УДК 515.12

Э. Н. Белянова

О БИКОМПАКТНЫХ РАСШИРЕНИЯХ ЛОКАЛЬНО БИКОМПАКТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Приведено иное, чем в теореме Магилла, описание всех наростов бикомпактификаций локально бикомпактного хаусдорфова пространства, а также обобщение этого описания и теоремы Магилла на локально бикомпактные хаусдорфовы отображения.

В настоящей работе пространство будем понимать как топологическое пространство, непрерывное отображение — как непрерывное отображение пространств, бикомпактификацию — как хаусдорфову бикомпактификацию пространства или отображения.

Теорема Магилла [1]. *Бикомпакт B является наростом некоторой бикомпактификации локально бикомпактного хаусдорфова пространства X тогда и только тогда, когда B есть непрерывный образ стоун-чеховского нароста $\beta X \setminus X$.*

Первое описание всех наростов бикомпактификаций локально бикомпактного хаусдорфова отображения (теорема Магилла для отображений). Напомним, что непрерывное отображение называется *бикомпактным*, если оно совершенно. Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ называется *хаусдорфовым*, если для любых двух точек x и x' из X таких, что $x \neq x'$, $f(x) = f(x')$, существуют в X дизъюнктные окрестности. Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ называется *локально бикомпактным*, если для любой точки x из X существуют окрестность U в X и окрестность V точки $f(x)$ в Y такие, что $U \subseteq f^{-1}V$ и отображение $f\colon\ [U]_{f^{-1}V} \to V$ бикомпактно.

Обобщим теорему Магилла на локально бикомпактные хаусдорфовы отображения.

Теорема 1. *Бикомпактное хаусдорфово отображение $g\colon Z \to Y$ является наростом некоторой бикомпактификации локально бикомпактного бикомпактифицируемого хаусдорфова отображения $f\colon X \to Y$ тогда и только тогда, когда существует морфизм нароста $\chi f \setminus f$ максимальной бикомпактификации χf отображения f на отображение g.*

Доказательство. Пусть отображение g является наростом некоторой бикомпактификации локально бикомпактного бикомпактифицируемого хаусдорфова отображения f. Существование максимальной бикомпактификации χf для отображения f доказано в статье [5]. Существование морфизма нароста $\chi f\backslash f$ максимальной бикомпактификации χf отображения f на нарост g очевидно.

Пусть λ — морфизм нароста $\chi f\backslash f$ на отображение g. Докажем, что морфизм λ совершенен. Нарост $\chi_f X\backslash X$ замкнут в $\chi_f X$ и отображение χf бикомпактно, следовательно, бикомпактно отображение $\chi f\backslash f$. Поскольку $\chi f\backslash f = g\circ\lambda$, отображение $\chi f\backslash f$ бикомпактно и отображение g хаусдорфово, то λ — совершенное отображение [4].

Пусть $c_f X$ — дизъюнктное объединение множеств X и Z, и пусть $\varphi = \mathrm{id}_X\cup\lambda\colon \chi X\to X\cup Z$. Введем на множестве $c_f X$ факторную относительно отображения φ топологию. Поскольку множество X открыто в χX, то на множестве $X\subseteq c_f X$ индуцируется исходная топология и оно открыто в $c_f X$, кроме того, оно всюду плотно в $c_f X$. Рассмотрим отображение $cf\colon X\cup Z\to Y$ такое, что $\chi f = cf\circ\varphi$. Это отображение непрерывно (так как непрерывно χf и факторно φ) и бикомпактно (так как бикомпактно χf). Следовательно, отображение $cf\colon X\cup Z\to Y$ является бикомпактификацией отображения f, для которой $cf\backslash f = g$ (как отображение множества).

Докажем, что исходная топология пространства Z совпадает с ограничением топологии пространства $c_f X$ на множество Z. Пусть множество A замкнуто в исходном пространстве Z; тогда множество $\varphi^{-1}A = \lambda^{-1}A$ замкнуто в замкнутом в $\chi_f X$ множестве $\chi_f X\backslash X$ и, следовательно, замкнуто в $\chi_f X$. Получаем, что множество A замкнуто в пространстве $c_f X$. Обратно, если множество $A\subseteq Z = c_f X\backslash X$ замкнуто в $c_f X\backslash X$, то оно замкнуто в $c_f X$ и множество $\varphi^{-1}A$ замкнуто в $\chi_f X$ и в $\chi_f X\backslash X$. Поскольку морфизм λ совершенный, то множество $A = \lambda\lambda^{-1}(A\cap Z)$ замкнуто в исходной топологии пространства Z. Следовательно, нарост $cf\backslash f$ гомеоморфен отображению g.

Докажем хаусдорфовость бикомпактификации cf. Для этого сначала докажем, что отображение φ совершенно. Поскольку совершенное отображение λ определено на замкнутом подмножестве пространства $\chi_f X\backslash X$, то для любого замкнутого в $\chi_f X$ множества A множество

$$\varphi^{-1}\varphi A = A\cup\lambda^{-1}\lambda(A\cap(\chi_f X\backslash X))$$

замкнуто. Получаем, что отображение φ замкнуто и, очевидно, совершенно.

Пусть теперь различные точки x_1, x_2 принадлежат пространству $c_f X$ и $cf(x_1) = cf(x_2) = y$. Поскольку отображение φ совершенно, а отображение χf хаусдорфово, то дизъюнктные бикомпактные множества $\varphi^{-1}x_1$ и $\varphi^{-1}x_2$ отделимы насыщенными окрестностями W_1 и W_2 в $\chi_f X$. Образы φW_1 и φW_2 и будут дизъюнктными окрестностями точек x_1, x_2. Хаусдорфовость отображения cf доказана.

Таким образом, отображение cf является бикомпактификацией отображения f, нарост которой $cf\backslash f$ есть отображение g. Теорема доказана.

Замечание 1. В случае одноточечного пространства Y из теоремы 1 следует теорема Магилла.

Второе описание всех наростов бикомпактификаций локально бикомпактного хаусдорфова отображения. Напомним другое описание всех наростов бикомпактификаций локально бикомпактного хаусдорфова пространства.

Определение 1 [2]. Подмножество U пространства X называется *ограниченным в* X, если $[U]_X$ — бикомпакт.

Определение 2 [2]. Непрерывное отображение $f\colon X \to Z$ называется *приложением пространства* X *к бикомпакту* B *в пространстве* Z, если:

1) $[f(X)]_Z$ — бикомпакт;

2) $[f(X\backslash U)]_Z = f(X\backslash U) \cup B$ для любого открытого и ограниченного в X множества U;

3) для любой окрестности W бикомпакта B в пространстве Z существует ограниченное в X множество U такое, что $f\,(X\backslash U) \subseteq W$.

Теорема 2 [2]. *Бикомпакт B является наростом некоторой бикомпактификации локально бикомпактного хаусдорфова пространства X тогда и только тогда, когда существует приложение пространства X к бикомпакту B в хаусдорфовом пространстве Z.*

Обобщим этот результат на локально бикомпактные хаусдорфовы отображения.

Определение 3. Пусть даны локально бикомпактное хаусдорфово отображение $f\colon X \to Y$, хаусдорфово отображение $g\colon Z \to Y$, бикомпактное подотображение $\widetilde{g}\colon R \to Y$ отображения g и морфизм $\lambda\colon f \to g$ отображения f в отображение g. Морфизм λ называется *приложением отображения f к подотображению $\widetilde{g}$ отображения* g, если:

1) $R \cap g^{-1}V \subseteq \left[\lambda\left(f^{-1}V\backslash [U]_{f^{-1}V}\right)\right]_Z$ для любого открытого V в Y и любого открытого U в X такого, что $U \subseteq f^{-1}V$ и отображение $f\colon\ [U]_{f^{-1}V} \to V$ бикомпактно;

2) для любой точки $y \in \widetilde{g}R$ и любой окрестности W в Z слоя $\widetilde{g}^{-1}y$ существуют окрестность V точки y и множество $U \subseteq f^{-1}V$ такие, что отображение $f\colon [U]_{f^{-1}V} \to V$ бикомпактно и $\lambda\,(f^{-1}V\backslash U) \subseteq W$;

3) отображение $f_R = f : (X\backslash f^{-1}(\widetilde{g}R)) \to Y\backslash \widetilde{g}R$ бикомпактно.

Теорема 3. *Если существует приложение λ локально бикомпактного хаусдорфова отображения $f\colon X \to Y$ к бикомпактному подотображению $\widetilde{g}\colon R \to Y$ хаусдорфова отображения $g\colon Z \to Y$,* *то существуют бикомпактификация* $cf\colon c_fX \to Y$ *отображения* f *такая, что* $cf\backslash f = \widetilde{g}$, *и морфизм* $c\lambda\colon cf \to g$ *такой, что* $c\lambda$ *является продолжением морфизма* λ *и* $c\lambda\colon cf\backslash f \to \widetilde{g}$ *— изоморфизм* $cf\backslash f$ *на подотображение* $\widetilde{g}$.

Доказательство. Пусть $c_fX = X \cup R$ и $cf = f \cup \widetilde{g}\colon X \cup R \to Y$. Рассмотрим отображение $c\lambda = \lambda \cup \mathrm{id}_{\widetilde{g}}\colon X \cup R \to Z$. Докажем, что $c\lambda$ — морфизм cf в g. Если $x \in X$, то

$$cf\,(x) = f\,(x) = g\,(\lambda\,(x)) = g\,(c\lambda\,(x))\,.$$

Если $x \in R$, то

$$cf\,(x) = \widetilde{g}\,(x) = g\,(c\lambda\,(x))\,.$$

Таким образом, $cf = g \circ c\lambda$.

Введем на c_fX топологию, база B которой состоит из всех множеств, открытых в пространстве X, а также всех подмножеств пространства c_fX вида

$$(c\lambda)^{-1}\left(O \cap g^{-1}V\right) \setminus [U]_{f^{-1}V}\,,$$

где множество O открыто в Z, множество V открыто в Y, множество U открыто в X, $U \subseteq f^{-1}V$, и отображение $f\colon\ [U]_{f^{-1}V} \to V$ бикомпактно. Докажем, что база B определена корректно. Достаточно доказать, что пересечение двух множеств из B указанного вида также является элементом B.

Пусть

$$W_i = (c\lambda)^{-1}\left(O_i \cap g^{-1}V_i\right) \setminus [U_i]_{f^{-1}V_i}\,,$$

где множество O_i открыто в Z, множество V_i открыто в Y, множество U_i открыто в X, $U_i \subseteq f^{-1}V_i$, и отображение $f\colon\ [U_i]_{f^{-1}V_i} \to V_i$ бикомпактно, $i = 1,\,2$. Поскольку отображение

$$f\colon\ \left[(U_1 \cup U_2) \cap f^{-1}\left(V_1 \cap V_2\right)\right]_{f^{-1}(V_1 \cap V_2)} \to V_1 \cap V_2$$

бикомпактно, то

$$W_1 \cap W_2 =$$
$$= c\lambda^{-1}\left((O_1 \cap O_2) \cap g^{-1}\left(V_1 \cap V_2\right)\right) \setminus \left[(U_1 \cup U_2) \cap f^{-1}\left(V_1 \cap V_2\right)\right]_{f^{-1}(V_1 \cap V_2)}$$

— элемент базы.

Заметим, что $(c\lambda)^{-1}\left(O \cap g^{-1}V\right) \setminus [U]_{f^{-1}V} = \left((cf)^{-1}V \setminus [U]_{f^{-1}V}\right) \cap$ $\cap\,(c\lambda)^{-1}O$. Если в качестве множества V взять все пространство Y, в качестве множества U взять пустое множество, то видно, что прообраз при отображении $c\lambda$ любого открытого в пространстве Z множества открыт в c_fX. Поэтому отображение $c\lambda$ непрерывно. Кроме того, по построению отображение $c\lambda$ является продолжением морфизма λ и $c\lambda\colon cf\backslash f \to \widetilde{g}$ — изоморфизм $cf\backslash f$ на $\widetilde{g}$.

Отображение cf непрерывно, так как $cf = g \circ c\lambda$ и непрерывны отображения g и $c\lambda$.

Докажем, что *отображение* cf *является бикомпактификацией отображения* f.

Сначала докажем, что cf является расширением отображения f. Множество X открыто в $c_f X$, докажем, что оно всюду плотно в $c_f X$. Достаточно доказать, что любая точка множества $c_f X \backslash X = R$ является точкой прикосновения множества X. Рассмотрим в $c_f X \backslash X$ произвольную точку r и ее базисную окрестность $W = (c\lambda)^{-1}(O \cap g^{-1}V) \setminus [U]_{f^{-1}V}$, где множество O открыто в Z, множество V открыто в Y, множество U открыто в X, $U \subseteq f^{-1}V$, и отображение $f\colon\ [U]_{f^{-1}V} \to V$бикомпактно.

Поскольку $r \in W \cap (c_f X \backslash X)$, то

$$r \equiv c\lambda(r) \subseteq c\lambda\left(\left((c\lambda)^{-1}\left(O \cap g^{-1}V\right) \setminus [U]_{f^{-1}V}\right) \cap (c_f X \backslash X)\right) \subseteq$$

$$\subseteq c\lambda\left((c\lambda)^{-1}\left(O \cap g^{-1}V\right)\right) \cap c\lambda\left(c_f X \backslash X\right) \subseteq O \cap g^{-1}V \cap R.$$

Множество $O \cap g^{-1}V$ является окрестностью точки r в Z, и так как для морфизма λ выполняется условие 1) определения 3, то

$$\left(O \cap g^{-1}V\right) \cap \lambda\left(f^{-1}V \backslash [U]_{f^{-1}V}\right) \neq \varnothing.$$

Это значит, что

$$\varnothing \neq \lambda^{-1}\left(O \cap g^{-1}V\right) \cap \left(f^{-1}V \backslash [U]_{f^{-1}V}\right) =$$

$$= \left(\lambda^{-1}\left(O \cap g^{-1}V\right) \setminus [U]_{f^{-1}V}\right) \cap f^{-1}V \subseteq$$

$$\subseteq \left(\lambda^{-1}\left(O \cap g^{-1}V\right) \setminus [U]_{f^{-1}V}\right) \cap X,$$

следовательно, $W = (c\lambda)^{-1}(O \cap g^{-1}V) \setminus [U]_{f^{-1}V}$ имеет с Xнепустое пересечение. Значит, множество X всюду плотно в $c_f X$. Таким образом, отображение cf является расширением отображения f.

Докажем, что отображение *cf* хаусдорфово. Пусть $x_1 \neq x_2$ и $cf(x_1) = cf(x_2) = y$. В случае $x_1, x_2 \in X$ существование дизъюнктных окрестностей точек x_1 и x_2 в $c_f X$ следует из хаусдорфовости отображения f и определения топологии на $c_f X$. Пусть $x_1, x_2 \in R$. Поскольку отображение g хаусдорфово, то существуют окрестности O_1 и O_2 точек x_1 и x_2 в Z такие, что $O_1 \cap O_2 = \varnothing$. Тогда дизъюнктными окрестностями точек x_1 и x_2 в $c_f X$ являются базисные окрестности $(c\lambda)^{-1} O_1$ и $(c\lambda)^{-1} O_2$. Пусть теперь $x_1 \in X$, $x_2 \in R$. В силу локальной бикомпактности отображения f существуют окрестность $U \subseteq X$

точки x_1 и открытое множество $V \subseteq Y$ такие, что $U \subseteq f^{-1}V$ и отображение $f\colon [U]_{f^{-1}V} \to V$ бикомпактно. Тогда множества U и $(c\lambda)^{-1}(Z \cap g^{-1}V) \setminus [U]_{f^{-1}V}$ являются дизъюнктными окрестностями точек x_1, x_2 в $c_f X$.

Докажем, что отображение cf замкнуто во всех точках $y \in Y$. Пусть $y \in \widetilde{g}R \subseteq Y$ и W — произвольная окрестность множества $(cf)^{-1}y = f^{-1}y \cup \widetilde{g}^{-1}y$ в пространстве $c_f X$. Поскольку подотображение $\widetilde{g} = cf \setminus f$ бикомпактно, то существует конечное покрытие слоя $\widetilde{g}^{-1}y$ в $c_f X$ базисными множествами

$$S_i = (c\lambda)^{-1}\left(O_i \cap g^{-1}V_i\right) \setminus [U_i]_{f^{-1}V_i},$$

где множество O_i открыто в Z, множество V_i открыто в Y, множество U_i открыто в X, $U_i \subseteq f^{-1}V_i$, и отображение $f\colon [U_i]_{f^{-1}V_i} \to V_i$ бикомпактно, $i = 1, \ldots, n$, такое, что $\cup\{S_i : i = 1, ..., n\} \subseteq W$.

Докажем следующее

Утверждение. *Если существует конечное покрытие слоя $\widetilde{g}^{-1}y$ в $c_f X$ базисными множествами*

$$S_i = (c\lambda)^{-1}\left(O_i \cap g^{-1}V_i\right) \setminus [U_i]_{f^{-1}V_i},$$

где множество O_i открыто в Z, множество V_i открыто в Y, множество U_i открыто в X, $U_i \subseteq f^{-1}V_i$, и отображение $f\colon [U_i]_{f^{-1}V_i} \to V_i$ бикомпактно, $i = 1, \ldots, n$, то существует открытое базисное множество

$$S = (c\lambda)^{-1}\left(O \cap g^{-1}V^1\right) \setminus \left[U^1\right]_{f^{-1}V^1},$$

где множество O открыто в Z, множество V^1 открыто в Y, множество U^1 открыто в X, $U^1 \subseteq f^{-1}V^1$, и отображение $f\colon [U^1]_{f^{-1}V^1} \to V^1$ бикомпактно, такое, что $\widetilde{g}^{-1}y \subseteq S \subseteq \cup\{S_i\colon i = 1, \ldots, n\}$.

Действительно, пусть $V^1 = \cap\{V_i\colon i = 1, \ldots, n\}$, $O = \cup\{O_i\colon i = 1, \ldots, n\}$, $U^1 = (\cup\{U_i\colon i = 1, \ldots, n\}) \cap f^{-1}V^1$. Поскольку

$$\left[U^1\right]_{f^{-1}V^1} = \left[(\cup\{U_i\colon i = 1, \ldots, n\}) \cap f^{-1}V^1\right]_{f^{-1}V^1} =$$

$$= \cup\left\{\left[U_i \cap f^{-1}V^1\right]_{f^{-1}V^1} : i = 1, \ldots, n\right\}$$

и отображения $f\colon [U_i]_{f^{-1}V_i} \to V_i$, $i = 1, \ldots, n$, бикомпактны, то отображение $f\colon [U^1]_{f^{-1}V^1} \to V^1$ бикомпактно. Потому открытое множество $S = (c\lambda)^{-1}(O \cap g^{-1}V^1) \setminus [U^1]_{f^{-1}V^1}$ является базисным и $\widetilde{g}^{-1}y \subseteq S \subseteq \cup\{S_i\colon i = 1, \ldots, n\}$. Утверждение доказано.

Продолжим доказательство теоремы. Пусть S, U^1и V^1 — такие, как в утверждении. Покольку отображение $\widetilde{g}$ замкнуто и для морфизма λ выполняется условие 2) определения 3, то, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $\widetilde{g}^{-1}V^1 \subseteq S$

и для окрестности $O \cap g^{-1}V^1$ слоя $\widetilde{g}^{-1}y$ в Z существует множество $U^2 \subseteq f^{-1}V^1$ такое, что отображение $f\colon [U^2]_{f^{-1}V^1} \to V^1$ бикомпактно и $\lambda(f^{-1}V^1 \backslash U^2) \subseteq O \cap g^{-1}V^1$. Так как отображение $f\colon [U^1 \cup U^2]_{f^{-1}V^1} \to V^1$ бикомпактно, то для окрестности W слоя $f^{-1}y \cap [U^1 \cup U^2]_{f^{-1}V^1}$ существует окрестность V^2 точки y такая, что $f^{-1}V^2 \cap [U^1 \cup U^2]_{f^{-1}V^1} \subseteq W$. Тогда для окрестности $V^* = V^1 \cap V^2$ точки y имеем $(cf)^{-1}V^* \subseteq W$.

Пусть теперь $y \in Y \backslash \widetilde{g}R$ и W — произвольная окрестность множества $cf^{-1}y = f^{-1}y$ в $c_f X$. Отображение f_R замкнуто, следовательно, для окрестности $W \cap (X \backslash f^{-1}\widetilde{g}R)$ множества $f_R^{-1}y = f^{-1}y$ существует окрестность V точки y в $Y \backslash \widetilde{g}R$, а значит, и в пространстве Y такая, что $f^{-1}V \subseteq W \cap (X \backslash f^{-1}\widetilde{g}R) \subseteq W$. Замкнутость отображения cf доказана.

Докажем, что прообраз каждой точки $y \in Y$ при отображении cf бикомпактен. Если $y \in Y \backslash \widetilde{g}R$, то множество $cf^{-1}y$ бикомпактно в силу бикомпактности отображения f_R. Пусть $y \in \widetilde{g}R$. Пусть S — произвольное открытое покрытие множества $(cf)^{-1}y = f^{-1}y \cup \widetilde{g}^{-1}y$ в пространстве $c_f X$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что оно состоит из базисных множеств. Выберем из него конечное подпокрытие бикомпактного слоя $\widetilde{g}^{-1}y$. По утверждению существует открытое базисное множество $S_0 = (c\lambda)^{-1}(O \cap g^{-1}V) \backslash [U]_{f^{-1}V}$, где множество O открыто в Z, множество V открыто в Y, множество U открыто в X, $U \subseteq f^{-1}V$, и отображение $f\colon [U]_{f^{-1}V} \to V$ бикомпактно, такое, что $\widetilde{g}^{-1}y \subseteq S_0$. Можно считать, что $S_0 \in S$. Для окрестности $(O \cap g^{-1}V)$ слоя $\widetilde{g}^{-1}y$ в Z по условию 2) определения 3 существуют окрестность V_0 точки y и множество $U_0 \subseteq f^{-1}V_0$ такие, что отображение $f\colon [U_0]_{f^{-1}V_0} \to V_0$ бикомпактно и $\lambda(f^{-1}V_0 \backslash U_0) \subseteq (O \cap g^{-1}V)$. Выберем из S конечные подсистемы S_1 и S_2, покрывающие бикомпактные множества $f^{-1}y \cap [U]_{f^{-1}V}$и $f^{-1}y \cap [U_0]_{f^{-1}V_0}$ соответственно. Тогда система $S_0 \cup S_1 \cup S_2$ является конечным подпокрытием покрытия S. Послойная бикомпактность отображения cf доказана.

Очевидно, ограничение отображения cf на множество $c_f X \backslash X = R$ совпадает с отображением $\widetilde{g}$.

Таким образом, отображение $cf\colon c_f X \to Y$ является бикомпактификацией отображения f такой, что $cf \backslash f = \widetilde{g}$. Теорема доказана.

Теорема 4. *Бикомпактное отображение $\widetilde{g}\colon R \to Y$ является наростом некоторой бикомпактификации локально бикомпактного хаусдорфова отображения $f\colon X \to Y$ тогда и только тогда, когда существуют хаусдорфово отображение $g\colon Z \to Y$, имеющее $\widetilde{g}$ в качестве подотображения, и приложение λ отображения f к подотображению $\widetilde{g}$ отображения g.*

Доказательство. Пусть $cf\colon c_f X \to Y$ — бикомпактификация отображения f такая, что $cf \backslash f = \widetilde{g}$. В качестве λ возьмем тождественное вложение пространства Xв $Z = c_f X = X \cup R$. Докажем, что λ является приложением отображения f к подотображению $\widetilde{g}$ отображения $g = cf$. Очевидно, λ есть морфизм отображения f в отображение cf.

Докажем, что выполняется условие 1) определения 3. Пусть множество V открыто в Y, множество U открыто в X, $U \subseteq f^{-1}V$, и отображение $f\colon [U]_{f^{-1}V} \to V$ бикомпактно. Рассмотрим произвольную окрестность O_z в пространстве Z точки $z \in R \cap g^{-1}V = R \cap (cf)^{-1} V$. Множество $O_z \cap \left((cf)^{-1} V \setminus [U]_{f^{-1}V}\right)$ также является окрестностью точки z в $c_f X$. Поскольку $R \subseteq [X]_{c_f X}$, то

$$\varnothing \neq \left(O_z \cap \left((cf)^{-1} V \setminus [U]_{f^{-1}V}\right)\right) \cap X = O_z \cap \left(f^{-1}V \setminus [U]_{f^{-1}V}\right).$$

Значит,

$$R \cap (cf)^{-1} V \subseteq \left[\left(f^{-1}V \setminus [U]_{f^{-1}V}\right)\right]_Z = \left[\lambda\left(f^{-1}V \setminus [U]_{f^{-1}V}\right)\right]_Z$$

для любого открытого V в Y, любого открытого U в X, такого, что $U \subseteq f^{-1}V$ и отображение $f\colon [U]_{f^{-1}V} \to V$ бикомпактно.

Докажем, что выполняется условие 2) определения 3. Рассмотрим $y \in \widetilde{g}R$ и произвольную окрестность W слоя $\widetilde{g}^{-1}y$ в $c_f X$. Поскольку $\widetilde{g}$ является бикомпактным отображением, то существует окрестность V точки y такая, что $\widetilde{g}^{-1}V \subseteq W \cap R$. Множество $U = (cf)^{-1} V \setminus W \subseteq f^{-1}V$ замкнуто в $cf^{-1}V$, следовательно, $f = cf\colon [U]_{f^{-1}V} \to V$ бикомпактно и $f^{-1}V \setminus U = \lambda\left(f^{-1}V \setminus U\right) \subseteq W$.

Докажем, что выполняется условие 3) определения 3. Отображение $f_R = f\colon (X \setminus f^{-1}(\widetilde{g}R)) \to Y \setminus \widetilde{g}R$ бикомпактно как сужение бикомпактного отображения cf на полный прообраз множества $Y \setminus \widetilde{g}R$.

Таким образом, морфизм λ является приложением отображения f к подотображению $\widetilde{g}$ отображения cf.

Пусть теперь существуют отображение $g\colon Z \to Y$, имеющее $\widetilde{g}$ в качестве подотображения, и приложение λ отображения f к подотображению $\widetilde{g}$ отображения g. Тогда по теореме 3 существует бикомпактификация $cf\colon c_f X \to Y$отображения f такая, что $cf \setminus f = \widetilde{g}$. Теорема доказана.

Замечание 2. В случае одноточечного пространства Y из определения 3 получается новое определение приложения пространства Xк бикомпакту B в пространстве Z, которое отличается от определения 2.

Определение 4. Отображение $f\colon X \to Z$ называется *приложением пространства X к бикомпакту B в пространстве Z*, если:

1) $B \subseteq [f(X \setminus U)]_Z$ для любого открытого и ограниченного в X множества U;

2) для любой окрестности W бикомпакта B в пространстве Z существует ограниченное в X множество U такое, что $f\left(X \setminus U\right) \subseteq W$.

В случае одноточечного пространства Y из доказанной теоремы 4 получаем

Следствие. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *бикомпакт B является наростом некоторой бикомпактификации локально бикомпактного хаусдорфова пространства X тогда и только тогда, когда существует приложение пространства X к бикомпакту B в хаусдорфовом пространстве Z в смысле определения 4*;

2) *бикомпакт B является наростом некоторой бикомпактификации локально бикомпактного хаусдорфова пространства X тогда и только тогда, когда существует приложение пространства X к бикомпакту B в хаусдорфовом пространстве Z в смысле определения 2.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Magill K. D. A note on compactifications // Math. Zeitschr. – 1966. – V. 94. – P. 322–325.
2. Белянова Э. Н. Описание всех T_2-бикомпактификаций локально бикомпактного T_2-пространства // Научные труды МПГУ. – М.: Прометей, 2004. – С. 13–19.
3. Пасынков Б. А. О распространении на отображения некоторых понятий и утверждений, касающихся пространств. Отображения и функторы. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – С. 72–102.
4. Мусаев Д. К., Пасынков Б. А. О свойствах компактности и полноты топологических пространств и непрерывных отображений. – Ташкент: ФАН, 1994. – С. 50–76.
5. Bludova I., Nordo G. On the poset of all the Hausdorff and Tychonoff compactification of mappings // Q&A in General Topology. – 1999. – V. 17. – P. 47–54.

Статья поступила в редакцию 20.05.2005

Эльвира Николаевна Белянова родилась в 1968 г., окончила в 1990 г. МГУ им. М.В. Ломоносова. Старший преподаватель учебно-научного центра “Основы математики и информатики” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор двух научных работ в области общей послойной топологии.

E.N. Belyanova (b. 1968) graduated from the Lomonosov Moscow State University in 1990. Senior teacher of educational and scientific center “Basics of Mathematics and Informatics” of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 2 publications in the field of general fiber topology.