УДК 517.977.5

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ИНВЕСТИЦИЯМИ В ЗАКРЫТОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТРЕХСЕКТОРНОЙ ЭКОНОМИКИ: МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОБЩИЙ АНАЛИЗ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

П.В. Шнурков, **В.В. Засыпко**

МИЭМ НИУ ВШЭ, Москва, Российская Федерация
e-mail: pshnurkov@hse.ru; vzasypko@gmail.com

Исследована математическая проблема оптимального управления, сформулированная на основе закрытой динамической модели трехсекторной экономики. Состояние системы описано набором функций удельного капитала в каждом секторе; параметр управления — величина, характеризующая объем удельных инвестиций фондосоздающего сектора, играющего ключевую роль в экономической системе. Математическая проблема сформулирована в виде классической задачи оптимального управления с фиксированным интервалом времени, закрепленным левым и свободным правым концами траектории. Решение поставленной задачи оптимального управления основано на использовании принципа максимума Понтрягина. Определена общая структура управления, соответствующая принципу максимума. Описан метод дальнейшего исследования поставленной задачи, которое заключается в аналитическом определении основных и сопряженных переменных и в разработке процедуры нахождения оптимального управления.

***Ключевые слова*:** модель трехсекторной экономики, принцип максимума Понтрягина, оптимальное управление.

OPTIMAL CONTROL OF INVESTMENTS IN THE CLOSED-FORM DYNAMIC MODEL OF THREE-SECTOR ECONOMY: MATHEMATICAL STATEMENT OF THE PROBLEM AND GENERAL ANALYSIS BASED ON THE MAXIMUM PRINCIPLE

P.V. Shnurkov, **V.V. Zasypko**

Moscow State Institute of Electronics and Mathematics of the “Higher School of Economics” National Research University, Moscow, Russian Federation
e-mail: pshnurkov@hse.ru; vzasypko@gmail.com

A mathematical optimal control problem formulated on the basis of the closed-form dynamic problem of three-sector economy is studied. The system state is described by a set of functions of specific capital in each sector; the control parameter is the quantity characterizing a volume of specific investments of the fund-creating sector playing a key role in the economic system. The mathematical problem is formulated as a classical optimal control problem with a fixed time interval, with the fastened left and free right trajectory ends. Solving the stated problem is based on the Pontryagin maximum principle. A general control structure is determined that corresponds to the maximum principle. A method for further study of the stated problem is described, which consists in analytical determination of main and associated variables and in development of the procedure for finding the optimal control.

***Keywords*:** model of three-sector economy, Pontryagin maximum principle, optimal control.

Введение. В работе проведено аналитическое исследование оптимального управления динамической экономической системой, которая представляет собой национальную экономику или экономическую систему отдельного государства, рассматриваемую без учета внешнеэкономических связей. Такая экономическая система называется закрытой.

Постановка задачи оптимального управления и проведенное исследование являются новыми. В связи с этим сделаем следующие замечания. В фундаментальном издании по математической экономике аналогичные задачи не рассмотрены [1]. В работе [2], посвященной современной теории оптимального управления в динамических экономических системах, представлены только одномерные модели. В работах [3, 4] исследованы некоторые задачи оптимального управления, которые отличаются от рассматриваемой в настоящей статье по форме постановки и по содержанию используемых математических методов, а также по характеру полученных результатов.

Проведенное исследование проблемы оптимального управления основано на принципе максимума Понтрягина. Теория принципа максимума изложена в фундаментальных изданиях отечественной научной литературы [5–7]. В работе [8] систематически изложены основные проблемы современной теории оптимального управления, включая методы, основанные на принципе максимума Понтрягина и принципе оптимальности Беллмана. Выбор принципа максимума в качестве теоретической основы данного исследования обусловлен тем, что в задачах оптимального управления с непрерывным временем метод, основанный на принципе максимума, дает возможность определить аналитическую структуру функции оптимального управления. Таким образом, появляется возможность найти аналитическое решение всей системы соотношений относительно неизвестных параметров, включающей в себя необходимые условия и ограничения исходной задачи [6, 7]. В то же время метод динамического программирования, основанный на принципе оптимальности Беллмана, не позволяет аналитически определить функцию оптимального управления даже в известных классических задачах, что отмечено, в частности, в работе [8].

В настоящей статье описаны основные характеристики рассматриваемой динамической экономической модели и сформулирована математическая постановка задачи оптимального управления. Кроме того, выведены основные аналитические соотношения, представляющие собой составные части принципа максимума для этой задачи оптимального управления: сопряженные уравнения; условия трансверсальности; условие максимума функции Понтрягина. На основе условия максимума определена аналитическая структура функции оптимального управления. Используя полученные представления для сопряженных переменных, можно найти явное представление для вспомогательной функции, которая характеризует структуру оптимального управления. Конкретный вид функции управления, соответствующей принципу максимума, включая значение точек переключения управления, может быть определен численным методом с помощью реализации процедуры, описанной в следующей работе. Таким образом, в результате исследования разработан аналитико-численный метод, позволяющий определить функции состояний в рассматриваемой задаче управления экономической динамической системой.

Основные параметры и соотношения в модели трехсекторной экономики. Опишем теоретическую экономическую модель, в рамках которой будет сформулирована математическая задача оптимального управления. Трехсекторная модель экономической системы (национальной экономики) была создана В.А. Колемаевым [3, 4]. В модели производственная система национальной экономики подразделяется на три подсистемы или сектора: нулевой (материальный) сектор производит предметы труда; первый (фондосоздающий) — средства труда; второй (потребительский) — предметы потребления.

Трехсекторная модель экономики имеет динамический характер. Для ее описания используются следующие основные характеристики, представляющие собой функции времени: Y_j — объем произведенной продукции в j-м секторе, $j = 0, 1, 2$; K_j — основные производственные фонды (капитал) в j-м секторе, $j = 0, 1, 2$; L_j — число занятых (объем трудовых ресурсов) в j-м секторе, $j = 0, 1, 2$; I_j — объем инвестиций в j-й сектор, $j = 0, 1, 2$.

Предполагаются заданными исходные числовые параметры: ν — доля прироста единицы объема трудовых ресурсов за единицу времени во всей экономической системе, $j = 0, 1, 2$; μ_j — доля выбывших за единицу времени основных производственных фондов в j-м секторе экономики, $j = 0, 1, 2$.

В настоящей работе использованы удельные характеристики, определяемые по отношению к единице объема трудовых ресурсов. Введем следующие обозначения:

— фондовооруженность j-го сектора экономики (удельный капитал), $k_j = \dfrac{K_j}{L_j}$, $j = 0, 1, 2$;

— удельные инвестиции в j-й сектор экономики, $i_j = \dfrac{I_j}{L_j}$, $j = 0, 1, 2$;

— удельный выпуск продукции j-го сектора экономики по отношению к единице объема трудовых ресурсов данного сектора или производительность труда в этом секторе, $y_j = \dfrac{Y_j}{L_j}$, $j = 0, 1, 2$;

— удельный выпуск продукции j-го сектора по отношению к единице объема трудовых ресурсов, занятых во всей экономической системе, $\hat{y}_j = \frac{Y_j}{L}$, $j = 0, 1, 2$;

— доля трудовых ресурсов j-го сектора в общем объеме трудовых ресурсов, занятых во всей экономической системе, $\theta_j = \dfrac{L_j}{L}$, $j = 0, 1, 2$.

Для описания эволюции рассматриваемой экономической системы в трехсекторной модели применяют соотношения, которые выполняются в любой фиксированный момент времени t из заданного множества значений временного параметра.

1. Производственная функция в каждом секторе представляет собой функцию Кобба – Дугласа [1, 9, 10]:

$$Y_j(t) = F_j(K_j(t), L_j(t)) = A_j K_j^{\alpha_j}(t) L_j^{1-\alpha_j}(t),$$

где $0 < A_j < \infty$, $0 < \alpha_j < 1$, $j = 0, 1, 2$ — заданные параметры.

2. Общее число занятых людей в производственной сфере и число занятых людей в j-м секторе экономики изменяется с постоянным темпом прироста на рассматриваемом интервале времени:

$$L(t) = L(0)e^{\nu t} = L_0 e^{\nu t}; \qquad L_j(t) = L_j(0)e^{\nu t} = L_{j,0}e^{\nu t}, \quad j = 0, 1, 2.$$

В настоящей работе принято, что $\nu > 0$. При $\nu = 0$ объем трудовых ресурсов постоянен, что не оправдано в реальных экономических системах.

3. Выполняются соотношения, называемые балансом инвестиций и балансом трудовых ресурсов:

$$Y_1 = I_0 + I_1 + I_2; \qquad L = L_0 + L_1 + L_2.$$

4. Заданы значения параметров модели в начальный момент времени $t = 0$:

$$K_j(0) = K_{j,0}; \qquad L_j(0) = L_{j,0}; \qquad I_j(0) = I_{j,0}, \quad j = 0, 1, 2,$$

отсюда имеем начальные значения для удельных параметров:

$$k_{j,0} = k_j(0) = \frac{K_j(0)}{L_j(0)} = \frac{K_{j,0}}{L_{j,0}}; \; i_{j,0} = i_j(0) = \frac{I_j(0)}{L_j(0)} = \frac{I_{j,0}}{L_{j,0}}, \; j = 0, 1, 2.$$

5. Динамика основных производственных фондов по секторам описывается дифференциальными соотношениями [1, 9, 10]:

$$\frac{dK_j(t)}{dt} = -\mu_j K_j(t) + I_j(t), \qquad j = 0, 1, 2.$$

Из соотношений для основных производственных фондов следуют соответствующие соотношения для фондовооруженностей:

$$\dot{k}_j(t) = -(\nu + \mu_j)k_j(t) + i_j, \qquad j = 0, 1, 2. \tag{1}$$

Далее обозначим $\nu + \mu_j = \lambda_j$, $j = 0, 1, 2$. Параметр λ_j представляет собой коэффициент выбывания удельного капитала $k_j(t)$, связанного с выбыванием основных фондов и приростом трудовых ресурсов. Предполагается, что эти параметры известны.

6. Поскольку основная цель работы — изучение влияния удельных инвестиций в фондосоздающий сектор экономики на показатели качества управления, введем дополнительное предположение о распределении инвестиций, не используемое в исходной модели [3]. Именно после определения объема инвестиций в фондосоздающий сектор распределим оставшиеся инвестиции между потребительским и материальным секторами в заданном отношении. С учетом соотношения баланса инвестиций запишем равенства

$$I_0(t) = \rho(Y_1(t) - I_1(t)); \qquad I_2(t) = (1-\rho)(Y_1(t) - I_1(t)),$$

где ρ — заданный фиксированный параметр, $\rho \in [0, 1]$.

Постановка задачи оптимального управления. Перейдем к математической постановке задачи оптимального управления на заданном интервале времени $[0, T]$. Сформулируем задачу оптимального управления в стандартной форме, следуя схеме, используемой в фундаментальных трудах по теории оптимального управления [5, 7].

Определим функции, характеризующие состояния и управления в заданной системе. В качестве состояний системы рассмотрим значения функций фондовооруженности (удельного капитала) в каждом секторе $k(t) = (k_0(t), k_1(t), k_2(t))$. В качестве параметра управления примем некоторую величину, связанную с удельными инвестициями, в первый (фондосоздающий) сектор экономики:

$$u_1(t) = \frac{i_1(t)}{A_1 k_1^{\alpha_1}(t)}.$$

Будем называть величину $u_1(t)$ функцией управления. Установим экономическое содержание функции $u_1(t)$. Из условия баланса инвестиций, который выполняется в любой момент времени $t \in [0, T]$, следует оценка

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{I_1(t)}{L_1(t)} \le \frac{Y_1(t)}{L_1(t)} = y_1(t) = \\ &= \frac{F_1(K_1(t), L_1(t))}{L_1(t)} = \frac{A_1 K_1^{\alpha_1}(t) L_1^{1-\alpha_1}(t))}{L_1(t)} = A_1 k_1^{\alpha_1}(t), \quad t \in [0, T]. \qquad (2) \end{aligned}$$

Равенство в соотношении (2) достигается при $I_1 = Y_1$, т.е. при $I_0 = I_2 = 0$. Таким образом, величина $y_1(t) = A_1 k_1^{\alpha_1}(t)$ представляет собой максимально возможное значение удельных инвестиций в первом секторе. Следовательно, по экономическому содержанию функция $u_1(t)$ представляет собой долю удельных инвестиций в первый (фондосоздающий) сектор от максимально возможного объема таких удельных инвестиций, который совпадает с удельным произведенным продуктом данного сектора $y_1(t)$.

Выбор параметра управления, связанного с удельными инвестициями в первый сектор, обосновывается тем, что объем производства фондосоздающего сектора определяет общий объем инвестиций в системе. Ввиду этого инвестиции в фондосоздающий сектор играют решающую роль в схеме инвестирования в рассматриваемой модели трехсекторной экономики.

Следовательно, вводятся трехмерный параметр $k(t) = (k_0(t), k_1(t), k_2(t))$, характеризующий состояние системы, и одномерный параметр $u_1(t)$, описывающий управление. Перейдем к последовательному описанию основных частей задачи оптимального управления: целевого функционала и различных видов ограничений.

1. Введем целевой функционал

$$I(k_0(\cdot), k_1(\cdot), k_2(\cdot); u_1(\cdot)) =$$
$$= \int_0^T e^{-\delta t} \hat{y}_2(t, k(t), u_1(t))\, dt + e^{-\delta T} \psi(k_0(T), k_1(T), k_2(T)).$$

Первое слагаемое в данном показателе или интегральная часть целевого функционала выражает суммарный (накопленный) объем потребительских благ по отношению к единице трудовых ресурсов всей экономической системы (или на одного занятого в экономике), произведенных за фиксированный период времени $[0, T]$. Сомножитель $e^{-\delta t}$ под знаком интеграла отражает принятую в теории формулу учета уменьшения со временем реального содержания потребительских благ в одной денежной единице экономической системы, или формулу учета инфляции. Такой сомножитель называется дисконтирующим [1, 9–11].

Второе слагаемое или терминальный член целевого функционала учитывает влияние на цель управления конечных значений параметров фондовооруженности (удельного капитала) $k_0(T), k_1(T), k_2(T)$, так как эти параметры выражают достигнутый в системе уровень технологического развития. При этом терминальная функция $\psi(k_0, k_1, k_2)$ предполагается явно заданной. Дисконтирующий множитель $e^{-\delta T}$ имеет указанное выше содержание.

Подставим явную формулу для функции $\hat{y}_2(t, k, u_1)$ в выражение для целевого функционала, тогда он примет вид

$$I(k_0(\cdot), k_1(\cdot), k_2(\cdot); u_1(\cdot)) =$$
$$= \int_0^T e^{-\delta t} A_2 \theta_2 k_2^{\alpha_2}(t)\, dt + e^{-\delta T} \psi(k_0(T), k_1(T), k_2(T)).$$

Отметим, что интегрант (подынтегральная функция) в этом функционале не зависит от аргументов t, k_0, k_1, u_1.

2. Определим ограничения на управления, допустимые в рассматриваемой задаче. С учетом соотношения (2) и неотрицательности удельных инвестиций получим двойное неравенство

$$0 \le u_1(t) = \frac{i_1(t)}{A_1 k_1^{\alpha_1}(t)} \le 1,\ t \in [0, T]. \tag{3}$$

Таким образом, множество допустимых управлений имеет вид $U = [0, 1] \subset R$.

Если принять $u_1 = 1$, то $i_1 = A_1 k_1^{\alpha_1}$, тогда

$$i_1 = \frac{I_1}{L_1} = A_1 k_1^{\alpha_1} = \frac{Y_1}{L_1},$$

отсюда $I_1 = Y_1$. В таком случае $I_0{=}\rho(Y_1{-}I_1){=}0$, $I_2{=}(1{-}\rho)(Y_1{-}I_1) = 0$. Следовательно, если функция управления $u_1(t)$ принимает одно из своих граничных значений 0 или 1, то либо инвестиции в первый (фондосоздающий) сектор, либо инвестиции в нулевой (материальный) и второй (потребительский) секторы являются нулевыми. При этом экономическое содержание условий $u_1(t) = 1$ и $u_1(t) = 0$ заключается в том, что в определенные промежутки времени инвестиционные ресурсы в данной системе полностью сосредоточиваются в фондосоздающем секторе или в материальном и потребительском секторах соответственно. В реальной экономике такая ситуация кажется неоправданной. Однако в формально поставленной задаче оптимального управления она допустима и может оказаться оптимальной. В связи с этим в настоящей работе рассмотрим ограничения на допустимые управления в виде (3).

3. Получим динамическое соотношение, описывающее изменение во времени параметров фондовооруженности (удельного капитала) $k_0(t)$, $k_1(t)$, $k_2(t)$. Такие соотношения в теории управления называются дифференциальной связью и характеризуют изменение состояний системы при заданном управлении [5, 7]. Основа для уравнений дифференциальной связи — динамические соотношения для функций фондовооруженностей в различных секторах (1).

Введем для удобства дополнительные обозначения $l_0^{(1)} = \dfrac{L_{1,0}}{L_{0,0}}$, $l_2^{(1)} = \dfrac{L_{1,0}}{L_{2,0}}$. При этом коэффициенты λ_j, $j = 0, 1, 2$; $l_0^{(1)}, l_2^{(1)}$ предполагаются известными. Тогда с помощью аналитических преобразований из (1) можно получить следующую систему:

$$\begin{aligned} \dot{k}_0 &= -\lambda_0 k_0 + l_0^{(1)} \rho A_1 k_1^{\alpha_1}(1-u_1); \\ \dot{k}_1 &= -\lambda_1 k_1 + A_1 k_1^{\alpha_1} u_1; \\ \dot{k}_2 &= -\lambda_2 k_2 + l_2^{(1)}(1-\rho) A_1 k_1^{\alpha_1}(1-u_1). \end{aligned} \tag{4}$$

Система соотношений (4) представляет собой систему дифференциальных уравнений первого порядка относительно функций $k_0(t)$, $k_1(t)$, $k_2(t)$, выполняющих в этой математической модели роль состояний. Полученные уравнения являются разрешенными относительно производных $\dot{k}_0, \dot{k}_1, \dot{k}_2$, и их правая часть зависит от параметра управления u_1. Известно, что при таких условиях система дифференциальных уравнений (4) образует дифференциальную связь в рассматриваемой задаче оптимального управления [5–7].

4. Как уже было отмечено, начальные значения для параметров, характеризующих состояние системы, предполагаются заданными. Таким образом, получена задача оптимального управления в канонической форме для трехсекторной модели экономики:

$$(T_1) \quad \int\limits_0^T e^{-\delta t} A_2 \theta_2 k_2^{\alpha_2}(t)\, dt + e^{-\delta T} \psi(k_0(T), k_1(T), k_2(T)) \longrightarrow \max$$

— целевой функционал смешанного типа с интегральной и терминальной частями;

$$(T_2) \qquad \begin{aligned} \dot{k}_0 &= -\lambda_0 k_0 + l_0^{(1)} \rho A_1 k_1^{\alpha_1}(1-u_1); \\ \dot{k}_1 &= -\lambda_1 k_1 + A_1 k_1^{\alpha_1} u_1; \\ \dot{k}_2 &= -\lambda_2 k_2 + l_2^{(1)}(1-\rho) A_1 k_1^{\alpha_1}(1-u_1) \end{aligned}$$

— дифференциальная связь;

$$(T_3) \;\; k_0(0) = k_{0,0}; \qquad k_1(0) = k_{1,0}; \qquad k_2(0) = k_{2,0}$$

— начальные условия на основные параметры (состояния системы);

$$(T_4) \;\; 0 \le u_1(t) = \frac{i_1(t)}{A_1 k_1^{\alpha_1}(t)} \le 1 \;, 0 \le t \le T$$

— ограничения на допустимое управление.

Дополнительно обозначим $B_2 = A_2\theta_2$. Постоянная величина B_2 является известной. Тогда интегральная часть целевого функционала имеет вид $\int\limits_0^T B_2 e^{-\delta t} k_2^{\alpha_2}(t) dt$.

Поставленная задача оптимального управления $(T_1), (T_2), (T_3), (T_4)$ по форме представляет собой классическую задачу с фиксированным интервалом времени, закрепленным левым и свободным правым концами траектории. Для этой задачи, как и для других, более общих, задач известно теоретическое утверждение о необходимых условиях экстремума, называемое принципом максимума Понтрягина [9, 10].

Далее поставленная задача оптимального управления будет исследована с помощью принципа максимума Понтрягина. Отметим, что для такого исследования полезно использовать работы [9, 10], в которых подробно рассмотрены различные аспекты применения принципа максимума Понтрягина для решения задач оптимального управления динамическими экономическими системами. Близкие по форме экономико-математические задачи представлены в работах [11–13].

Необходимые условия экстремума в задаче оптимального управления в форме принципа максимума. Используем так называемую гамильтонову форму принципа максимума [5–7]. Введем основную вспомогательную функцию, называемую функцией Понтрягина [5–7], или гамильтонианом [8]. Будем основываться на теоретическом представлении функции Понтрягина в задаче оптимального управления [5, 7]. Учитывая, что в рассматриваемой классической задаче оптимального управления $(T_1), (T_2), (T_3), (T_4)$ множитель Лагранжа, соответствующий целевому функционалу, можно принять равным единице [7], запишем аналитическое выражение для этой функции:

$$H(t, k_0, k_1, k_2, u_1, p_0, p_1, p_2) = -[\lambda_0 k_0 p_0 + \lambda_1 k_1 p_1 + \lambda_2 k_2 p_2] + B_2 e^{-\delta t} k_2^{\alpha_2} + \\ + A_1 k_1^{\alpha_1} [l_0^{(1)} \rho p_0 + l_0^{(2)} (1-\rho) p_2] + A_1 k_1^{\alpha_1} [-l_0^{(1)} \rho p_0 + p_1 - l_0^{(2)} (1-\rho) p_2] u_1. \tag{5}$$

Исходя из общей формы сопряженного уравнения в задаче оптимального управления [5–7], получаем следующую систему дифференциальных уравнений относительно сопряженных переменных $p_0(t), p_1(t), p_2(t)$:

$$\begin{aligned} &\dot{p}_0(t) = \lambda_0 p_0(t); \\ &\dot{p}_1(t) = \lambda_1 p_1(t) - A_1 \alpha_1 k_1^{\alpha_1 - 1}(t) \Big[l_0^{(1)} \rho p_0(t) + l_2^{(1)} (1-\rho) p_2(t) \Big] \times \\ &\qquad\qquad \times (1 - u_1(t)) - A_1 \alpha_1 k_1^{\alpha_1 - 1}(t) u_1(t); \\ &\dot{p}_2(t) = \lambda_2 p_2(t) - B_2 e^{-\delta t} \alpha_2 k_2^{\alpha_2 - 1}(t). \end{aligned} \tag{6}$$

Следующей составной частью необходимых условий экстремума в форме принципа максимума являются условия трансверсальности. Теоретическая форма условия трансверсальности для рассматриваемой задачи с фиксированным интервалом времени и закрепленным левым концом траектории приведена в работах [6–8].

Запишем условие трансверсальности в точке $t = T$ (незакрепленный конец траектории) в координатной форме:

$$
\begin{aligned}
p_0(T) &= e^{-\delta T}\psi_{k_0^{(1)}}(k_0(T), k_1(T), k_2(T)) = \psi_0^{(0)}(T);\\
p_1(T) &= e^{-\delta T}\psi_{k_1^{(1)}}(k_0(T), k_1(T), k_2(T)) = \psi_1^{(0)}(T);\\
p_2(T) &= e^{-\delta T}\psi_{k_2^{(1)}}(k_0(T), k_1(T), k_2(T)) = \psi_2^{(0)}(T).
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Как уже было отмечено, функция $\psi(k_0^{(1)}, k_1^{(1)}, k_2^{(1)})$, определяющая терминальную часть целевого функционала, предполагается заданной аналитически. Символы $k_0^{(1)}, k_1^{(1)}, k_2^{(1)}$ обозначают аргументы этой функции. В выражении для целевого функционала эти аргументы принимают значения $k_i^{(1)} = k_i(T)$, $i = 0, 1, 2$. Частные производные функции $\psi(k_0^{(1)}, k_1^{(1)}, k_2^{(1)})$ по каждой переменной также предполагаются известными. Ввиду этого правая часть условия трансверсальности или, в координатной форме, системы равенств (7), представляет собой заданную векторную величину, которая для краткости обозначается как $(\psi_0^{(0)}(T), \psi_1^{(0)}(T), \psi_2^{(0)}(T))$.

Условия трансверсальности — граничные условия к системе сопряженных уравнений. Таким образом, объединяя (6) и (7), получаем задачу Коши относительно векторной функции $p(t)=(p_0(t), p_1(t), p_2(t))$.

Основное необходимое условие, входящее в принцип максимума, — условие максимума функции Понтрягина, которое в рассматриваемой задаче может быть сформулировано следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\max_{u_1} H(t, k_0, k_1, k_2;\, u_1, p_0, p_1, p_2) =\\
&\qquad = \max_{u_1}\Big[-[\lambda_0 k_0 p_0 + \lambda_1 k_1 p_1 + \lambda_2 k_2 p_2] + B_2 e^{-\delta t} k_2^{\alpha_2} +\\
&+ A_1 k_1^{\alpha_1}[l_0^{(1)}\rho p_0 + l_0^{(2)}(1-\rho)p_2] + A_1 k_1^{\alpha_1}[-l_0^{(1)}\rho p_0 + p_1 - l_0^{(2)}(1-\rho)p_2]u_1\Big] =\\
&\qquad\qquad = H(t, k_0, k_1, k_2; u_{1*}, p_0, p_1, p_2),
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где максимум функции Понтрягина по параметру u_1 определяется на множестве допустимых значений данного параметра управления (соотношение (3)):

$$
0 \le u_1(t) = \frac{i_1(t)}{A_1 k_1^{\alpha_1}(t)} \le 1.
$$

Указанное ограничение на управление должно выполняться при любом фиксированном значении временного параметра $t \in [0, T]$. Смысл условия (8) заключается в том, что функция Понтрягина достигает максимума при оптимальном значении параметра управления, т.е. при $u_1(t) = u_{1*}(t)$. Остальные величины, входящие в функцию Понтрягина (функции состояний $k_0(t), k_1(t), k_2(t)$ и сопряженные переменные

$p_0(t), p_1(t), p_2(t))$ предполагаются фиксированными. Отметим также, что условие максимума выполняется при всех значениях $t \in [0, T]$, кроме, быть может, точек разрыва функции оптимального управления $u_{1*}(t)$.

Для нахождения неизвестных параметров в задаче оптимального управления к соотношениям (6)–(8), представляющим собой необходимые условия экстремума, следует добавить ограничения исходной задачи, т.е. соотношения $(T_2), (T_3), (T_4)$.

С формальной точки зрения решение полученной полной системы соотношений является управляемым процессом $(k_0(t), k_1(t), k_2(t); u_1(t)), t \in [0, T]$, допустимым в исходной задаче оптимального управления и удовлетворяющим необходимым условиям экстремума в форме принципа максимума. В терминологии теории экстремальных задач такой объект называется допустимой экстремалью [7].

Анализ условия максимума и структуры оптимального управления. Начнем исследование указанной полной системы соотношений с анализа условия максимума функции Понтрягина. Определив структуру оптимального управления, можно разработать схему дальнейшего аналитического исследования.

Введем вспомогательную функцию, зависящую от сопряженных параметров,

$$Q(p_0, p_1, p_2) = -l_0^{(1)} \rho p_0(t) + p_1(t) - l_2^{(1)}(1-\rho) p_2(t).$$

С учетом этого функция Понтрягина примет вид

$$\begin{aligned} H(t; k_0, k_1, k_2; u_1; p_0, p_1, p_2) = \\ = A_1 k_1^{\alpha_1} Q(p_0, p_1, p_2) u_1 - [\lambda_0 k_0 p_0 + \lambda_1 k_1 p_1 + \lambda_2 k_2 p_2] + \\ + B_2 e^{-\delta t} k_2^{\alpha_2} + A_1 k_1^{\alpha_1} [l_0^{(1)} \rho p_0 + l_0^{(2)} (1-\rho) p_2]. \end{aligned}$$

Как уже было отмечено, аналитический смысл условия максимума заключается в том, что при любом фиксированном значении параметра времени $t \in [0, T]$, кроме, быть может, точек разрыва функции оптимального управления $u_{1*}(t)$, максимум функции Понтрягина по параметру управления u_1 на множестве допустимых значений этого параметра достигается при оптимальном значении $u_{1*}(t)$. В рассматриваемой задаче при любом фиксированном значении времени t и фиксированных значениях параметров $k_0(t), k_1(t), k_2(t)$, $p_0(t), p_1(t), p_2(t)$ функция Понтрягина линейно зависит от параметра u_1 на множестве значений $u_1 \in [0, 1]$ с коэффициентом $A_1 k_1^{\alpha_1} Q(p_0, p_1, p_2)$. Поскольку в изучаемой математической модели функция $y_1(t) = A_1 k_1^{\alpha_1}(t)$ по экономическому содержанию представляет собой производительность труда в фондосоздающем секторе экономики и принимает только положительные значения, знак коэффициента перед переменной величиной u_1 совпадает со знаком сомножителя $Q(p_0, p_1, p_2)$.

Согласно изложенному, структура функции оптимального управления $u_{1*}(t)$ зависит от значения вспомогательной функции $Q(p_0(t), p_1(t), p_2(t))$ в каждой точке $t \in [0, T]$ и может быть определена по формуле

$$u_{1*}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } Q(p_0(t), p_1(t), p_2(t)) > 0; \\ u_1^{(0)}(t), & \text{если } Q(p_0(t), p_1(t), p_2(t)) = 0; \\ 0, & \text{если } Q(p_0(t), p_1(t), p_2(t)) < 0. \end{cases} \quad (9)$$

В соотношении (9) величина $u_1^{(0)}(t)$, которая может быть постоянной или зависеть от времени, обозначает так называемое особое управление, возникающее при условии $Q(p_0(t), p_1(t), p_2(t)) = 0$, и функция Понтрягина не зависит явно от параметра управления u_1. Особое управление не определяется из условий максимума функции Понтрягина, его требуется находить специальным способом в каждой отдельной задаче.

Основываясь на структуре оптимального управления (9), введем важное понятие “переключение управления”. Будем называть точку $\tau \in [0, T]$ точкой переключения управления, если в этой точке функция $u_{1*}(t)$ изменяет свое аналитическое выражение, переходя от одной из трех форм представления, определенных соотношением (9), к другой. Другими словами, по аналитическим признакам точка переключения может представлять собой объект одного из двух видов.

1. Изолированная точка, в которой функция $Q(t) = Q(p_0(t), p_1(t), p_2(t))$ изменяет знак. При этом $\exists \delta > 0$ такое, что $Q(\tau) = 0$, $Q(t) \neq 0$, $\tau - \delta < t < \tau$, $\tau < t < \tau + \delta$.

2. Начальная или конечная точка некоторого интервала времени, на котором функция $Q(t)$ принимает нулевое значение.

Основываясь на введенном понятии “точка переключения”, можно утверждать, что в этой точке функция управления изменяет аналитический характер или происходит переход на другой режим управления.

Далее назовем функцию $Q(t) = Q(p_0(t), p_1(t), p_2(t))$, определяющую переключения управления, функцией переключений в рассматриваемой задаче оптимального управления.

Определение общей аналитической формы структуры функции, аналитически выражающей оптимальное управление (9), представляет собой принципиальное продвижение в ходе решения исходной задачи оптимального управления $(T_1)(T_4)$. Однако даже при наличии этого продвижения задача остается весьма трудной. Основная трудность заключается в том, что функция переключений $Q(p_0(t), p_1(t), p_2(t))$ выражается через сопряженные переменные, которые, в свою очередь, зависят от функции управления как непосредственно, так и через переменные состояний $k_1(t), k_2(t)$, входящие в систему сопряженных уравнений (6). В связи с этим охарактеризовать поведение функции переключений весьма сложно. В настоящем исследовании ограничимся вариантом, в котором функция переключений конечное число раз меняет знак на заданном конечном интервале времени $[0, T]$. Таким образом, предполагается, что все точки переключения управления принадлежат к первому виду и их число конечно. По отношению к структуре функции оптимального управления $u_{1*}(t)$ это означает следующее: функция оптимального управления кусочно-постоянна и принимает два возможных значения (0 и 1), которые последовательно сменяют друг друга в точках переключения. Известно, что в ряде классических задач теории управления функция оптимального управления обладает именно такими особенностями [2, 6, 7, 9, 10].

Замечание. Первая часть исследований поставленной задачи оптимального управления инвестициями в закрытой динамической модели трехсекторной экономики завершена. Далее будет выполнено аналитическое исследование поставленной задачи при указанных выше предположениях для функции переключений и тем самым функции оптимального управления. С учетом этих предположений будут найдены явные аналитические представления для основных и сопряженных переменных $k_0(t), k_1(t), k_2(t)$; $p_0(t), p_1(t), p_2(t)$, а также разработан численный метод определения функции оптимального управления, основанный на приведенных аналитических представлениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Arrow K.J.*, *Intriligator M.D.* Handbook of Mathematical Economics. Vol. 3. Amsterdam – N.Y.: North-Holland Publishing Co., 1986.
2. *Беленький В.З.* Оптимизационные модели экономической динамики. Понятийный аппарат. Одномерные модели. М.: Наука, 2007. 259 с.
3. *Колемаев В.А.* Математическая экономика. М.: Юнити-Дана, 2002. 399 с.
4. *Колемаев В.А.* Оптимальный сбалансированный рост открытой трехсекторной экономики // Прикладная эконометрика. 2008. Вып. 3. С. 14–42.
5. *Алексеев В.М.*, *Тихомиров В.М.*, *Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2007. 408 с.
6. *Арутюнов А.А.*, *Магарил-Ильяев Г.Г.*, *Тихомиров В.М.* Принцип максимума Понтрягина. М.: Факториал Пресс, 2006. 144 с.
7. *Иоффе А.Д.*, *Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 481 с.
8. *Ванько В.И.*, *Ермошина О.В.*, *Кувыркин Г.Н.* Вариационное исчисление и оптимальное управление. Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 488 с.

9. *Leonard D.*, *Long N.* Optimal control theory and static optimization in economics // Cambrige Univ. Press. 1992. 353 с.
10. *Sethi S.P.*, *Thompson G.L.* Optimal control theory: applications to management science and economics. Springer, 2000. 504 с.
11. *Беленький В.З.* Теорема о стационарном решении обобщенной модели Рамсея – Касса – Купманса. Анализ и моделирование экономических процессов. Вып. 1. М.: ЦЭМИ РАН, 2004.
12. *Матвеенко В.Д.* Структура оптимальных траекторий в моделях экономической динамики. Дис. . . . д-ра наук. М.: ЦЭМИ РАН, 2004. 261 с.
13. *Koopmans T.C.* On the concept of optimal economic growth // Ex Aedibus Academicis in Civitate Vaticana. 1965. No. 28. P. 225–300.

REFERENCES

[1] Arrow K.J., Intriligator M.D., eds. Handbook of Mathematical Economics. Vol. 3. Amsterdam – New York, North-Holland Publishing Co., 1986.

[2] Belen'kiy V.Z. Optimizatsionnye modeli ekonomicheskoy dinamiki. Ponyatiynyy apparat. Odnomernye modeli [Optimization models of economic dynamics. Conceptual apparatus. One-dimensional models]. Moscow, Nauka Publ., 2007. 259 p.

[3] Kolemaev V.A. Matematicheskaya ekonomika [Mathematical economy]. Moscow, Yuniti-Dana Publ., 2002. 399 p.

[4] Kolemaev V.A. Optimal balanced growth of open three-sector economy. *Prikladnaya ekonometrika* [Applied econometrics], 2008, iss. 3, pp. 14–42 (in Russ.).

[5] Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. Optimal'noe upravlenie [Optimal control]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007. 408 p.

[6] Arutyunov A.A., Magaril-Il'yaev G.G., Tikhomirov V.M. Printsip maksimuma Pontryagina [Pontriagin's maximum principle]. Moscow, Faktorial Press Publ., 2006. 144 p.

[7] Ioffe A.D., Tikhomirov V.M. Teoriya ekstremal'nykh zadach [Extremal problems theory]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 481 p.

[8] Van'ko V.I., Ermoshina O.V., Kuvyrkin G.N., Zarubin B.C., Krishchenko A.P., eds. Variatsionnoe ischislenie i optimal'noe upravlenie [Variational calculus. Optimum control]. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2006. 488 p.

[9] Leonard D., Long N. Optimal control theory and static optimization in economics. Cambrige Univ. Press, 1992. 353 p.

[10] Sethi S.P., Thompson G.L. Optimal control theory: applications to management science and economics. Second Ed. New York, Springer, 2000. 504 p.

[11] Belen'kiy V.Z. A theorem on the stationary solution of the generalized Ramsey – Cass – Koopmans model. Analysis and simulation of economic processes. *Sb. statey "Analiz i modelirovanie ekonomicheskikh protsessov"* [Coll. Pap. "Analysis and simulation of economic processes"]. Moscow, TsEMI RAN Publ., 2004, iss. 1 (in Russ.).

[12] Matveenko V.D. Struktura optimal'nykh traektoriy v modelyakh ekonomicheskoy dinamiki. Diss. Dokt. Econ. Nauk [The structure of optimal trajectories in models of economic dynamics. Dr. econ. sci. diss.]. Moscow, TsEMI RAN Publ., 2004. 261 p.

[13] Koopmans T.C. On the concept of optimal economic growth. *Ex Aedibus Academicis in Civitate Vaticana*, 1965, no. 28, pp. 225–300.

Статья поступила в редакцию 29.11.2012

Петр Викторович Шнурков — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики МИЭМ НИУ ВШЭ. Автор более 30 научных работ в области теории управления полумарковскими случайными процессами, прикладной теории вероятностей (теория оптимального управления запасами, управление в системах массового обслуживания, оптимальное обслуживание технических систем), математической теории оптимального управления (детерминированные модели).
МИЭМ НИУ ВШЭ, Российская Федерация, 109028, Москва, Б. Трехсвятительский пер., д. 3.

P.V. Shnurkov — Cand. Sci. (Phys.–Math.), assoc. professor of “Higher Mathematics” department of the Moscow State Institute of Electronics and Mathematics of the “Higher School of Economics” National Research University. Author of more than 30 publications in the field of theory of control of semi-Markov random processes, applied theory of probability (theory of optimal inventory control, control in queuing systems, optimal service of technical systems), mathematical theory of optimal control (deterministic models).
Moscow State Institute of Electronics and Mathematics of the “Higher School of Economics” National Research University, Bol’shoi Trekhsvyatitel’skii per., 3, Moscow, 109028 Russian Federation.

Вероника Владимировна Засыпко — аспирантка кафедры высшей математики МИЭМ НИУ ВШЭ. Автор семи научных работ в области оптимального управления инвестициями в закрытой динамической модели трехсекторной экономики.
МИЭМ НИУ ВШЭ, Российская Федерация, 109028, Москва, Б. Трехсвятительский пер., д. 3.

V.V. Zasypko — post-graduate of “Higher Mathematics” department of the Moscow State Institute of Electronics and Mathematics of the “Higher School of Economics” National Research University. Author of seven publications in the field of optimal control of investments in the closed-form dynamic model of three-sector economy.
Moscow State Institute of Electronics and Mathematics of the “Higher School of Economics” National Research University, Bol’shoi Trekhsvyatitel’skii per., 3, Moscow, 109028 Russian Federation.