psi, 0)$ описывают кривую $C_2$. Пусть $C$ — некоторый цикл на торе, то есть ориентированная замкнутая кривая. Как известно, кривую $C$ можно сдеформировать в ориентированную замкнутую кривую $C'$, которая $n_1$ раз обходит кривую $C_1$, а затем $n_2$ раз кривую $C_2$, где $n_1$ и $n_2$ — некоторые целые числа.

Заметим, далее, что

$$\int\limits_C d\omega = \int\limits_{C'} d\omega.$$

Обозначим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_1} d\omega = \chi_1, \qquad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_2} d\omega = \chi_2, \tag{2}$$

тогда получим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C} d\omega = n_1\chi_1 + n_2\chi_2. \tag{3}$$

Следовательно, функцию $\lambda$ можно представить в виде

$$\lambda = e^{i(\omega - \chi_1\varphi - \chi_2\psi)} t^{\chi_1}\tau^{\chi_2} = t^{\chi_1}\tau^{\chi_2}e^{i\omega_1},$$

где $\omega_1 \equiv \omega - \chi_1\varphi - \chi_2\psi$ — однозначная и непрерывная на $\wp$ функция.

Согласно Векуа [5], задача (1) эквивалентна последовательному решению двух задач Дирихле в классе бигармонических функций. Предположим, что $\Omega\left(w, z\right) = \omega_1 + i\omega_2$ — голоморфная функция внутри единичного бицилиндра $D$, удовлетворяющая уравнению

$$\mathrm{Re}\Omega = \omega_1 \qquad (\text{на } \wp). \tag{4}$$

Тогда условие (1) можно переписать в следующем виде:

$$\text{Re}\left[\bar{\lambda} f\right] = \text{Re}\left[t^{-\chi_1}\tau^{-\chi_2}e^{-i\omega_1}f\right] = \text{Re}\left[e^{-i\Omega}t^{-\chi_1}\tau^{-\chi_2}e^{-\omega_2}f\right] = \gamma.$$

Отсюда следует, что для новой, голоморфной в этой же области функции $F = f\ \exp\left\{-i\Omega\right\}$ достаточно решить задачу

$$\text{Re}\left[t^{-\chi_1}\tau^{-\chi_2}F\right] = e^{\omega_2}\gamma \equiv \gamma_1 \qquad (\text{на } \wp)\,. \tag{5}$$

Для разрешимости задачи (4) необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \omega_1\left(\varphi, \psi\right)e^{i(m\varphi - n\psi)}d\varphi d\psi = 0, \quad m, n = 1, 2\ldots. \tag{6}$$

Тогда решение задачи (4) может быть найдено по формуле

$$\Omega\left(w, z\right) = \frac{1}{\left(2\pi i\right)^2}\int\limits_{|t|=1}\int\limits_{|\tau|=1}\omega\left(t, \tau\right)\left[\frac{2}{\left(1 - w\bar{t}\right)\left(1 - z\bar{\tau}\right)} - 1\right]\frac{dt}{t}\wedge\frac{d\tau}{\tau} + ic, \tag{7}$$

где $c$ — действительная постоянная.

Перейдем теперь к исследованию задачи (5). Сначала рассмотрим однородную задачу. Предположим, что $\chi_1 \geqslant 0$, $\chi_2 \geqslant 0$. При этом краевое условие примет вид

$$\operatorname{Re}\left[\frac{F}{t^{\chi_1}\tau^{\chi_2}}\right] = 0. \tag{8}$$

Решение задачи (8) будем искать в виде ряда

$$F(w,z) = \sum_{m=-\chi}^{\infty}\sum_{n=-\chi}^{\infty} C_{m+\chi_1\, n+\chi_2} w^{m+\chi_1} z^{n+\chi_2}. \tag{9}$$

Удовлетворяя краевому условию (8), получим

$$\operatorname{Re}\left[\sum_{m,n=0}^{\infty} C_{m+\chi_1\, n+\chi_2} t^m \tau^n\right] = -\operatorname{Re}\left[\sum_{m=1}^{\chi_1}\sum_{n=1}^{\chi_2} C_{\chi_1-m_1\,\chi_2-n} t^{-m}\tau^{-n} + \right.$$
$$\left. + \sum_{m=1}^{\chi_1}\sum_{n=0}^{\infty} C_{\chi_1-m_1\, n+\chi_2} t^{-m}\tau^{n} + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\chi_2} C_{\chi_1+m_1\,\chi_2-n} t^{m}\tau^{-n}\right]. \tag{10}$$

Из соотношения (10) следует, что

$$C_{m+\chi_1\, n+\chi_2} =$$
$$= -\overline{C}_{\chi_1-m_1\chi_2-n_1},\ m = 0,1,\ldots,\chi_1, n = 0,1,\ldots,\chi_2,\ m^2+n^2 \neq 0;$$
$$C_{\chi_1\chi_2} = -ib_{\chi_1\chi_2},\ \text{где}\quad C_{mn} = a_{mn} - ib_{mn};$$
$$C_{m+\chi_1\, n+\chi_2} = 0,\ \text{если}\ \begin{cases} m \geqslant \chi_1+1, & m = 0,1,2,\ldots, \\ n \geqslant \chi_2+1, & n = 0,1,2,\ldots, \end{cases}$$
$$C_{m+\chi_1\, n+\chi_2} = 0,\ \text{если}\ \begin{cases} m = -\chi_1,\ldots,-1, & m \geqslant 1, \\ n = -\chi_2,\ldots,-1, & n \geqslant 1. \end{cases} \tag{11}$$

Учитывая соотношения (11), получим

$$F(w,z) = -ib_{\chi_1\chi_2} w^{\chi_1} z^{\chi_2} +$$
$$+ \sum_{m=1}^{\chi_1}\sum_{n=1}^{\chi_2}\left(C_{m+\chi_1\, n+\chi_2} w^{m+\chi_1} z^{n+\chi_2} - \overline{C}_{m+\chi_1\, n+\chi_2} w^{\chi_1-m} z^{\chi_2-n}\right) +$$
$$+ \sum_{m=1}^{\chi_1}\left(C_{m+\chi_1\,\chi_2} w^{m+\chi_1} z^{\chi_2} - \overline{C}_{m+\chi_1\,\chi_2} w^{\chi_1-m} z^{\chi_2}\right) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\chi_2}\left(C_{\chi_1\, n+\chi_2} w^{\chi_1} z^{n+\chi_2} - \overline{C}_{\chi_1\, n+\chi_2} w^{\chi_1} z^{\chi_2-n}\right).$$

Решение однородной задачи обозначим через $R(w, z)$.

***Теорема 1.*** *Пусть функция $\omega_1$ удовлетворяет условиям (6). Тогда, если $\chi_1 \geqslant 0$, $\chi_2 \geqslant 0$, однородная задача Римана–Гильберта (8) имеет $(2\chi_1 + 1)(2\chi_2 + 1) - 2\chi_1\chi_2$ — линейно независимых решений, которые могут быть представлены формулой*

$$f(w, z) = w^{\chi_1} z^{\chi_2} R(w, z) \exp\{i\Omega\}.$$

Неоднородная задача (5) имеет решение тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \gamma\, e^{\omega_2} e^{i(m\varphi - n\psi)} d\varphi d\psi = 0, \quad m, n = 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

и ее решение представимо в виде

$$f = w^{\chi_1} z^{\chi_2} \exp\{i\Omega\}[F + R],$$

где функция $\Omega$ определяется по формуле (7), а

$$F(w, z) = \frac{1}{(2\pi\, i)^2} \int\limits_{|t|=1} \int\limits_{|\tau|=1} \gamma\, e^{\omega_2} \left[\frac{2}{\left(1 - w\bar{t}\right)(1 - z\bar{\tau})} - 1\right] \times$$
$$\times \frac{dt}{t} \wedge \frac{d\tau}{\tau} + i_c^*; \tag{13}$$

(число $\ell \leqslant (2\chi_1 + 1)(2\chi_2 + 1) - 2\chi_1\chi_2$, а индекс $\chi = -\infty$).

Если $\chi_1 \geqslant 0$, $\chi_2 \geqslant 0$, то однородная задача (8) неразрешима, т.е. не имеет нетривиальных решений. Неоднородная задача (5) разрешима тогда и только тогда, когда наряду с условиями (12) имеют место равенства

$$c^* = 0, \quad \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \gamma\, e^{\omega_2} e^{-i(m\varphi + n\psi)} d\varphi d\psi = 0 \tag{14}$$

для тех $m$ и $n$, для которых не выполняются одновременно неравенства $m \geqslant -\chi_1$, $n \geqslant\ \chi_2$.

Если $\chi_1 \geqslant 0$, $\chi_2 < 0$, то однородная задача не имеет нетривиальных решений. Неоднородная задача разрешима тогда и только тогда, когда выполнены условия (12) и условия (14).

Таким образом, в рассмотренном случае, несмотря на то, что краевое условие задавалось только на части границы, задача Римана–Гильберта оказалась переопределенной.

**Постановка и решение краевой задачи Римана–Гильберта для заданной определяющей области с краевым условием на некотором множестве одномерных кривых.** Пусть заданная определяющая область

$$D = \{(w, z): \ \ |w| < 1, \ \ |z| < 1\}$$

– единичный бицилиндр в пространстве двух комплексных переменных. Требуется найти функцию $f(w, z) \equiv u + iv$, голоморфную в области $D$, предельные значения которой на кривых

$$\partial D_k = \{(t, z): \ |t| = 1, \ \ z = z_k = \text{const}, \ \ |z_k| < 1, \ \ k = 1, 2, \ldots\} \tag{15}$$

удовлетворяют условиям

$$\mathrm{Re}\left[\overline{\lambda_k(t)} f(t, z_k)\right] \equiv \alpha_k(t)\ u(t, z_k) + \beta_k(t)\ v(t, z_k) = \gamma_k(t)\,; \tag{16}$$

$$\lambda_k(t) = \alpha_k(t) + i\beta_k(t)\,,$$

где $\alpha_k(t)$, $\beta_k(t)$, $\gamma_k(t)$ — вещественнозначные непрерывные на $\partial D_k$ функции, а бесконечное произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty} |z_k|$ расходится.

Заметим, что функцию $f(w, z)$, голоморфную в области $D$, можно разложить в ряд

$$f(w, z) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} w^m z^n = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(z)\, w^m, \tag{17}$$

где функции $f_m(z)$ голоморфны в круге $|z|<1$. Поэтому краевое условие (16) можно переписать в виде

$$\mathrm{Re}\left[\overline{\lambda_k(t)} \sum_{m=0}^{\infty} f_m(z_k)\, w^m\right] = \gamma_k(t)\,. \tag{18}$$

Рассмотрим частный случай задачи (16), когда $\lambda_k(t) \equiv 1$, т.е. задачу

$$\mathrm{Re}\left[f(t, z_k)\right] = \gamma_k(t)\,. \tag{19}$$

Так как функции $f(w, z_k)$ голоморфны в областях

$$D_k = \{(w, z_k): |w| < 1, \quad z_k = \text{const}\}\,,$$

то для функции $f(w, z)$ мы имеем счетное число задач типа Дирихле. Присоединим к граничным соотношениям (19) дополнительное условие

$$Jm\, f(0, z_k) = 0. \tag{20}$$

Решение каждой из задач (19) при условии (20) найдем с помощью интеграла Шварца:

$$f(w, z_k) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \gamma_k(t) \, \frac{t+w}{t-w} \, \frac{dt}{t}. \tag{21}$$

Разлагая теперь обе части последнего равенства в степенной ряд и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $w$, получим

$$\left.\begin{aligned} f_0(z_k) &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \gamma_k\left(e^{i\varphi}\right) d\varphi, \\ f_m(z_k) &= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \gamma_k\left(e^{i\varphi}\right) e^{-im\varphi} d\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Таким образом, для каждой из функций $f_m(z)$, голоморфных в круге $|z| < 1$, оказываются заданными функциональные значения $f_m(z_k)$ в счетном числе точек $z_k$, таких, что $|z_k| < 1$ и бесконечное произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty} |z_k|$ расходится, а эти условия однозначно определяют голоморфную функцию в круге $|z| < 1$. Для существования голоморфной функции, принадлежащей классу $H_2$ и принимающей в указанных точках заданные значения, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left|C_k^m\right|^2}{1 - \left|z_{k+1}\right|^2} < \infty, \tag{23}$$

где $C_k^m$ — коэффициенты формального разложения, полученного интерполяцией в точках $z_k$ функциональных значений $f_m(z_k)$:

$$f_m(z) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j^m \omega_j(z); \tag{24}$$

здесь

$$\omega_k(z) = \frac{1}{1 - \bar{z}_{k+1} z} \prod_{n=0}^{k} \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z}. \tag{25}$$

Полагая в формуле (24) последовательно $z = z'_n$, $n = 1, 2, \ldots, k + {}$ $+ 1$, получим систему линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &f_m(z_1) = C_0^m \omega_0(z_1), \\ &f_m(z_2) = C_0^m \omega_0(z_2) + C_1^m \omega_1(z_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f_m(z_{k+1}) = C_0^m \omega_0(z_{k+1}) + C_1^m \omega_1(z_{k+1}) + \ldots + C_k^m \omega_k(z_{k+1}) \end{aligned}\right\}, \tag{26}$$

причем определитель системы (26)

$$\Delta_k = \prod_{n=1}^{k+1} \omega_{n-1}(z_n).$$

Из системы (26) найдем коэффициенты $C_k^m$:

$$C_k^m = \frac{1}{\Delta_k}\left[A_1^k f_m(z_1) + A_2^k f_m(z_2) + \ldots A_{k+1}^k f_m(z_{k+1}) = \right.$$

$$= \alpha_1^k f_m(z_1) + \alpha_2^k f_m(z_2) + \ldots + \alpha_{k+1}^k f_m(z_{k+1}), \quad (27)$$

где $A_j^k$ — алгебраическое дополнение элемента $f_m(z_j)$, и $\alpha_j^k = \dfrac{A_j^k}{\Delta_k}$.

Из формул (22) и (27) следует, что

$$C_k^m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\alpha_1^k \gamma_1\left(e^{i\varphi}\right) + \ldots + \alpha_{k+1}^k \gamma_{k+1}\left(e^{i\varphi}\right)\right] e^{-im\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathit{\Gamma}_k(\varphi)\, e^{-im\varphi} d\varphi, \quad (28)$$

где $\mathit{\Gamma}_k(\varphi) = \sum\limits_{j=1}^{k+1} \alpha_j^k \gamma_j\left(e^{i\varphi}\right)$.

Условию (23) можно теперь придать следующий вид:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-im(\varphi-\psi)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathit{\Gamma}_k(\varphi)\,\overline{\mathit{\Gamma}_k(\psi)}}{1 - |z_{k+1}|^2} d\varphi d\psi < \infty. \quad (29)$$

Далее, разложим функцию $f_m(z)$, найденную по формуле (24), в степенной ряд:

$$f_m(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{mk} z^k \quad (30)$$

и предположим, что коэффициенты $b_{mk}$ удовлетворяют следующему условию:

$$\varlimsup_{k+m\to\infty} \sqrt[k+m]{|b_{mk}|\, d_{mk}(D)} \leqslant 1, \quad (31)$$

где $d_{mk}(D) = \sup\limits_{(w,z)\in D} |w|^m |z|^k$.

Заметим, что условие (31) является необходимым и достаточным для того, чтобы ряд $\sum\limits_{m,k=0}^{\infty} b_{mk} w^m z^k$ сходился в области $D$.

Таким образом, доказано утверждение

***Теорема 2.*** *Если выполнены условия* (29) *и* (31), *то краевая задача типа Дирихле* (19) *разрешима и имеет единственное решение, которое может быть найдено по формуле*

$$f\left(w,z\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\Gamma_j\left(\varphi\right)e^{-im\varphi}d\varphi\right)\omega_j\left(z\right)\right]w^m,$$

*где*

$$\Gamma_j\left(\varphi\right)=\sum_{k=1}^{j+1}\alpha_k^j\gamma_k\left(e^{i\varphi}\right);$$

$$\omega_j\left(z\right)=\frac{1}{1-\overline{z}_{j+1}z}\prod_{n=0}^{j}\frac{z-z_n}{1-\overline{z}_n z}.$$

Рассмотрим теперь задачу типа Римана–Гильберта

$$Re\left[\overline{\lambda_k\left(t\right)}f\left(t,z_k\right)\right]=\gamma_k\left(t\right)\quad (\text{на }\ \partial D_k).$$

Как и в случае одной комплексной переменной, будем предполагать, что функции $\lambda_k\left(t\right)$ не обращаются в нуль ни в одной точке контура $\partial D_k$. Тогда можно считать, что $\left|\lambda_k\left(t\right)\right|=1$ на $\partial D$. Для каждой функции $f\left(w,z_k\right)$, голоморфной в области $D_k$, имеем классическую задачу Римана–Гильберта.

Краевые условия (16) можно преобразовать к виду

$$\mathrm{Re}\left[e^{-i\Omega_k(t)}t^{-\chi_k}f\left(t,z_k\right)\right]=\gamma_k e^{Jm\Omega_k}\equiv\gamma_k^1, \tag{32}$$

где

$$\Omega_k\left(w\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\left[\arg\lambda_k\left(t\right)-\chi_k\arg t\right]\frac{t+w}{t-w}\frac{dt}{t}; \tag{33}$$

$$\chi_k=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\lambda_k\left(t\right)\right]\Big|_{\partial D_k}. \tag{34}$$

Пусть $\chi_k \geqslant 0$ для $k = n_1, n_2, \ldots$; $\chi_k < 0$ для $k = m_1, m_2, \ldots$ Рассмотрим сначала последовательность задач (32) с неотрицательными индексами $\chi_{nk}$, $k = 1, 2, \ldots,$:

$$\mathrm{Re}\left[e^{-i\Omega n_k} t^{-\chi_{nk}} f\left(t, z_{n_k}\right)\right] = \gamma'_{n_k}. \tag{35}$$

Решение задачи (35) может быть найдено по формуле

$$f\left(w, z_{n_k}\right) = \frac{w^{\chi_{n_k}} e^{i\Omega n_k}}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \gamma'_{n_k} \frac{t+w}{t-w} \frac{dt}{t} + e^{i\Omega n_k} \sum_{e=0}^{2\chi n_k} d_\ell^{n_k} w^e, \tag{36}$$

где $d_\ell^{n_k}$ — комплексные постоянные, которые удовлетворяют условиям

$$d^{n_k}_{2\chi_{n_k}-\ell} = -\overline{d}_\ell^{n_k}, \quad \ell = 0, 1, ..., \chi_{n_k}.$$

Задача (35) всегда разрешима, но решение ее не единственно, а именно, зависит от $(2\chi_{n_k} + 1)$ произвольных постоянных. Следуя Векуа [5] задача (35) преобразуется так, чтобы она имела единственное решение.

Пусть $w_1, \ldots w_{p_k}$ и $t_1, \ldots t_{q_k}$ произвольно зафиксированные точки области $D_k$ и ее границы $\partial D_k$ соответственно, причем соблюдено условие, что числа $p$ и $q$ удовлетворяют соотношению

$$2p_k + q_k = 2\chi_{n_k} + 1.$$

При выборе чисел $p$ и $q$ возможны следующие крайние случаи:

$$1)\ p_k = 0, \quad q_k = 2\chi_{n_k} + 1; \qquad 2)\ p_k = \chi_{n_k}, \quad q_k = 1.$$

Зададим теперь на этом множестве значение искомого решения $f\left(w, z_k\right)$ задачи (36):

$$\left.\begin{aligned} &f\left(w_j, z_{n_k}\right) = a_j^k + ib_j^k, \quad j = 1, 2, \ldots, p_k; \\ &f\left(t_j, z_{n_k}\right) = \lambda_{n_k}^j\left(\gamma_{n_k}^j + ic_j^k\right), \qquad j = 1, 2, \ldots, q_k, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

где $a_j^k, b_j^k$ и $c_j^k$ — произвольно заданные вещественные константы, $\lambda_{n_k}^j = \lambda_{n_k}\left(t_j\right), \quad \gamma_{n_k}^j = \gamma_{n_k}\left(t_j\right).$

Задача (36) при добавочных условиях (37) всегда допускает решение и притом единственное. Оно непрерывно зависит от точек $w_j$ и $t_j$ и линейно содержит постоянные $a_j^k$, $b_j^k$, $c_j^k$.

Разлагая обе части равенства (36) в ряд и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $w$, найдем, что

$$f_m\left(z_{n_k}\right)=\sum_{\ell=0}^{m} A_\ell^{n_k}\,\beta_{m-\ell}^{n_k}, \tag{38}$$

где

$$A_\ell^{n_k}=\begin{cases}\alpha_\ell^{n_k}, & \text{если } \ell=0,1,...,\chi_{n_k},\\ \delta_{\ell-\chi_{n_k}}^{n_k}+d_\ell^{n_k}, & \text{если } \ell=\chi_{n_k}+1,\ldots,2\chi_{n_k},\\ \delta_{\ell-\chi_{n_k}}^{n_k}, & \text{если } \ \ell>2\chi_{n_k},\end{cases}$$

$$\delta_0^{n_k}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\gamma_{n_k}^1\left(e^{i\varphi}\right)\,d\varphi,\quad \delta_\ell^{n_k}=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\gamma_{n_k}^1\,e^{-i\ell\varphi}d\varphi,$$

а $\beta_\ell^{n_k}$ — коэффициенты ряда

$$e^{i\Omega n_k(w)}=\sum_{\ell=0}^{\infty}\beta_\ell^{n_k}\,w^\ell.$$

Пусть $k=m_1,m_2,\ldots$, тогда $\chi_{m_k}<0$. Снова получим последовательность задач Римана–Гильберта

$$\operatorname{Re}\left[e^{-i\Omega m_k}t^{-\chi m_k}f\left(t,z_{m_k}\right)\right]=\gamma_{m_k}^1, \tag{39}$$

но теперь уже с отрицательными индексами. Из равенства (39) следует, что

$$f\left(w,z_{m_k}\right)=\frac{w^{\chi_{m_k}}e^{i\Omega m_k(w)}}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\gamma_{m_k}^1\,\frac{t+w}{t-w}\,\frac{dt}{t}+ic_0^{m_k}e^{i\Omega m_k(w)}w^{m_k}, \tag{40}$$

где $C_0^{m_k}$ — вещественная постоянная. Из непрерывности $f\left(w,z_{m_k}\right)$ следует, что

$$c_0^{m_k}=0,\quad \int\limits_0^{2\pi}\gamma_{m_k}^1 e^{-ie\varphi}d\varphi=0,\quad \ell=0,1,\ldots,-\chi_{m_k}+1. \tag{41}$$

В таком случае $f\left(w,z_{m_k}\right)$ будет иметь вид

$$f\left(w,z_{m_k}\right)=\frac{e^{i\Omega m_k(w)}}{\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\gamma_{m_k}^1 t^{\chi_{m_k}}}{t-w}dt. \tag{42}$$

Отсюда находим, что

$$f_n\left(z_{m_k}\right)=\sum_{\ell=0}^{n}\beta_\ell^{m_k}b_{n-\ell}^{m_k}, \tag{43}$$

где

$$b_n^{m_k}=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\gamma'_{m_k}e^{-i\varphi\left(n-\chi_{m_k}\right)}d\varphi.$$

Теперь можно сформулировать окончательный результат.

***Теорема 3.*** *Пусть функции $\alpha_k\left(t\right)$, $\beta_k\left(t\right)$, $\gamma_k\left(t\right)$ таковы, что*:

$$1)\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left|C_k^m\right|^2}{1-\left|z_{k+1}\right|^2}<\infty,$$

*где $C_k^m$ — коэффициенты формального разложения, полученного интерполяцией в точках $z_k$ функциональных значений $f_m\left(z_k\right)$ :*

$$f_m\left(z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k^m\omega_k\left(z\right),$$

*а функциональные значения $f_m\left(z_k\right)$ находятся по формулам* (38), (43);

$$2)\ \varlimsup_{k+m\to\infty}\sqrt[k+m]{\left|b_{mk}\right|d_{mk}\left(D\right)}\leqslant 1,$$

*где $b_{mk}$ — коэффициенты степенного ряда*

$$f_m\left(z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k^m\omega_k\left(z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}b_{mk}z^k.$$

*Тогда краевая задача Римана–Гильберта* (16) *с дополнительными условиями* (37) *разрешима тогда и только тогда, когда имеют место соотношения* (41). *В этом случае решение задачи может быть найдено по формуле*

$$f\left(w,z\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty}C_k^m\omega_k\left(z\right)\right]w^m.$$

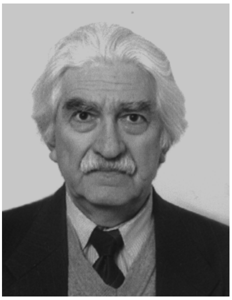
Заметим, что, если число чисел $\chi_{m_k}<0$ конечно, то число разрешимости задачи (16) также конечно.

Таким образом, на примере единичного бицилиндра в пространстве двух комплексных переменных мы убедились, что задача (16) с дополнительными условиями (37) может иметь конечный индекс, если краевое условие задавать не на всей топологической границе, а на некоторой ее части.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Г а х о в Ф. Д. Краевые задачи. – М.: Физматгиз, 1963.
2. В е к у а Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. – М.: Наука, 1970.
3. Л у к а н к и н Г. Л. О некоторых краевых задачах для функций двух комплексных переменных // Ученые записки МОПИ им. Н.К. Крупской. – 1970. – Т. 269.
4. Л у к а н к и н Г. Л. Пространственная задача линейного сопряжения // Вестник МАН ВШ. – 1999. – № 4(6).
5. В е к у а И. Н. Об одной граничной задаче Римана / Труды Тбл. мат. ин-та АН ГрузССР. – 1968. – Т. 11, вып. 2. – С. 109–139.


Статья поступила в редакцию 28.02.2006

Геннадий Лаврович Луканкин родился в 1937 г., окончил МОПИ им. Н.К. Крупской в 1959 г. Канд. физ.-мат. наук, д-р пед. наук, проф., чл.-кор. РАО, зав. кафедрой мат. анализа МГОУ. Автор более 300 научных работ в области комплексного анализа и методики преподавания математики, а также учебников для средней и высшей школ.

G.L. Lukankin (b. 1937) graduated from the Moscow Regional Pedagogical Institute n.a. N.K. Krupskaya in 1959. Ph. D. (Phys.-Math.), D. Sc. (Pedagogy), professor, corresponding member of the Russian Academy of Education, head of the mathematical analysis department of the Moscow State Open University. Author of more than 300 publications in the field of analysis of complex-valued variables and methodology of teaching mathematics, including textbooks for secondary and higher schools.

Ирина Геннадьевна Табакова родилась в 1982 г., окончила МПГУ в 2004 г. Аспирантка кафедры “Математический анализ” МГОУ. Автор 3 научных работ в области комплексного анализа.

I.G. Tabakova (b. 1982) graduated from the Moscow State Pedagogical University in 2004. Post-graduate of “Mathematical Analysis” department of the Moscow State Open University. Author of 3 publications in the field of analysis of complex-valued variables.