

МОДЕЛЬ ДВУХЖИДКОСТНОГО КВАЗИРАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ С ТЕЧЕНИЯМИ

Для замыкания системы уравнений двухжидкостного магнито-гидродинамического равновесия плазмы с течениями предложена модель, учитывающая влияние бесстолкновительного переноса на распределение параметров плазмы. Отклонение от термодинамического равновесия считается слабым, что позволяет использовать совместно уравнения равновесия и бесстолкновительного переноса, а также первый закон термодинамики для равновесных течений плазмы. Приведены примеры расчетов плазменных конфигураций с неоднородными течениями и магнитным широм.

Необходимость расчета равновесия плазменных конфигураций с течениями возникает при анализе микронеустойчивостей и режимов удержания высокотемпературной плазмы в магнитном поле. Решая задачи о неустойчивостях, турбулентности, улучшенном удержании, формировании транспортных барьеров и др., необходимо знать статическое электрическое поле в плазме, а также скорости течения как ионов, так и электронов [1–4 и др.]. Чтобы определить указанные параметры плазменной конфигурации, необходимо пользоваться двухжидкостной магнитной гидродинамикой (МГД), т.е. рассматривать уравнения динамики (или равновесия) ионного и электронного компонентов плазмы.

Часто электрическое поле определяется из уравнения равновесия ионов [1–3], что возможно сделать, если скорости течения ионов известны (например, из эксперимента).

Недавно Л. Штейнхауером была предложена модель двухжидкостного равновесия [5], рассматривающая уравнения динамики ионов и электронов, уравнение адиабаты, а также термодинамические функции и параметры (энтальпия, энтропия и др.). В рамках такого подхода возможно получить общее решение, описывающее некоторое семейство термодинамически равновесных конфигураций. При рассмотрении состояния с минимальной энергией для нахождения однозначного решения в модели Штейнхауера необходимо задать константы (по две для ионов и электронов), которые определяют энтальпию и так называемые поверхностные функции ионов и электронов [6].

Для предельных оценок термодинамических и гидродинамических параметров неравновесной турбулентной плазмы можно воспользоваться законами и методами равновесной термодинамики [7]. В режиме слабой плазменной турбулентности отклонение от термодина-

мического равновесия сравнительно невелико, так как функции распределения ионов и электронов близки к максвелловским, и, следовательно, возможно применить законы термодинамики совместно с МГД-уравнениями.

В бесстолкновительной плазме ионы и электроны могут взаимодействовать через электромагнитные поля колебаний, связанных с развитием неустойчивостей. Поэтому в настоящей работе предлагается систему двухжидкостной МГД дополнить уравнениями аномального бесстолкновительного переноса, пренебрегая бесстолкновительными потоками в уравнениях динамики (равновесия). Предположение о том, что степень отклонения плазменного течения от термодинамического равновесия невелика, позволяет в рассматриваемую систему включить также соотношения равновесной термодинамики.

Аномальный перенос поперек силовых линий магнитного поля является результатом взаимодействия частиц плазмы с электромагнитными (или электростатическими) волнами, возникающими в плазме при развитии микронеустойчивостей [1–3]. Используемый нами термин “квазиравновесие” подчеркивает, что модель включает элемент слабой неравновесности, связанной с бесстолкновительными турбулентными потоками, уносящими из плазмы частицы, энергию и импульс. Уравнения аномального переноса позволяют замкнуть систему уравнений и получить решение, соответствующее заданным граничным условиям, а также источникам частиц, энергии и импульса.

Система уравнений. В уравнениях равновесия плазменных течений мы пренебрегаем скоростями, связанными с турбулентными потоками. Эти потоки направлены перпендикулярно поверхностям $\Psi_\alpha = \text{const}$ (Ψ_α — функция тока), образованными линиями тока поля скоростей равновесного течения \mathbf{u}_α компонента α . Определенные таким образом поверхности можно назвать адиабатическими поверхностями, так как перенос вдоль них отсутствует. Предполагаем, что силовые линии магнитного поля параллельны адиабатическим поверхностям. (При этом не обязательно, что адиабатические поверхности совпадают с магнитными.)

Предлагаемый подход к рассмотрению равновесия заключается в том, чтобы разделить уравнения переноса частиц энергии и импульса поперек адиабатических поверхностей и уравнения, описывающие равновесные течения вдоль адиабатических поверхностей. Это приводит к следующей системе уравнений для частиц сорта α : ($\alpha = i, e$).

$$\nabla_\perp (-D_{\perp\alpha} \nabla_\perp N_\alpha + N_\alpha V_{\perp\alpha}) = s_{N\alpha}, \quad (1)$$

$$\nabla_\perp (-\lambda_{\perp\alpha} \nabla_\perp T_\alpha) + \frac{\kappa_\alpha}{\kappa_\alpha - 1} k_B N_\alpha V_{\perp\alpha} \nabla_\perp T_\alpha = s_{T\alpha}, \quad (2)$$

$$m_\alpha N_\alpha (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_\alpha^\parallel = N_\alpha F_\alpha^\parallel - \nabla^\parallel p_\alpha + q_\alpha N_\alpha E^\parallel + \nabla_\perp (\mu_{\perp\alpha} \nabla_\perp u_\alpha^\parallel), \quad (3)$$

$$u_\alpha^\perp = \frac{\nabla_\perp p_\alpha}{Z_\alpha e N_\alpha B} - \frac{E_\perp}{B}, \quad (4)$$

$$\frac{\kappa_\alpha}{\kappa_\alpha - 1} k_B T_\alpha + \frac{m_\alpha (u_\alpha^\parallel)^2}{2} + \frac{m_\alpha (u_\alpha^\perp)^2}{2} + Z_\alpha e U = h_{0\alpha}(\Psi_\alpha), \quad (5)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} = \sum_i Z_i e N_i \mathbf{u}_i - e N_e \mathbf{u}_e, \quad (6)$$

$$\sum_{\alpha=i,e} Z_\alpha N_\alpha = 0. \quad (7)$$

Здесь e — заряд электрона; k_B — постоянная Больцмана; μ_0 — магнитная постоянная; \mathbf{B} и $\mathbf{E} = -\nabla U$ — статические магнитное и электрическое поля; U — электростатический потенциал; m_α , Z_α , N_α , T_α , $p_\alpha = N_\alpha k_B T_\alpha$, \mathbf{u}_α и $\mathbf{j}_\alpha = Z_\alpha e N_\alpha \mathbf{u}_\alpha$ — масса, заряд, концентрация, температура, давление, скорость течения и плотность тока частиц сорта α ; κ_α — показатель адиабаты; $h_{0\alpha}(\Psi_\alpha)$ — некоторая поверхностная функция; $D_{\perp\alpha}$, $\lambda_{\perp\alpha}$, $\mu_{\perp\alpha}$ — коэффициенты диффузии, теплопроводности и вязкости; $V_{\perp\alpha}$ — скорость конвективного потока; $s_{N\alpha}$ и $s_{T\alpha}$ — источники частиц и тепла; F_α^\parallel — сила, связанная с передачей импульса частице от инжектируемых быстрых частиц и нагревом; нижний символ \perp означает направление, перпендикулярное адиабатической поверхности; верхние символы \perp и \parallel означают перпендикулярное и параллельное магнитному полю направления для компонент векторов, параллельных адиабатической поверхности.

Отметим, что в простых случаях (например, конфигурация в виде бесконечного цилиндра, для которой поверхности $\Psi_\alpha = \text{const}$ совпадают с поверхностями $r = \text{const}$) N_α , T_α , p_α , u_α^\parallel , u_α^\perp , U и другие величины могут являться функциями только Ψ_α .

Уравнения (1)–(3) — это уравнения переноса частиц, энергии и продольного импульса поперек адиабатических поверхностей.

Из условия квазинейтральности (7) следует равенство потоков положительных и отрицательных зарядов поперек адиабатических поверхностей и источников $s_{Ne} = \sum_i Z_i s_{Ni}$. Это означает, что условие квазинейтральности позволяет не рассматривать уравнение (1) для одного из сортов частиц, например, для электронов. Если конвективные потоки равны нулю (как правило это выполняется в сердцевине плазмы), то $D_{\perp e} = D_{\perp i}$ ($D_{\perp i}$ — средний по всем сортам ионов коэффициент диффузии).

Для конфигураций, однородных вдоль магнитного поля, в уравнении (3) ненулевыми могут оставаться только слагаемые $N_\alpha F_\alpha^{\parallel}$ и $\nabla_\perp (\mu_{\perp\alpha} \nabla_\perp u_\alpha^{\parallel})$.

Бесстолкновительный перенос можно рассматривать как результат рассеяния частиц на волновых полях (флуктуациях), возникающих при развитии в плазме неустойчивостей [8–11]. Исходя из анализа результатов ранее проведенных численных расчетов взаимодействия частицы с одиночным локализованным волновым пакетом [10], а также учитывая характер движения и переноса частицы под действием многих флуктуаций [8, 9], рассеяние можно рассматривать как “столкновение” частиц (ионов, электронов) с волновыми пакетами. Такой подход позволяет для связи коэффициентов переноса использовать соотношения молекулярно-кинетической теории

$$\lambda_{\perp\alpha} = \frac{k_B N_\alpha}{(\kappa_\alpha - 1)} D_{\perp\alpha}, \quad (8)$$

$$\mu_{\perp\alpha} = m_\alpha N_\alpha D_{\perp\alpha}. \quad (9)$$

Выражение (4) следует из уравнения равновесия в направлении, перпендикулярном адиабатической поверхности.

Уравнение (5) представляет собой закон сохранения энергии (уравнение Бернулли) для течения вдоль адиабатической поверхности. В уравнении (5) подразумевается, что $\kappa_\alpha \neq 1$. Обычно можно принять $\kappa_\alpha = 3$ (одномерная адиабата), так как плазма может двигаться свободно только в направлении магнитного поля. Для случая $\kappa_\alpha = 1$ уравнение Бернулли принимает вид

$$k_B T_\alpha \ln \left(\frac{N_\alpha}{N_\alpha^*} \right) + \frac{m_\alpha (u_\alpha^{\parallel})^2}{2} + \frac{m_\alpha (u_\alpha^\perp)^2}{2} + Z_\alpha e U = h_{0\alpha}(\Psi_\alpha), \quad (10)$$

где величина, помеченная знаком *, введена для согласования размерности.

В стационарном состоянии суммарная теплота, подводимая и отводимая от какой-либо компоненты плазмы, равна нулю. При этом в направлении, перпендикулярном адиабатической поверхности, энтропия может изменяться из-за неравновесности, связанной с поперечными потоками. Следовательно,

$$dh_{0\alpha} = T_\alpha (dS_\alpha - dS_\alpha^{\text{int}}) = -T_\alpha dS_\alpha^{\text{int}}, \quad (11)$$

где S_α — суммарная энтропия частиц сорта α и окружающей среды (для частиц сорта α окружающая среда включает системы нагрева и отвода энергии, а также частицы всех других сортов), dS_α^{int} — энтропия, производимая частицами сорта α в неравновесных процессах [12]. Так как рассматриваемое квазиравновесие — стационарное состояние, то

в выражении (11) $dS_\alpha = 0$ (в этом выражении энтропия также взята в расчете на одну частицу).

В бесстолкновительной плазме частицы могут генерировать электромагнитные волны, передавая им свою энергию при раскатке плазменных неустойчивостей. Поэтому $h_{0\alpha}$ характеризует производство энтропии и эту энергию. Величину

$$dP_{w\alpha} = -N_\alpha dh_{0\alpha} \quad (12)$$

можно рассматривать как плотность энергии, затраченной частицами на генерацию электромагнитных волн (колебаний). В стационарном случае средний уровень амплитуды колебаний достигает насыщения и, следовательно, $P_{w\alpha}$ со временем не меняется. При этом производство энтропии в единице объема

$$\sigma_\alpha = -N_\alpha T_\alpha^{-1} \frac{dh_{0\alpha}}{dt} = -T_\alpha^{-1} \Gamma_{\perp\alpha} \nabla_{\perp} h_{0\alpha}, \quad (13)$$

где $\Gamma_{\perp\alpha}$ — поток частиц поперек адиабатической поверхности.

В сформулированной модели (1)–(7) для получения однозначного решения помимо граничных условий необходимо задать показатели адиабаты (κ_α), источники частиц ($s_{N\alpha}$), тепла ($s_{T\alpha}$) и импульса (F_α^{\parallel}), а также коэффициенты диффузии ($D_{\perp\alpha}$).

Коэффициент бесстолкновительной диффузии $D_{\perp\alpha}$ определяется параметрами развивающихся в плазме неустойчивостей, которые, в свою очередь, зависят от параметров плазменной конфигурации, магнитного поля, скоростей течения, статического электрического поля и других факторов (см., например, [4]). Поэтому самосогласованное решение для равновесия плазменных течений и коэффициентов переноса в конкретных конфигурациях плазмы и магнитного поля может быть получено в результате итераций. Во-первых, должны быть заданы граничные условия, а также физические условия (показатели адиабат и источники). Во-вторых, задается начальное распределение какого-либо параметра, например, концентрации. Заданным величинам соответствует определенное решение для течений плазмы, которое далее используется для анализа неустойчивостей и определения коэффициента диффузии. Зная параметры неустойчивости, коэффициенты переноса в плазме можно оценить, например, по длине смещения [13] или по усредненным турбулентным пульсациям [14]. Получив коэффициент диффузии, можно уточнить распределение концентрации. Дальнейшие уточнения можно получить путем итераций.

Примеры. В качестве примеров рассмотрим две конфигурации, результаты расчетов для которых приведены на рис. 1 и 2. Предполагаем, что плазма имеет форму бесконечного цилиндра и удерживается

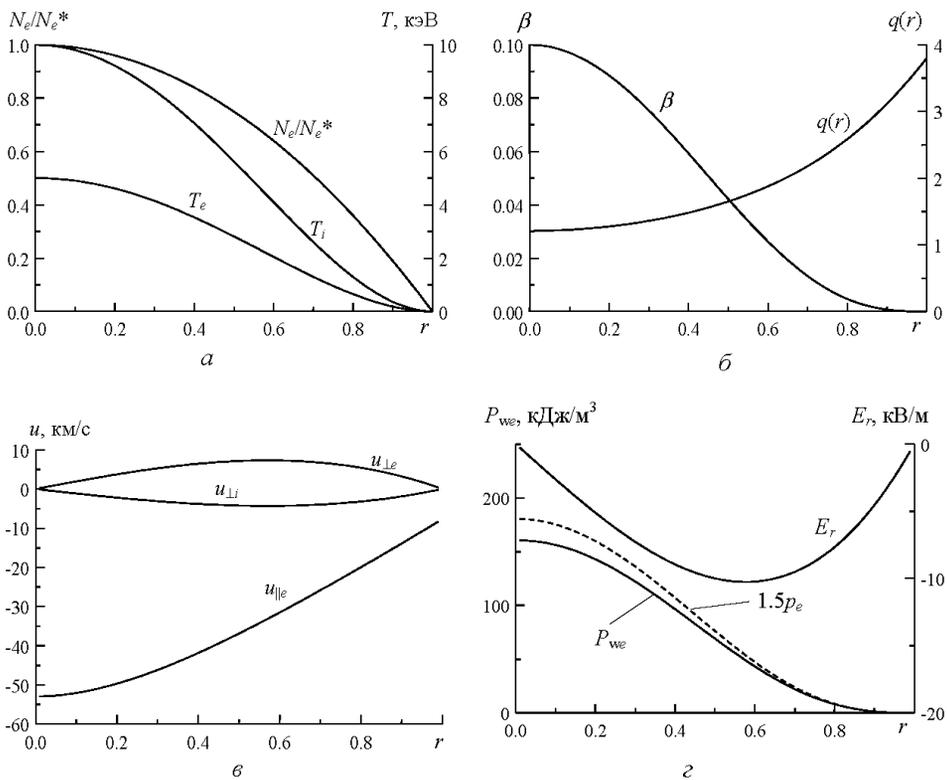


Рис. 1. Распределения параметров конфигурации с гладким профилем концентрации и нормальным широм

винтовым магнитным полем с широм и $\beta \ll 1$ (β — отношение давления плазмы к давлению магнитного поля; магнитный шир — это неоднородность магнитного поля, связанная с перекрещенностью силовых линий). Первый пример моделирует конфигурацию с нормальным широм (монотонно возрастающим от центра к периферии) и гладкими профилями концентрации и температуры плазмы без так называемых транспортных барьеров, второй — конфигурацию с обращенным широм (немонотонным с минимумом), транспортным барьером и инжекцией ионов вдоль магнитного поля. Инжекция создает быстрое течение ионов, локализованное в достаточно узкой области. В этой области резко снижаются коэффициенты поперечного переноса, т.е. формируется транспортный барьер.

В примерах не задавались распределения источников и какие-либо зависимости коэффициентов переноса от параметров плазмы. Принято, что распределения концентраций известны (рис. 1, *a* и 2, *a*). Известно распределение продольной скорости ионов в случае с инжекцией (рис. 2, *в*), а также отношение коэффициентов диффузии во втором и первом случаях (рис. 2, *е*). На рис. 2, *в* приведена величина

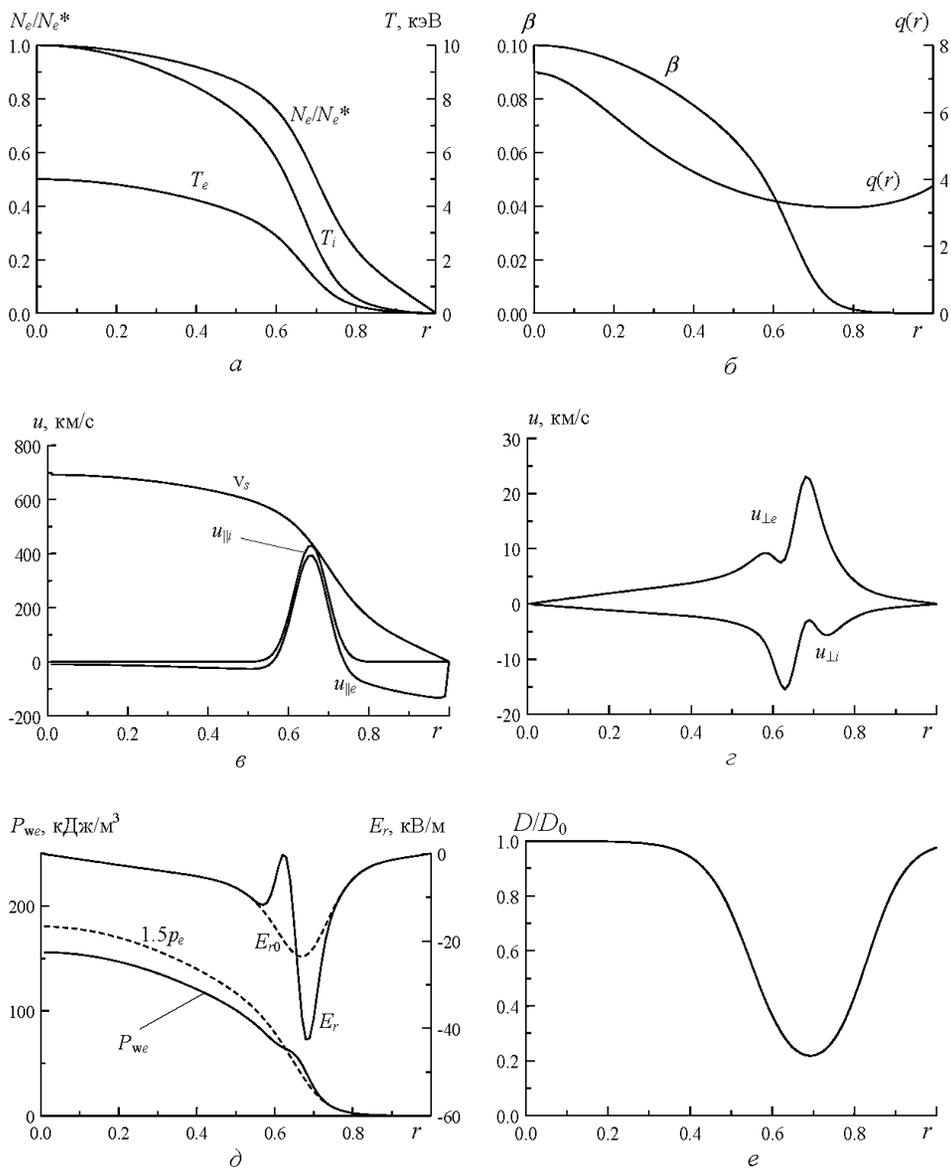


Рис. 2. Распределения параметров конфигурации с обращенным широм, инжекцией и транспортным барьером. D_0 — коэффициент диффузии без транспортного барьера, D — с транспортным барьером

$v_s = \sqrt{k_B T_e / m_i}$, часто используемая при анализе низкочастотных дрейфовых неустойчивостей [4].

Полагается, что источники частиц и тепла, поддерживающие стационарные распределения концентрации и температуры, находятся на оси цилиндра, а в основном объеме конфигурации источники отсутствуют. Тогда термодинамические параметры связаны уравнением

адиабаты

$$\frac{p_\alpha}{p_\alpha^*} = \left(\frac{N_\alpha}{N_\alpha^*} \right)^{\kappa_\alpha} = \left(\frac{T_\alpha}{T_\alpha^*} \right)^{\frac{\kappa_\alpha}{\kappa_\alpha - 1}}, \quad (14)$$

где $\kappa_\alpha = 3$ (одномерная адиабата, отражающая то обстоятельство, что частицы плазмы могут двигаться свободно только вдоль линий магнитного поля); p_α^* , N_α^* и T_α^* — значения параметров на оси.

Из уравнений (4) для ионов и электронов и уравнения Максвелла (6) следует связь суммарного давления плазмы $p = p_i + p_e$ с индукцией магнитного поля:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = j_\theta B_z - j_z B_\theta = -\frac{1}{\mu_0} \left(B_z \frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{B_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_r \right). \quad (15)$$

После интегрирования получаем

$$p + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} + \frac{1}{\mu_0} \int_r^a \frac{B_\theta^2}{r} dr, \quad (16)$$

где B_0 — индукция магнитного поля на границе плазмы (при $r = a$). Если B_θ известна (в примерах B_θ находится по заданному току j_z) и известно распределение параметра β , то модуль магнитного поля B и компоненту B_z можно определить по формулам:

$$B = B_0 \sqrt{1 - \beta + \beta_1}, \quad (17)$$

$$B_z = B_{z0} \sqrt{1 - \beta + \beta_1}, \quad (18)$$

где

$$\beta = \frac{2\mu_0 p}{B_0^2}, \quad (19)$$

$$\beta_1 = \frac{2}{B_0^2} \int_r^a \frac{B_\theta^2}{r} dr. \quad (20)$$

В расчетах связь B_z и B_θ задавалась величиной, называемой запасом устойчивости

$$q(r) = \frac{B_z r}{B_\theta a A}, \quad (21)$$

где $A > 1$ — некоторая постоянная. В расчетах задано $A = 3$, что соответствует характерному значению аспектного отношения классических токамаков. Распределения параметров $\beta(r)$ и $q(r)$ показаны на рис. 1, б и 2, б.

В расчетах принято для ионов $P_{wi} = 0$, т.е. полагалось, что развивающиеся в плазме неустойчивости получают энергию от электронов. В этом случае, согласно расчетам, P_{we} имеет вид, показанный на рис. 1, з

и $2, \delta$, где для сравнения приведена также плотность тепловой энергии электронов $1,5p_e$. Кроме того, на рис. 1, ε и $2, \delta$ приведено рассчитанное распределение радиального статического электрического поля E_r . Пунктирная кривая $E_{r,0}$ на рис. 2, δ соответствует расчету для второго примера без учета инжекции.

Обращает на себя внимание то, что в примере с транспортным барьером в области резких градиентов концентрации и температуры, соответствующей значительному уменьшению коэффициента диффузии, согласно полученным решениям, распределения радиального электрического поля, поперечной и продольной скоростей течения сильно неоднородны. Это вполне соответствует теориям подавления дрейфовых неустойчивостей неоднородными течениями и электрическим полем [1–4, 13–16].

Отметим, что при рассмотрении конкретной плазменной конфигурации с заданными системами нагрева и инжекции частиц расчет коэффициентов турбулентной диффузии требует анализа всех возможных неустойчивостей в данной системе. Приведенные примеры можно рассматривать как начальное приближение, дающее связанные вполне определенным образом распределения параметров плазмы и магнитного поля. Полностью самосогласованное решение может быть получено при дальнейших итерациях, включающих уравнения для неустойчивостей.

Заключение. Анализируя возможные решения, полагали, что движение электронов существенно ограничивается движением более массивных ионов. То обстоятельство, что электроны не могут двигаться независимо от ионов, должно приводить к раскачке неустойчивостей. Поэтому представляется вполне логичным, что при $P_{wi} = 0$ в результате расчетов получается $P_{we} > 0$, т.е. электроны генерируют электромагнитные поля. На наш взгляд, величина P_{we} должна включать не только плотность энергии неустойчивости, вызывающей перенос, но и плотность энергии всех волновых движений (включая так называемые шумы). Отметим, что для адекватного определения величин P_{wi} и P_{we} необходимо располагать информацией о всех волновых процессах в рассматриваемой конфигурации. Присутствие этих величин в обсуждаемой системе уравнений и учет энергии электромагнитных волн в законе сохранения энергии (5) согласуется с тем обстоятельством, что в предлагаемом подходе флуктуации являются сортом “частиц”, определяющим поперечный перенос и радиальные распределения параметров.

Автор выражает искреннюю благодарность за полезные обсуждения профессору В.И. Хвесюку, способствовавшему выполнению настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Burrell K. H. Effect of $E \times B$ velocity shear and magnetic shear on turbulence and transport in magnetic confinement devices // *Phys. Plasmas*. – 1997. – V. 4. – P. 1499–1518.
2. Wolf R. C. Internal transport barriers in tokamak plasmas // *Plasma Phys. Control. Fusion*. – 2003. – V. 45. – P. R1–R91.
3. Connor J. M., Fukuda T., Garbet X., Gormezano C., Mukhovatov V., Wakatani M., et al. A review of internal transport barrier physics for steady-state operation of tokamaks // *Nucl. Fusion*. – 2004. – V. 44. – P. R1–R49.
4. Artun M., Tang W. M. Gyrokinetic analysis of ion temperature gradient modes in the presence of sheared flows // *Phys. Fluids*. – 1992. – V. B4. – P. 1102–1114.
5. Steinhauer L. C. Formalism for multi-fluid equilibria with flow // *Phys. Plasmas*. – 1999. – V. 6. – P. 2734–2741.
6. Steinhauer L. C. Equilibrium equations for a flowing plasma in 1D cylinder, 2003.
7. Фаулер Т. Термодинамика неустойчивой плазмы: В кн. Успехи физики плазмы. Физика высокотемпературной плазмы / Под ред. А. Саймона и У. Томпсона. М: Мир, 1972. – С. 77–111.
8. Khvesyuk V. I., Chirkov A. Yu. Stochastic drift wave model for anomalous transport in tandem mirror and FRC // *Fusion Technol.* – 2001. – V. 39, № 1Т. – P. 398–401.
9. Хвесюк В. И., Чирков А. Ю., Ковалев А. В. Некоторые особенности стохастической динамики частиц в замагниченной плазме // *Физика плазмы*. – 2002. – Т. 28, № 9. – С. 854–857.
10. Хвесюк В. И., Чирков А. Ю. Анализ закономерностей рассеяния частиц плазмы на нестационарных флуктуациях // *ЖТФ*. – 2004. – Т. 74. – Вып. 4. – С. 18–26.
11. Чирков А. Ю. О влиянии слабых электростатических возмущений на траектории пролетных частиц в магнитном поле токамака // *ЖТФ*. – 2004. – Т. 74. – Вып. 12. – С. 47–51.
12. Пригожин И., Кондепуди Д. Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур. – М.: Мир, 2002.
13. Wang X.-H., Diamond P. H., Rosenbluth M. N. Stability of ion-temperature-gradient-driven modes in the presence of sheared poloidal flows // *Phys. Fluids*. – 1992. – V. B4. – P. 2402–2413.
14. Dong J. Q., Horton W., Bengtson R. D., Li G. X. Momentum-energy transport from turbulence driven by parallel flow shear // *Phys. Plasmas*. – 1994. – V. 1. – P. 3250–3261.
15. Migliuolo S., Sen A. K. Effect of a nonuniform equilibrium electric field on ion temperature gradient instabilities // *Phys. Fluids*. – 1990. – V. B2. – P. 3047–3051.
16. Timofeev A. V., Tupikov S. E. Drift instability in non uniform electric field // *Fusion Technol.* – 1999. – V. 35 (1Т). – P. 253–257.

Статья поступила в редакцию 19.09.2005