

УДК 531

500 ЛЕТ ИСТОРИИ ЗАКОНА СУХОГО ТРЕНИЯ**В.Ф. Журавлев**

Институт проблем механики РАН им. А.Ю. Ишпинского, Москва, Российская Федерация

e-mail: zhurav@ipmnet.ru

Рассмотрена роль таких ученых, как Амонтон, Кулон, Леонардо да Винчи, Морен и Эйлер в создании закона сухого трения. В частности приведена ссылка на статью Эйлера 1748 г., в которой изложен закон сухого трения в исчерпывающей формулировке за 37 лет до основных публикаций Кулона. Приведена оценка критике Пенлеве закона Кулона. Парадокс Пенлеве проиллюстрирован на примере схемы тормозной колодки. Изложены основные детали теории поликомпонентного сухого трения.

Ключевые слова: сухое трение, закон Кулона.

500 YEARS OF HISTORY OF THE DRY FRICTION LAW**V.F. Zhuravlev**

Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

e-mail: zhurav@ipmnet.ru

The role that such scholars as Amontons, Coulomb, Leonardo da Vinci, Morin, and Euler played in creation of the dry friction law is discussed. In particular, a reference is given to the Euler's article published in 1748, in which the dry friction law is set forth in the comprehensive statement 37 years before the main publications of Coulomb. The Painlevé criticism of the Coulomb's law is estimated. The Painlevé paradox is illustrated by example of the brake shoe scheme. Basic details of theory of polycomponent dry friction are stated.

Keywords: dry friction, Coulomb's law.

Введение. Одной из основных категорий в аксиоматике механики является сила, приложенная к материальной точке, выражение для которой в виде зависимости от времени, координат точки и ее скорости присутствует в правой части второго закона Ньютона. Эта зависимость обычно устанавливается экспериментально и является задачей какого-либо раздела физики.

Исторически одним из первых примеров физических сил является сила сухого трения Кулона. В учебниках по теоретической механике закон Кулона обычно формулируется следующим образом: сила сопротивления, приложенная к телу со стороны плоской поверхности, по которой оно скользит, пропорциональна прижимающей тело к плоскости силе, не зависит ни от площади контакта, ни от скорости скольжения. Эта сила направлена против вектора скорости и лежит

в плоскости контакта. Коэффициент пропорциональности называется коэффициентом сухого трения.

Представление этого закона в виде формулы, связывающей силу трения со скоростью относительного поступательного скольжения,

$$F = \begin{cases} fN \frac{v}{|v|}, & v \neq 0; \\ [-F_r, F_r] & (F_r \geq fN), \quad v = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь f — коэффициент трения; N — прижимающая сила (нормальная реакция); v — скорость относительного скольжения. Если $v \neq 0$, то сила трения называется *силой трения скольжения*, если $v = 0$, то сила трения принадлежит указанному в квадратных скобках интервалу и называется *силой трения покоя*. Ее значение в этом интервале определяется из условия равновесия покоящегося тела.

Предыстория закона сухого трения. Первая в истории попытка экспериментального установления закона трения принадлежит Леонардо да Винчи (1452–1519) [1]. Две его неопубликованные рукописи под названием “Атлантический кодекс” хранятся в национальной библиотеке Мадрида (Il codice Atlantico di L. da Vinci nella Biblioteca Ambrosiana di Milano). В них можно прочитать следующее: “. . . сила трения зависит от материала соприкасающихся поверхностей, а также от степени их обработки и не зависит от площади соприкасающихся поверхностей; она прямо пропорциональна весу груза и может быть уменьшена путем введения “роликов” или смазочных веществ между трущимися поверхностями”, а также “Всякое трущееся тело оказывает при трении сопротивление, равное одной четверти своего веса”.

Следовательно, Леонардо да Винчи первым определил пропорциональность трения давлению с коэффициентом трения $1/4$ и независимость трения от площади контакта трущихся поверхностей. Независимость трения от площади контакта установлена в результате наблюдения за тем, что свернутый в бухту канат сопротивляется скольжению так же, как и вытянутый в линию. Кроме того, отметим, что Леонардо да Винчи изучал влияние смазки и промежуточных тел (прототип подшипника качения) на трение.

Иногда в литературе закон сухого трения Кулона (1) называют законом Амантона–Кулона. Французский механик Гильом Амантон (1663–1705) под влиянием потребностей зарождающейся во Франции промышленности и опираясь на только что открытую механику Ньютона, почти через 200 лет после Леонардо да Винчи повторяет его результаты [2]. Доказательство того, что трение не зависит от площади контакта трущихся поверхностей он проводит более тщательно,

чем Леонардо да Винчи, а вот указанное им значение коэффициента трения $1/3$ несколько дальше от истинного, чем у последнего.

Кулон и Эйлер. Однако более всех достоин фигурировать в названии закона сухого трения Леонард Эйлер (1701–1783). Ниже приведено название и первое предложение из статьи Эйлера “*Sur la Diminution de la résistance du frottement*”, опубликованной им в 1748 г. [3]. Отметим, что Кулону в этот момент было 12 лет.

“L’expérience nous ayant fait voir que la force du frottement est toujours égale a une certaine partie de la pression, dont un corps est pressé contre la surface, sur laquelle il se meut, de sorte que le frottement ne dépende ni de la grandeur de la base, dont le corps touche la surface, ni du degré de vitesse, il n’est pas difficile de déterminer l’effet du frottement dans toutes sortes de Machines par le moyen du calcul: vu que le frottement doit être regardé comme une force constante, qui est toujours directement contraire à la direction du mouvement, & qui agit dans une direction, qui passe par le plan de l’attouchement des corps qui se meuvent l’un sur l’autre.”¹

Приведенная формулировка закона Кулона почти дословно повторяет перевод этого текста.

Формулировка Эйлера — это формулировка механика и математика, для которого важно исчерпывающее аналитическое описание нового объекта, необходимое в уравнениях механики, а не физика, изучающего природу новой силы, каким был Кулон. Для механиков физическая природа силы не представляет интереса. Отказываясь обсуждать физическую природу силы тяготения, Ньютон, имевший девиз “*hypotheses non fingo*” (гипотез не выдвигаю), писал, что “установленного им закона достаточно, чтобы описывать движение планет и явление прилива”.

Эйлер сразу же привел примеры использования сформулированного им закона сухого трения, в частности, записал выражение для определения коэффициента сухого трения через время скольжения тела по наклонной плоскости до остановки и пройденный при этом путь. Полученная формула позволяла экспериментально находить коэффициент трения.

Эйлер обращает внимание на необычный вид закона сухого трения: “это не характерный ни для каких известных к тому времени сил разрыв первого рода зависимости силы от скорости при равном нулю значении скорости. Разрыв, требующий доопределения в точке разрыва из условий равновесия тела”. Эйлер был первым, кто заметил,

¹Опыт показывает нам, что сила трения всегда равна некоторой части давления, с которым тело прижимается к плоскости, по которой оно скользит, так, что трение не зависит ни от величины площади контакта, ни от величины скорости, влияние трения в разнообразных машинах нетрудно учесть как постоянную силу, противоположную направлению движения и лежащую в плоскости соприкосновения скользящих друг по другу тел.

что трение трогания превосходит трение скольжения (1). Это следовало из того, что в экспериментах по скольжению тела по наклонной плоскости, ему не удавалось сколь угодно малой вариацией угла наклона добиться непрерывного перехода от состояния покоя к состоянию со сколь угодно малым ускорением.

Французский военный инженер Шарль Огюстен Кулон по инициативе Парижской академии наук провел в порту Рошфор фундаментальный научный эксперимент по установлению закона сухого трения в 1779–1781 гг. Идея эксперимента Кулона столь же проста, сколь и остроумна. Для того чтобы определить, что сила трения не зависит от скорости, он прикладывал к лежащим на столе груженым салазкам вдоль оси их симметрии силу, в результате салазки приходили в движение, с помощью линейки и секундомера устанавливалось, что движение равноускоренное. Это означало следующее: сила трения не зависит от скорости, иначе движение не могло бы быть равноускоренным. Зная ускорение, нетрудно вычислить как приложенную горизонтальную силу, так и силу трения. Эксперимент повторялся для различных материалов, разных прижимающих сил и разных размеров испытываемого тела. В каждом эксперименте фиксировалось отношение прижимающей силы к силе трения (коэффициент, обратный коэффициенту, который в настоящее время называется коэффициентом сухого трения). Работа получила премию Парижской академии наук в 1781 г. и была издана в серии публикаций, из которых наиболее известна монография “Теория простых машин” [4].

Несмотря на то что у Кулона нет столь же ясной и компактной формулировки закона сухого трения, как у Эйлера, недооценить его вклад в развитие этого закона нельзя. В то же время роль Эйлера незаслуженно забыта.

Эйлер и Кулон являются полноправными основоположниками науки о трении. При этом Эйлер дал направление математического подхода к проблеме, а Кулон — физического. В первом направлении работали такие ученые, как Г. Кориолис, А.Э. Резаль, Э. Раус, Ж. Желе, П. Пенлеве, Н.Е. Жуковский, Е.А. Болотов, П. Контенсу и др. Здесь интерес представляют проблемы существования и единственности решений уравнений движения и равновесия систем с сухим трением, проблемы разрешимости таких уравнений относительно ускорений, проблемы интегрирования уравнений с разрывными правыми частями, закономерности трения в условиях скольжения с непростой кинематикой, проблемы управления системами с сухим трением и т.п.

Второе направление развивали многие ученые, поскольку физика процесса трения недостаточно ясна и в настоящее время. Перечислим лишь некоторых из них: В.Д. Кузнецов, А. Морен, Ф.П. Боуден,

П. Конти, М. Мерчент, Л. Бриллюен, В. Гарди, Б.В. Дерягин, И.В. Крагельский и др. Здесь интерес представляют такие вопросы, как износ и нагрев материалов при трении, распределение нормальных и касательных напряжений в зоне контакта, пластические деформации, физическая природа сил трения (молекулярное сцепление, гистерезисные потери, потери на разрушение поверхностного слоя и т.п.). Закон сухого трения Эйлера – Кулона вошел в историю техники как один из наиболее применяемых законов в инженерных расчетах.

Посткулоновские уточнения закона сухого трения. Эксперимент Кулона впоследствии многократно воспроизводился последователями в целях уточнения различных деталей, в частности, исследователей, как и Эйлера, интересовал момент троганья и более подробная зависимость силы трения от скорости в широком диапазоне. Наиболее масштабными были эксперименты, проведенные в 1831–1833 гг. другим французским ученым А. Мореном [5]. В связи с этим во французской учебной литературе закон сухого трения Кулона называется законом Кулона – Морена [6]. Подобное название неоправданно, так как ничего принципиально нового в эксперимент Кулона Морен не внес. Более тщательные измерения Морена вошли в виде таблиц со значениями коэффициентов трения в различные инженерные справочники.

Критика Пенлеве закона сухого трения. Видный французский математик П. Пенлеве выступил в 1895 г. с критикой закона сухого трения. Рассмотрев несколько примеров решения задач с сухим трением и столкнувшись с некоторыми трудностями, он пришел к выводу о логической несовместимости закона сухого трения с основными законами классической механики [7]. Обнаруженные им противоречия вошли в историю сухого трения как “парадоксы Пенлеве”.

Работа Пенлеве вызвала оживленную дискуссию, в которой приняли участие известные французские и немецкие ученые: Л. Лекорню, де Спарт, Ф. Клейн, Р. Мизес, Г. Гамель, Л. Прандтль. Мнение Пенлеве поддержки не нашло, а для разрешения парадоксов были предложены разные приемы.

Анализ этих парадоксов позволяет отнести их к одному из двух типов. Это либо ошибка анализа, когда более внимательное рассмотрение дает возможность констатировать отсутствие какого-либо парадокса, либо некорректность постановки задачи, когда для рассматриваемой в задаче модели решение не существует или не единственно. Такие проблемы встречаются в различных разделах механики. Часто они являются причиной неприемлемости в конкретных задачах некоторых предельных абстракций, связанных с понятием “бесконечность”: бесконечно большая жесткость, точечная масса, нулевой зазор ($0 = 1/\infty$)

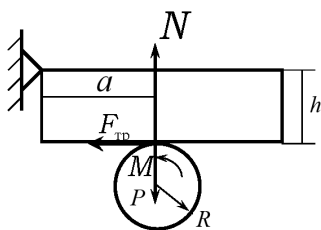


Рис. 1. Схема тормозной колодки

Парадокс, основанный на ошибке, проиллюстрируем на часто приводимом примере схемы тормозной колодки (рис. 1).

Статика системы колодка – диск описывается уравнениями для колодки

$$(N - P)l - F_{\text{тр}}h = 0; \quad (2)$$

для диска

$$M - F_{\text{тр}}R = 0; \quad (3)$$

закон Эйлера – Кулона

$$0 \leq F_{\text{тр}} \leq fN. \quad (4)$$

Суть парадокса заключается в следующем: если предположить, что диск вращается, то в (3) реализуется равенство $F_{\text{тр}} = fN$, подставляя которое в (1), находим

$$N = \frac{lP}{l - fh}. \quad (5)$$

При $l - fh < 0$ реакция N будет отрицательной, что не имеет физического смысла. Отсюда иногда делают вывод, что система (1)–(3) противоречива.

Это рассуждение ошибочно, поскольку не имеющий физического смысла результат (4) при $l - fh < 0$ свидетельствует лишь о том, что предположение о вращении диска должно быть отброшено. Покажем, что имеет место следующая теорема.

Теорема. Если

$$l - fh < 0, \quad (6)$$

то $F_{\text{тр}} < fN$, т.е. диск неподвижен.

◀ Подставим силу $F_{\text{тр}}$ из (2) в (1) и определим реакцию N :

$$N = P + \frac{Mh}{Rl}. \quad (7)$$

и т.п. Для моделей, в которых присутствуют подобные абстракции, могут возникать ситуации, определенные Ж. Адамаром понятием “некорректность”. Задача называется *корректно поставленной* по Адамару, если она имеет единственное решение и при малом возмущении параметров и начальных данных решение также изменяется мало [8]. Те парадоксы Пенлеве, которые не сводятся к ошибке анализа, как раз и являются некорректно поставленными.

Разделим (2) на (6) и получим

$$\frac{F_{\text{тр}}}{N} = \frac{Ml}{PRl + Mh} < \frac{l}{h},$$

или с учетом (5) запишем $F_{\text{тр}} < fN$, т.е. диск неподвижен. ►

Следовательно, приведенная на рис. 1 схема в зависимости от соотношения параметров представляет собой два разных механизма. Механизм 1 — это тормозная колодка, если $l - fh > 0$, механизм 2 — клиновый стопор, если $l - fh < 0$.

Геометрически проиллюстрируем работу этих двух механизмов.

Тормозная колодка. В этом случае тангенс угла наклона прямой $N = P + (h/l)F_{\text{тр}}$ меньше тангенса угла наклона прямой $N = (1/f)F_{\text{тр}}$, поэтому, постепенно увеличивая приложенный к диску момент M , добиваемся увеличения силы $F_{\text{тр}}$ до предельного значения трения скольжения, при котором начинается вращение диска, после чего управляя силой P , регулируем торможение диска.

Клиновый стопор. В этом случае указанные прямые в положительной области не пересекаются, как ни увеличивать момент M , поскольку сила $F_{\text{тр}}$ не может выйти за граничное значение в (3).

Поликомпонентное сухое трение. В работе Пенлеве в разделе “О трении качения и верчения” речь идет об общем случае, когда тело, находящееся в контакте с поверхностью Σ в некоторой точке, не только скользит по ней, но и осуществляет качение и верчение. В этом случае Пенлеве наряду с силой трения вводит и момент трения Γ , который представляет собой состоящий из двух компонент Γ_p и Γ_r . Компонента Γ_p является моментом трения верчения, перпендикулярным поверхности Σ , а компонента Γ_r — моментом трения качения, касательная к поверхности Σ . Указанные компоненты трения Пенлеве полагает независимыми друг от друга, каждая компонента описывается обычным законом Кулона. Так, в этом разделе написано: “Весьма примитивные опыты приводят к заключению, что для заданных положения и скоростей тела направления моментов Γ_p и Γ_r прямо противоположны направлениям нормальной и касательной к поверхности Σ составляющих ω_p и ω_r вектора мгновенной угловой скорости ω ; кроме того, по абсолютной величине Γ_p и Γ_r определяются равенствами $\Gamma_p = f'R_n$, $\Gamma_r = f''R_n$, где R_n обозначает нормальную к поверхности Σ составляющую полной реакции R этой поверхности при наличии трения скольжения”.

Это ошибка. Закон сухого трения Кулона формулировался Эйлером и проверялся Эйлером и Кулоном экспериментально только для поступательного скольжения тела по плоскости. В случаях сложной кинематики, когда кроме поступательного движения тело еще и вращается,

закон Кулона в сформулированной ими форме не имеет места. Силовые характеристики в поступательном и вращательном движениях сложным нелинейным образом связаны друг с другом. Существует две возможности распространить закон Кулона на случай с дополнительным вращением. Во-первых, можно усложнить эксперимент Эйлера – Кулона, добавив к поступательному скольжению тела еще и вращение. Во-вторых, закон Кулона можно применить в локальной (дифференциальной) форме к элементу площади в зоне контакта двух тел, затем проинтегрировав по этой области для вычисления главного вектора и главного момента элементарных сил трения. Именно так и поступил Жуковский [9, 10] в 1894 г., т.е. за год до Пенлеве.

Отметим, что если для прямолинейного поступательного движения сразу постулировать закон Кулона в дифференциальной форме $dF = \sigma \operatorname{sgn} v dS$, где σ – плотность нормальной силы в пятне контакта; v – скорость скольжения; S – площадь пятна контакта, то после интегрирования получаем $F = fN \operatorname{sgn} v$ ($N = \iint_S \sigma dS$). Это означает, что результат не зависит от площади пятна контакта. Это есть *следствие* дифференциального закона трения, а не самостоятельное независимое свойство сухого трения.

Подход Жуковского позволяет ответить и на вопрос о том, как следует понимать закон сухого трения в случае, если контакт точечный. Ранее справедливость обычного закона Кулона для трения в точке, да еще и в условиях сложной кинематики фактически представляла собой *новый* постулат, поскольку из экспериментов Эйлера – Кулона никак не следовала [11–14]. Впервые на то, что такая точка зрения может приводить к ошибкам, обратил внимание П. Контенсу [15]. Он изучал поведение корабельной гировертикали Флерие и обнаружил противоречие эксперимента теории, основанной на применении закона Кулона в упрощенной форме. После чего Контенсу рассмотрел контакт двух сферических тел в соответствии с теорией контактных напряжений Герца и закон сухого трения в дифференциальной форме с последующим интегрированием элементарных сил, как у Жуковского.

Теория Контенсу получила дальнейшее развитие в работе [16]. В частности, наряду с главным вектором также был вычислен и главный момент элементарных сил трения. Кроме того, было показано, что вопреки утверждению о неэлементарности интегралов [15], представляющих силу и момент трения моментом, эти интегралы были определены в элементарных функциях.

Результаты позволили установить зависимость силы трения от скорости скольжения в случае дополнительного вращения (рис. 2) [15, 16]. Зависимость показывает следующее: какой бы малой ни была угловая

скорость верчения Ω , зависимость силы трения от скорости скольжения не имеет более характерного вида сигнум-функции (1). Разрыв первого рода у зависимости отсутствует. Для произвольных площадей пятна контакта этот эффект был ранее установлен Жуковским (эффект Жуковского).

Закон трения (см. рис. 2) может быть определен в результате эксперимента, обобщающего эксперименты Эйлера – Кулона.

Вопрос о корректности по Адамару модели точечного контакта с простым законом сухого трения был рассмотрен в работе [18] путем перехода к пределу, когда радиус ε пятна контакта стремится к нулю в выражениях для сил и моментов, приведенных в работе [16]. Была доказана *некорректность* такой модели. Это означает, что при изучении подобных задач следует использовать методы, специально для них разработанные.

Модель многокомпонентного сухого трения позволила объяснить все наблюдаемые эффекты в таких задачах, как качение бильярдного шара, волчок Томсона (тип-топ), кельтский камень, шимми колеса самолета и др. [18]. Вопросы истории закона сухого трения ранее были рассмотрены в работе [19].

ЛИТЕРАТУРА

1. Леонардо да Винчи. О себе и о своей науке. Т. I. Academia, 1932.
2. Amontons M. De la résistance causée dans les machines // Mém. l'Acad. Roy., 1699. P. 206–222.
3. Euler L. Sur la diminution de la résistance du frottement. Histoire de L'Academie Royale des Sciences et Belles Lettres a Berlin. 1748. P. 133–148.
4. Coulomb C.A. Théories des machines simples // Mém. Math. et Phys. l'Acad. Sci. 1785. Vol. 10. P. 161–331.
5. Morin A. Nouvelles expériences sur le frottement faités a Metz en 1831–1833 // Mém. présentées par divers savants a l'Académie des sciences. T. 4. P. 1–128, 591–696. 1833; P. 641–783. 1835.
6. Bellet D. Cours de Mecanique Generale. Toulouse: Cepadues-editions. Collection “La cheveche”, 1988. 379 p.
7. Painlevé P. Leçons sur le Frottement. Paris: Hermann, 1895 (Пенлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.).
8. Hadamard J. Sur les integrals d'un system d'équations différentielles ordinaires, considérées comme fonctions des données initiales // Bull. Soc. Math. France. 1900. Vol. 28. P. 64–66.

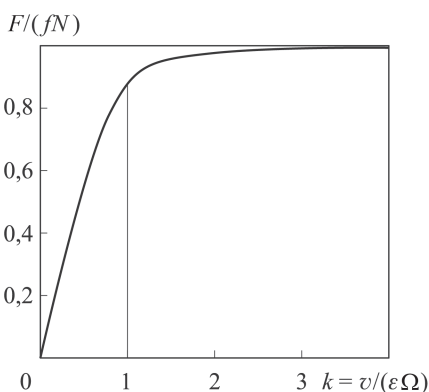


Рис. 2. Зависимость силы трения от скорости скольжения в случае дополнительного верчения

9. Жуковский Н.Е. Условие равновесия твердого тела, опирающегося на неподвижную плоскость некоторой площадкой и могущего перемещаться вдоль этой плоскости с трением. Собр. соч. Т. 1. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. С. 339–354.
10. Жуковский Н.Е. Трение бандажей железнодорожных колес о рельсы. Собр. соч. Т. 7. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. С. 426–478.
11. Кориолис Г. Математическая теория явлений биллиардной игры. М.: Гостехиздат, 1956. 235 с.
12. Маркеев А.П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, Физматлит, 1992. 336 с.
13. Раус Э. Динамика системы твердых тел. Т. 2. М.: Наука, 1983. 544 с.
14. Euler J.A. Recherches plus exactes sur l'effet des moulin б vent // Mem. Acad. Roy. Sci. Berlin. 1758. Bd 12. S. 165–234.
15. Коитенсу П. Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка // Проблемы гироскопии. М.: Мир, 1967. С. 60–77.
16. Журавлев В.Ф. Момент трения вращающейся цапфы при движении по подвижному основанию // Вопросы оборонной техники. Сер. 9. Вып. 2. 1969.
17. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. О механизме явления шимми. Докл. РАН. 2009. Т. 428. № 6. С. 761–764.
18. Андронов В.В., Журавлев В.Ф. Сухое трение в задачах механики. М.; Ижевск: R&CDynamics, 2010. 183 с.
19. Крагельский И.В., Шедров В.С. Развитие науки о трении. Сухое трение. М.: Изд-во АН СССР, 1956. 235 с.

REFERENCES

- [1] Leonardo da Vinci. O sebe i o svoey nauke. Izbr. proizv. T. 1 [About himself and his science. Vol. 1]. Moskva–Leningrad, Academia Publ., 1935. 444 p.
- [2] Amontons M. De la réistance causée dans les machines. Mém. l'Acad. Roy., 1699, pp. 206–222.
- [3] Euler L. Sur la diminution de la r?sistence du frottement. *Histoire de L'Academie Royale des Sciences et Belles Lettres à Berlin*, 1748, pp. 133–148.
- [4] Coulomb C.A. Théorie des machines simples. *Mém. Math. et Phys. l'Acad. Sci.*, 1785, vol. 10, pp. 161–331.
- [5] Morin A. Mém. présentées par divers savants à l'Académie des sciences. 1833, t. 4, pp. 1–128, pp. 591–696; 1835, pp. 641–783.
- [6] Bellet D. Cours de Mecanique Generale. Toulouse, Cepadues-editions, Collection “La cheveche”, 1988. 379 p.
- [7] Painlevé P. Leçons sur le Frottement. Paris, Hermann, 1895. 120 p. (Russ. ed.: Penleve P. Lektsii o trenii. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1954. 316 p.).
- [8] Hadamard J. Sur les integrals d'un system d'équations différentielles ordinaires, considérées comme fonctions des données initiales. *Bull. Soc. Math. France*, 1900, vol. 28, pp. 64–66.
- [9] Zhukovskiy N.E. Uslovie ravnovesiya tverdogo tela, opirayushchegosya na nepodvizhnuyu ploskost' nekotoroy ploschadkoy i mogushchego peremeshchat'sya vdol' etoy ploskosti s treniem. Poln. sobr. soch. T. 1. Obschaya mekhanika. [Condition for equilibrium of solid body resting on a motionless plane of small area and able to move along this plane with the friction. Collected Papers. Vol. 1. Theoretical mechanics]. Moskva–Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1948, pp. 339–354 (640 p.).
- [10] Zhukovskiy N.E. Trenie bandazhey zheleznodorozhnykh koles o rel'sy Poln. sobr. soch. T. 8. Teoriya uprugosti. Zheleznye dorogi. Avtomobili. [Friction of binding band of railway wheels on rails. Vol. 8. Theory of elasticity. Railways. Automobiles. Collected Papers]. Moskva–Leningrad, Gostekhizdat Publ., 1948, pp. 426–478.

- [11] Coriolis G. Theorie mathematique des effets du jeu de billard. *Journal de l'Ecole polytechnique*, 1835, 154 p. (Russ. ed.: Koriolis G. Matematicheskaya teoriya yavleniy billiardnoy igry. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1954. 316 p.).
- [12] Markeev A.P. Dinamika tela, soprikasayushchegosya s tverdoy poverkhnost'yu [The dynamics of the body osculating with a solid surface]. Moscow, Nauka–Fizmatlit Publ., 1992. 336 p.
- [13] Routh E.J. An elementary treatise on dynamics of a system of rigid bodies with numerous examples. London, MacMillan and Co, 1877. 601 p. (Russ. ed.: Raus E. Dinamika sistemy tverdykh tel. T. 2. Moscow, Nauka Publ., 1983. 544 p.).
- [14] Euler J.A. Recherches plus exactes sur l'effet des moulin à vent. *Mem. Acad. Roy. Sci. Berlin*, 1758, Bd 12, pp. 165–234.
- [15] Kontensu P. Communication between the rubbing and pivoting friction and its accounting in theory of spinning top. *Sb. "Problemy giroskopii"* [Collect. Pap. "Problems of gyroscopy"], Moscow, Mir Publ., 1967, pp. 60–77 (in Russ.).
- [16] Zhuravlev V.F. Frictional moment of a rotating trunnion at movement on the movable base. *Voprosy oboronnoy tekhniki* [Issues of defense engineering technique], 1969, ser. 9, iss. 2 (in Russ.).
- [17] Zhuravlev V.F., Klimov D.M. On the mechanism of the shimmy phenomenon. *Dokl. RAN* [Proc. Russ. Acad. Sci.], 2009, vol. 428, no. 6, pp. 761–764 (in Russ.).
- [18] Andronov V.V., Zhuravlev V.F. Sukhoe trenie v zadachakh mekhaniki [Coulomb friction in mechanics problem]. Moscow–Izhevsk, R&C Dynamics Publ., 2010. 183 p.
- [19] Kragel'skiy I.V., Shchedrov V.S. Razvitie nauki o trenii. Sukhoe trenie. [Enhancement of tribology. Coulomb friction]. Moscow, AN SSSR Publ., 2010, 183 p.

Статья поступила в редакцию 03.12.2013

Виктор Филиппович Журавлев — академик РАН, д-р физ.-мат. наук, профессор Института проблем механики РАН им. А.Ю.Ишлинского. Автор более 200 научных работ в области аналитической механики, теории колебаний, гироскопических систем.

Институт проблем механики РАН им. А.Ю.Ишлинского, Российская Федерация, 119526, Москва, пр-т Вернадского, д. 101а.

V.F. Zhuravlev — Member of the Russian Academy of Sciences, Dr. Sci. (Phys.–Math.), professor of the Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences. Author of more than 200 publications in the field of analytical mechanics, theory of oscillations, gyroscopic systems.

Ishlinskii Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, pr. Vernadskogo 101a, Moscow, 119526 Russian Federation.