

А. Н. Морозов, А. В. Скрипкин

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ВТОРОГО РОДА ДЛЯ ОПИСАНИЯ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

С использованием уравнения Вольтерра второго рода проведено описание флуктуаций скорости движения и температуры плоской поверхности в среде, заполняющей полупространство. Показано, что эти флуктуации представляют собой немарковские случайные процессы с характерной особенностью типа фликкер-шум в низкочастотной части спектра.

Броуновское движение. При описании броуновского движения обычно используется подход, основанный на применении стохастического уравнения Ланжевена [1, 2]. Указанный подход позволяет воспользоваться хорошо разработанной теорией стохастических дифференциальных систем [3, 4], с помощью которой можно определять все необходимые статистические характеристики флуктуаций скорости движения броуновской частицы.

В качестве примера рассмотрим случай одномерного движения броуновской частицы массой M , скорость V которой задается линейным уравнением

$$M \frac{dV}{dt} = F(t) + \xi_V(t), \quad (1)$$

где сила вязкого трения

$$F(t) = -\gamma V(t), \quad (2)$$

γ — коэффициент вязкого трения, а случайное воздействие $\xi_V(t)$ описывается δ -коррелированным процессом, например производной от винеровского процесса.

Считая спектральную плотность случайного процесса $\xi_V(t)$ равной

$$G_M = 2\gamma kT, \quad (3)$$

где k — постоянная Больцмана, T — температура вязкой жидкости, в которой находится броуновская частица, спектральную плотность флуктуаций скорости $V(t)$ запишем в виде [1]

$$G_V(\omega) = \frac{\alpha}{\omega^2 + \beta^2}, \quad (4)$$

где $\alpha = 2\gamma kT/M^2$; $\beta = \gamma/M$. Для низких частот спектральная плотность $G_V(\omega)$ стремится к постоянной величине:

$$G_V(\omega)|_{\omega \rightarrow 0} = \frac{2kT}{\gamma}. \quad (5)$$

Если случайный процесс $\xi(t)$ представляет собой производную от процесса с независимыми приращениями, то скорость $V(t)$ броуновской частицы описывается марковским случайным процессом, что позволяет определить для нее любые L -мерные характеристические функции, а следовательно, и любые многомерные функции распределения [3].

Отметим, что описанный подход может быть использован и при решении задачи определения флуктуаций температуры тела, находящегося в тепловом контакте с термостатом, если тепловой поток от него пропорционален разности температур тела и термостата.

Рассмотренная простейшая модель броуновского движения применима только в том случае, если сила вязкого трения в среде может быть записана в виде равенства (2). Но в реальном случае, кроме непосредственного соударения броуновской частицы с находящимися в близости от нее частицами среды, наблюдается увлечение частиц среды, расположенных на расстоянии от броуновской частицы [5]. Это приводит к существенному изменению характера вязкого трения и соотношение (2) становится несправедливым.

Учет увлечения вязкой жидкости движущимся телом приводит к необходимости использования для описания движения интегральных уравнений, что в свою очередь делает необходимым применение теории немарковских процессов [6]. В данной работе рассмотрены явления вязкости и теплопроводности в полупространстве и показано, что даже для этих простейших случаев неприменимо традиционное описание случайных процессов как марковских.

Вязкость в полупространстве. Рассмотрим движение плоской поверхности в вязкой жидкости, занимающей полупространство ($x > 0$). Будем считать, что плоскость расположена в начале координат (при $x = 0$), а ее движение со скоростью $V(t)$ происходит в направлении, перпендикулярном оси x и лежащем в плоскости (см. рис. 1). На плоскость действуют сила вязкого трения $F(t)$ со стороны среды и случайная сила $\xi_V(t)$ (на единицу площади).

Движение плоскости в вязкой жидкости будет описываться уравнением (1) (масса M считается отнесенной к единице площади), а вместо соотношения (2) необходимо применять формулу для силы вязкого трения, действующей со стороны жидкости:

$$F(t) = \eta \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad (6)$$

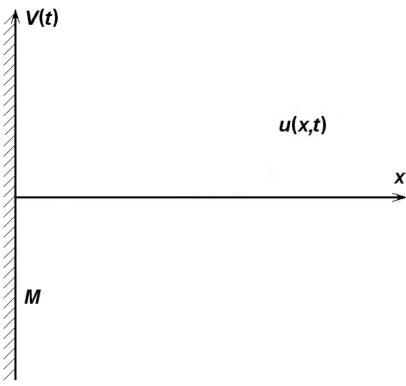


Рис. 1. Движение плоскости в вязкой жидкости

где η — вязкость жидкости, $u(x, t)$ — скорость течения жидкости.

В рассматриваемом одномерном случае, считая скорость жидкости малой, уравнение для $u(x, t)$ при $x > 0$ имеет вид [5]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (7)$$

где $\nu = \eta/\rho$, ρ — плотность жидкости.

Граничное и начальное условия для уравнения (7) имеют форму

$$u(x, 0) = 0, \quad (8)$$

$$u(0, t) = V(t). \quad (9)$$

Тогда решение уравнения (7) с учетом условий (8) и (9) приобретает вид [7]

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4\nu(t-\tau)}\right] V(\tau) d\tau. \quad (10)$$

Найдем производную выражения (10) по переменной x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = & \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \left[\frac{1}{(t-\tau)^{3/2}} - \frac{2x^2}{4\nu(t-\tau)^{5/2}} \right] \times \\ & \times \exp\left[-\frac{x^2}{4\nu(t-\tau)}\right] V(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (11)$$

Вычисление интеграла (11) по частям дает

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{x^2}{4\nu(t-\tau)}\right] \frac{dV(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (12)$$

Подстановка выражения (12) в формулу (6) позволяет определить зависимость силы $F(t)$ от скорости $V(t)$:

$$F(t) = -\frac{\eta}{\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{dV(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (13)$$

Эта формула для рассматриваемого случая заменяет выражение (2). Формула (13) получена другим способом в работе [5].

Таким образом, описание флуктуаций скорости плоской поверхности в вязкой жидкости, заполняющей полупространство, сводится к решению системы уравнений (1) и (13). Так как уравнение (13) имеет вид интегрального уравнения, то случайный процесс $F(t)$, а следовательно, и процесс $V(t)$ представляют собой немарковские случайные процессы.

Теплопроводность в полупространстве. Покажем, что описание теплопроводности в полупространстве ($x > 0$) в случае, когда температура плоской поверхности (при $x = 0$) является заданной функцией времени $T(t)$ (рис. 2), сводится к задаче, аналогичной рассмотренной выше. Система уравнений, описывающая изменение температуры $T(t)$ плоской поверхности и температуры среды $\tilde{T}(x, t)$ при $x > 0$, в одномерном случае имеет вид

$$C \frac{dT}{dt} = Q(t) + \xi_T(t), \quad (14)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2}. \quad (15)$$

где C — теплоемкость единицы площади стенки, $Q(t)$ — плотность потока теплоты от плоской поверхности к среде, заполняющей полупространство, $\xi_T(t)$ — δ -коррелированный случайный процесс, χ — температуропроводность.

Добавление условий

$$Q(t) = \kappa \left. \frac{\partial \tilde{T}(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad (16)$$

$$\tilde{T}(x, 0) = 0, \quad (17)$$

$$\tilde{T}(0, t) = T(t), \quad (18)$$

где κ — коэффициент теплопроводности, делает эту задачу аналогичной рассмотренной выше.

Проведение операций, аналогичных выполненным в задаче для вязкого трения, дает

$$Q(t) = -\frac{\kappa}{\sqrt{\pi\chi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{dT(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (19)$$

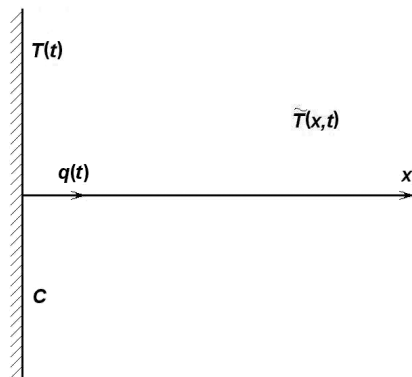


Рис. 2. Теплопроводность в полупространстве

Уравнения (14) и (19) образуют систему уравнений, описывающую флуктуации температуры $T(t)$ плоской поверхности, в теплопроводящей среде, заполняющей полупространство.

Отметим, что при изучении внутреннего трения в одномерных упругих системах, которое считается результатом рассеяния волн на случайных неоднородностях среды, также возникают выражения, подобные (13) и (19) (см. работы [8, 9]).

Уравнение Вольтерра второго рода. Система уравнений (1) и (13) (также как (14) и (19)) может быть записана в виде интегрального уравнения Вольтерра второго рода [10]:

$$Z(t) + A \int_0^t Z(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = \xi(t), \quad (20)$$

где для первой задачи

$$Z(t) = \frac{dV(t)}{dt}; \quad A = \frac{\eta}{M\sqrt{\pi\nu}}; \quad \xi(t) = \frac{\xi_V(t)}{M}, \quad (21)$$

а для второй —

$$Z(t) = \frac{dT(t)}{dt}, \quad A = \frac{\kappa}{C\sqrt{\pi\chi}}, \quad \xi(t) = \frac{\xi_T(t)}{C}. \quad (22)$$

Очевидно, что процесс $Z(t)$, определяемый решением интегрального уравнения (20), представляет собой немарковский случайный процесс.

Решение интегрального уравнения (20) имеет вид

$$Z(t) = \xi(t) - \int_0^t R(t, \tau) \xi(\tau) d\tau, \quad (23)$$

где резольвента [11]

$$R(t, \tau) = \frac{1}{t-\tau} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} r_k (t-\tau)^{\frac{k}{2}}, \quad r_k = \frac{A^k \pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}. \quad (24)$$

Здесь $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Расчетный график функции $R(t-\tau)$ изображен на рис. 3. Видно, что с возрастанием разности $t-\tau$ наблюдается резкое уменьшение значения функции $R(t-\tau)$.

Характеристическая функция. Используя метод описания немарковских случайных процессов, изложенный в работе [6], для одномерной и L -мерной характеристических функций случайного процесса $Z(t)$, задаваемого линейным интегральным соотношением (23), получим:

$$g_1(\lambda; t) = \exp \left[-\frac{1}{2} \sigma \lambda^2 \left(r_1^2 \ln \frac{t}{\delta t} + \sum_{k=2}^{\infty} r_k^2 \frac{t^{k-1}}{k-1} + \right. \right. \\ \left. \left. + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=m+1}^{\infty} (-1)^{m+n} r_m r_n \frac{t^{\frac{m+n-2}{2}}}{m+n-2} + r_2 + \delta(t) \right) \right], \quad (25)$$

$$g_L(\lambda_1, \dots, \lambda_L; t_1, \dots, t_L) = \\ = \exp \left[-\frac{1}{2} \sigma \left(\sum_{l,k=1}^L \lambda_l \lambda_k (\delta(t_l - t_k) + R(t_l, t_k) + \sum_{m,n=1}^{\infty} r_m r_n f_{mn}) \right) \right], \quad (26)$$

где σ — интенсивность случайного процесса $\xi(t)$, распределение которого имеет вид кривой Гаусса, δt — малая положительная величина, $\delta(x)$ — дельта-функция;

$$f_{mn} = \begin{cases} 2 \ln \frac{\sqrt{t_l} + \sqrt{t_k}}{\sqrt{t_l - t_k + \delta t} + \sqrt{\delta t}} & \text{при } m, n = 1, \\ \sum_{s=0}^{\frac{m}{2}-1} C_s^{\frac{m}{2}-1} (-1)^{\frac{m}{2}-s-1} \frac{t_l^{s+\frac{n}{2}} - (t_l - t_k)^{\frac{m+n}{2}-1}}{\frac{n}{2} + s} & \text{при } m - \text{четном,} \\ \sum_{s=1}^{\frac{n}{2}-1} C_s^{\frac{n}{2}-1} \frac{(t_l - t_k)^{\frac{n}{2}-s-1} t_k^{\frac{m}{2}+s}}{\frac{m}{2} + s} & \text{при } m - \text{нечетном и } n - \text{четном,} \\ t_l^{a+\frac{3}{2}} \sum_{s=1}^a \frac{(2a+1)(2a-1)\dots(2a-2s+3)(t_k - t_l)^s}{(a+b+2)(a+b+1)\dots(a+b-s+2)} t_k^{a-s+\frac{1}{2}} - \\ - \sum_{s=0}^b \frac{(2a+1)(2a-1)\dots(2a-2s+3)}{2^s (a+b+2)(a+b+1)\dots(b-s+1)} \frac{(t_k - t_l)^{a+s+1} a!! \sqrt{t_k}}{2^{a+1}} + \\ + \frac{a!! b!! (t_k - t_l)^{a+b+2}}{(a+b+2)! 2^{a+b+2} (-1)^{b+1}} \times \\ \times 2 \ln \frac{\sqrt{t_k} + \sqrt{t_l}}{\sqrt{t_l - t_k + \delta t} + \sqrt{\delta t}} & \text{при других } m, n. \end{cases} \quad (27)$$

Здесь C_a^b — соответствующий биномиальный коэффициент, $a = \frac{m-3}{2}$, $b = \frac{n-3}{2}$.

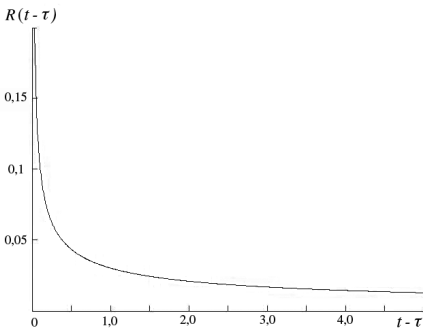


Рис. 3. График функции $R(t - \tau)$

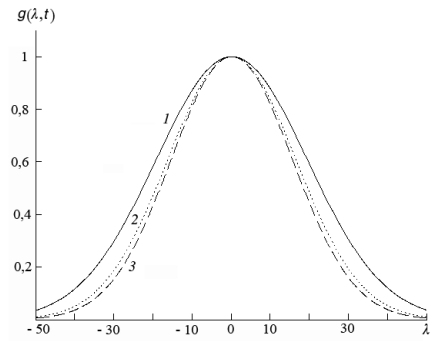


Рис. 4. График характеристической функции $g_1(\lambda, t)$ при значениях $t = 1$ (1), 10 (2) и 30 (3)

График функции $g_1(\lambda, t)$ для различных t изображен на рис. 4. Видно, что эта функция имеет характер кривой Гаусса.

Спектральная плотность. Полученные выражения (25) и (26) позволяют определить любые характеристики случайного процесса $Z(t)$. В частности, для корреляционной функции $\langle Z(t_1)Z(t_2) \rangle$ получим

$$\langle Z(t_1)Z(t_2) \rangle = \sigma \left(\delta(t_2 - t_1) + R(t_2, t_1) + \sum_{m,n=1}^{\infty} r_m r_n f_{mn} \right), \quad (28)$$

где функция f_{mn} определяется выражением (27), в котором сделана замена $t_k = t_1, t_l = t_2$. Последняя формула дает возможность рассчитать спектральную плотность случайного процесса $Z(t)$ согласно определению [3]:

$$G_Z(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle Z(t)Z(t - \tau) \rangle e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (29)$$

Численный расчет при учете соотношений (21), (22) и (28) приводит к графику спектральной плотности для процесса $Z(t)$ при различных значениях t и при $A = 0, 1 \text{ с}^{-1/2}$, показанному на рис. 5.

Преобразование Лапласа уравнения (20) позволяют записать его в изображениях

$$\hat{Z}(p) + A \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}} \hat{Z}(p) = \hat{\xi}(p) \quad (30)$$

или

$$\hat{Z}(p) = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p} + A\sqrt{\pi}} \hat{\xi}(p), \quad (31)$$

где $\hat{Z}(p)$ и $\hat{\xi}(p)$ — изображения функций $Z(t)$ и $\xi(t)$ соответственно.

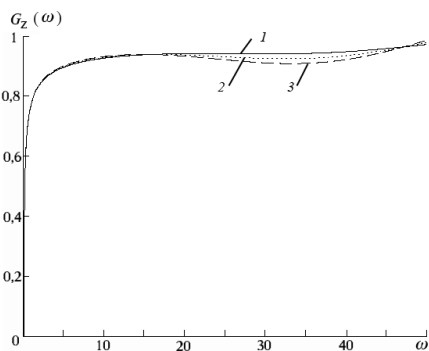


Рис. 5. График спектральной плотности $G_Z(\omega)$ (численный расчет) при значениях $t = 1$ с (1); 10 с (2); 100 с (3)

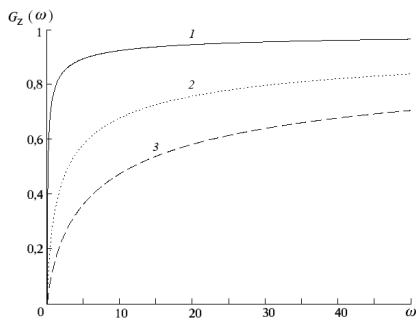


Рис. 6. График спектральной плотности $G_Z(\omega)$ (аналитический расчет) при значениях $A = 0,1$ (1); 0,5 (2) и 1 (3)

Так как спектральная плотность процесса $\xi(t)$ постоянна и равна его интенсивности:

$$G_\xi = \sigma, \quad (32)$$

то в соответствии с формулой (31) спектральная плотность процесса $Z(t)$ при $t \rightarrow \infty$ принимает вид

$$G_Z(\omega) = \left| \frac{\sqrt{i\omega}}{\sqrt{i\omega} + A\sqrt{\pi}} \right|^2 \sigma \quad (33)$$

или

$$G_Z(\omega) = \frac{\omega\sigma}{\omega + A\sqrt{2\pi\omega} + \pi A^2}. \quad (34)$$

На рис. 6 приведены графики спектральных плотностей для различных значений A , задаваемые формулой (34). На рис. 7 для сравнения показаны графики спектральных плотностей для $A = 0,1 \text{ с}^{-1/2}$ при численном расчете ($t = 10^5$ с) и при расчете по формуле (34). Видно, что наблюдается хорошее совпадение результатов, получаемых разными методами. Расхождение при больших частотах видимо связано с ограниченным числом членов при вычислениях бесконечных рядов по формулам (24) и (27).

Фликкер-шум. Полученное выражение (34) с учетом формул (21) позволяет определить спектральную плотность флуктуаций скорости $V(t)$

$$G_V(\omega) = \frac{\sigma}{\omega(\omega + A\sqrt{2\pi\omega} + \pi A^2)}, \quad (35)$$

где в соответствии с формулой (3)

$$\sigma = \frac{2\gamma kT}{M^2}. \quad (36)$$

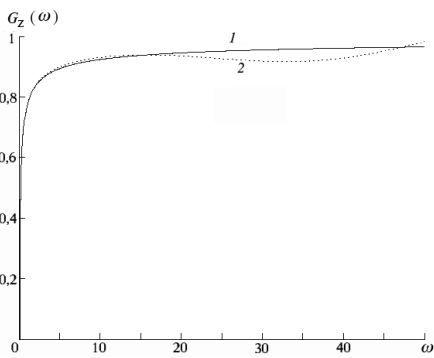


Рис. 7. График спектральной плотности $G_Z(\omega)$, рассчитанной по формуле (34) (1), и при численном расчете (2)

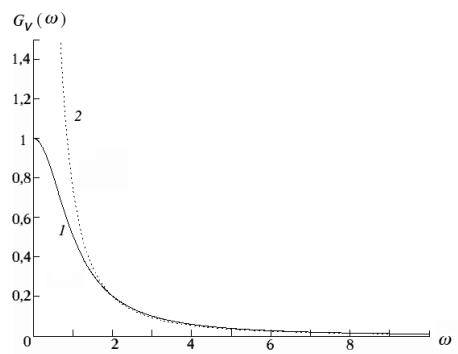


Рис. 8. График спектральной плотности $G_V(\omega)$, рассчитанной по формулам (4) (1), и (35) (2)

Для малых частот при условии $\omega \ll A^2$ формула (35) приобретает вид

$$G_V(\omega)|_{\omega \ll A^2} = \frac{\sigma}{\pi A^2 \omega} \quad (37)$$

или с учетом формул (21) и (36)

$$G_V(\omega)|_{\omega \ll A^2} = \frac{2\gamma kT}{\eta\rho\omega}. \quad (38)$$

Из выражения (38) следует, что флуктуации скорости движения $V(t)$ плоской поверхности в вязкой жидкости представляют собой фликкер-шум [12], для которого характерна обратная зависимость от частоты для диапазона малых частот. На рис. 8 приведены зависимости спектральной плотности, рассчитанные по формулам (4) и (35). Хорошо видно, что для больших частот характер этих двух зависимостей аналогичен, а при малых – наблюдается существенное отличие, связанное с наличием фликкер-шума в случае, описываемом формулой (35).

Отметим, что флуктуации температуры плоской поверхности в задаче о теплопроводности так же имеют спектральную плотность вида (35), а следовательно, для них характерно наличие фликкер-шума. Это в свою очередь, учитывая зависимость кинетических коэффициентов от температуры, должно приводить к флуктуациям указанных коэффициентов в низкочастотной области спектра со спектральной плотностью, имеющей вид фликкер-шума.

Таким образом, при рассмотрении двух достаточно простых модельных задач, описывающих процессы вязкости и теплопроводности в среде, заполняющей полупространство, установлено, что флуктуации скорости движения $V(t)$ и температуры $T(t)$ плоской поверхности представляют собой немарковские случайные процессы с характерной особенностью типа фликкер-шум в низкочастотной части спектра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Климонтович Ю. Л. Статистическая физика. – М.: Наука, 1982. – 608 с.
2. Морозов А. Н. Необратимые процессы и броуновское движение. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. – 332 с.
3. Пугачев В. С., Синицын И. Н. Стохастические дифференциальные системы. – М.: Наука, 1990. – 632 с.
4. Гардинер К. В. Стохастические методы в естественных науках. – М.: Мир, 1986. – 528 с.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
6. Морозов А. Н. Метод описания немарковских процессов, задаваемых линейным интегральным преобразованием // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Естественные науки”. – 2004. – № 3. – С. 47–56.
7. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
8. Весницкий А. И., Метрикин А. В. Внутреннее трение в одномерных упругих системах как результат рассеяния волн на случайных неоднородностях среды // Испытания материалов и конструкций. – Нижний Новгород: Изд-во “Интелсервис”, 1996. – С. 147–150.
9. Ерофеев В. И., Кажаяев В. В., Семерикова Н. П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. – М.: Физматлит, 2002. – 208 с.
10. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1982. – 304 с.
11. Вибрации в технике. Справочник. Т. 1. – М.: Машиностроение, 1978. – 560 с.
12. Бочков Г. Н., Кузовлев Ю. Е. Новое в исследованиях $1/f$ -шума // Успехи физических наук. – 1983. – Т. 141, вып. 1. – С. 151–176.

Статья поступила в редакцию 10.02.2006

Морозов Андрей Николаевич, родился в 1959 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1982 г., д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 100 научных работ в области прецизионных измерений и физической кинетики.

A.N. Morozov (b. 1959), graduated from the Bauman Moscow High Technical School in the 1982. DSc (Phys.-Math.), professor, head of “Physics” Department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 100 publications in the field of high precision measuring systems and physical kinetics theory.

Скрипкин Алексей Владимирович, родился в 1983 г., окончил Курский государственный университет в 2005 г. Аспирант кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор двух работ в области взаимодействия электромагнитных полей с проводящими средами.

A.V. Skripkin (b. 1983), graduated from Kursk State University in the 2005. Post-graduate student of “Physics” Department of the Bauman Moscow Technical University. Author of 2 publications in the field of interaction of electromagnetic waves with conducting mediums.