УДК 517.926

О. А. Мудракова
(Военный университет радиационной, химической
и биологической защиты)

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЯХ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Построена экспоненциальная характеристика обыкновенного линейного дифференциального уравнения n-го порядка. Показано, каким наименее жестким ограничениям экспоненциальной оценки должно быть подчинено входное воздействие, чтобы решение имело экспоненциальный рост с некоторым заданным (в том числе, отрицательным) показателем.

Во многих практических задачах механики, теории автоматического регулирования, биологии, теории связи необходимо рассмотрение экспоненциально возрастающих процессов, поэтому естественно возникает вопрос об оценке порядка экспоненциального роста решений.

М.А. Рутман в 1956 г. впервые ввел понятие, характеризующее зависимость минимального показателя роста решений уравнения от показателя экспоненциального роста правой части [1]. Это понятие получило название экспоненциальной характеристики уравнения [2, 3].

Пусть $f(t)$ — вещественная или комплексная непрерывная функция экспоненциального типа, заданная на полуоси $0 \leq t < \infty$. Это функция, для которой существуют A, $0 < A < \infty$, и $\alpha \in R$ такие, что $|f(t)| \leq Ae^{\alpha t}$.

Показателем экспоненциального роста этой функции называется вещественное число

$$\alpha = \overline{\lim_{t\to\infty}}(t^{-1} \ln |f(t)|).$$

Множество функций, показатель которых не превосходит α, обозначим

$$E_\alpha = \left\{ f(t)\colon \overline{\lim_{t\to\infty}} t^{-1} \ln |f(t)| \leq \alpha \right\}.$$

Это линейное пространство (ненормируемое).

Рассмотрим множество функций из E_α, удовлетворяющих условию

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} |f(t)| e^{-\alpha t} < \infty.$$

Это множество обозначим B_α. Легко видеть, что B_α — банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{B_\alpha} = \sup_{0 \le t < \infty} |f(t)| e^{-\alpha t}.$$

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор

$$L(y) = y^{(n)} + P_1(t) y^{(n-1)} + \ldots + P_n(t) y, \quad 0 \leqslant t < \infty,$$

с непрерывными коэффициентами, ограниченными на полуоси:

$$|P_j(t)| \le M, \quad j = \overline{1, n}. \tag{1}$$

Известно [4], что в этом случае все решения уравнения

$$L(y) = 0 \tag{2}$$

имеют конечные показатели экспоненциального роста*. Более того, для уравнения

$$L(y) = f(t), \tag{3}$$

правая часть которого экспоненциального типа, все решения также являются функциями экспоненциального типа.

Пусть $y_1(t),\ y_2(t), \ldots, y_n(t)$ — базис уравнения (2), $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — соответствующие показатели экспоненциального роста. Число α_0 — наибольшее из чисел $\alpha_j,\ j = \overline{1, n}$, — называется старшим (ляпуновским) показателем оператора $L(y)$ и уравнения (2) [5].

Рассмотрим неоднородное уравнение (3). Для упрощения предположим, что оно имеет нулевые начальные условия, т.е. рассматривается начальная задача

$$\begin{aligned} &L(y) = f(t), \\ &y(0) = y'(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Легко видеть, что если $f(t)$ пробегает E_α, то соответствующая совокупность решений $y(t)$ задачи (4) покрывается пространством E_β при достаточно большом β. Обозначим $\kappa(\alpha)$ точную нижнюю грань тех β, при которых пространство E_β содержит все решения начальной задачи (4).

Неубывающую функцию $\kappa(\alpha)$ назовем экспоненциальной характеристикой этой задачи.

*Предполагается, что для этого уравнения и для соответствующего неоднородного уравнения имеет место теорема существования и единственности.

В настоящей работе определяется вид экспоненциальной характеристики $\varkappa(\alpha)$ уравнения (3) с ограниченными коэффициентами (1) и нулевыми начальными условиями, т.е. начальной задачи (4).

В работе [6] рассмотрен случай, когда коэффициенты $P_j(t)$ уравнения (3) являются периодическими функциями:

$$P_j(t+\omega) = P_j(t), \quad j = \overline{1,n}.$$

Показано, что если α_0 — старший ляпуновский показатель уравнения (2), то

$$\varkappa(\alpha) = \max(\alpha, \alpha_0),$$

т.е. экспоненциальная характеристика имеет так называемый канонический вид.

В работе [6] также приведен пример (уравнение первого порядка), показывающий, что при отказе от периодичности экспоненциальная характеристика может иметь более сложную форму.

Настоящую работу можно рассматривать как продолжение работы [6]. Основным результатом является следующая

Теорема. *Для задачи* (4) *при условиях* (1) *существуют* α_0, β_0, γ_0, $-\infty < \alpha_0 \leqslant \beta_0 \leqslant \gamma_0 < +\infty$, *такие, что* $\varkappa(\alpha) = \beta_0$ *при* $\alpha \leqslant \alpha_0$ *и* $\varkappa(\alpha) = \alpha$ *при* $\alpha \geqslant \gamma_0$ ($\varkappa(\alpha)$ *в промежутке* (α_0, γ_0) *является неубывающей функцией*).

Доказательству основного результата предпошлем следующие замечания.

1. Решение задачи (4) задается интегральным оператором

$$y(t) = \int\limits_0^t K(t,s) f(s) ds, \tag{5}$$

где

$$K(t,s) = c_1(s)y_1(t) + c_2(s)y_2(t) + \ldots + c_n(s)y_n(t) =$$

$$= \frac{1}{W(s)} \begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) & \ldots & y_n(s) \\ y_1'(s) & y_2'(s) & \ldots & y_n'(s) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-2)}(s) & y_2^{(n-2)}(s) & \ldots & y_n^{(n-2)}(s) \\ y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_n(t) \end{vmatrix}, \tag{6}$$

— функция Коши, $y_1(t)$, $y_2(t), \ldots,$ $y_n(t)$ — базис однородного уравнения (2), $W(s) = \left|y_i^{(k-1)}(s)\right|_1^n$ — соответствующий вронскиан. Отсюда получим

$$\frac{\partial K(t,s)}{\partial s} = c_1'(s)y_1(t) + c_2'(s)y_2(t) + \ldots + c_n'(s)y_n(t). \qquad (7)$$

2. Далее будет использоваться следующая

Лемма. *Пусть $\varphi(t)$, $0 \leqslant t < \infty$, — n раз непрерывно дифференцируемая функция. Если при всех t выполняется неравенство*

$$\left|\varphi^{(n)}(t)\right| \leqslant C\left(|\varphi(t)| + |\varphi'(t)| + \ldots + \left|\varphi^{(n-1)}(t)\right|\right), \qquad (8)$$

то $\varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)$ (следовательно, и $\varphi^{(n)}(t)$) — функции экспоненциального типа.

Доказательство леммы. Введем вектор-функцию $\bar{\varphi}(t)$ с координатами $\left(\varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)\right)$ и нормой

$$\|\overline{\varphi}(t)\| = |\varphi(t)| + |\varphi'(t)| + \ldots + \left|\varphi^{(n-1)}(t)\right|.$$

Имеем

$$\overline{\varphi'}(t) = \left(\varphi'(t), \varphi''(t), \ldots, \varphi^{(n)}(t)\right),$$

$$\begin{aligned}\left\|\overline{\varphi'}(t)\right\| = |\varphi'(t)| + |\varphi''(t)| + \ldots + \left|\varphi^{(n-1)}(t)\right| + \left|\varphi^{(n)}(t)\right| \leqslant \\ \leqslant (C+1)\left(|\varphi'(t)| + |\varphi''(t)| + \ldots + \left|\varphi^{(n-1)}(t)\right|\right) + \\ + C\,|\varphi(t)| \leqslant D\,\|\overline{\varphi}(t)\|, \quad D = C+1.\end{aligned}$$

Пусть φ_0 — положительное число, не меньше, чем $\|\bar{\varphi}(t_0)\|$. Тогда

$$\frac{\bar{\varphi}(t_0+h) - \bar{\varphi}(t_0)}{h} = \overline{\varphi'}(t_0) + \bar{\alpha}(h), \quad \|\bar{\alpha}(h)\| \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

Поэтому при $h > 0$ получим

$$\|\bar{\varphi}(t_0+h)\| \leqslant \varphi_0 + D\varphi_0 h + \|\bar{\alpha}(h)\|\,h.$$

Существует $\delta > 0$ такое, что при $h \leq \delta$ имеем $\|\bar{\alpha}(h)\| \leqslant D\varphi_0$. Следовательно,

$$\|\bar{\varphi}(t_0+h)\| = \|\bar{\varphi}(t)\| \leqslant \varphi_0(1+2Dh) \leqslant \varphi_0 e^{2Dh} = \varphi_0 e^{2D(t-t_0)} \qquad (9)$$

при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \delta$.

В частности, при $h = \delta$ имеем

$$\|\bar{\varphi}(t_0+\delta)\| \leqslant \varphi_0 e^{2D\delta}. \qquad (10)$$

Заменим теперь t_0 на $t_0 + \delta$ и повторим рассуждение.

Получим

$$\|\bar{\varphi}(t)\| \leqslant \varphi_1 e^{2D(t-t_0-\delta)},$$

где $\varphi_1 > 0$, $\varphi_1 \geqslant \|\bar{\varphi}(t_0 + \delta)\|$.

В силу неравенства (10) можно положить $\varphi_1 = \varphi_0 e^{2D\delta}$. Тогда

$$\|\bar{\varphi}(t)\| \leqslant \varphi_0 e^{2D\delta} e^{2D(t-t_0-\delta)} = \varphi_0 e^{2D(t-t_0)}$$

при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \delta + \delta'$.

Итак, неравенство вида (9) остается справедливым в расширяющейся серии промежутков $[t_0, t_0 + \delta]$, $[t_0, t_0 + \delta + \delta']$, $[t_0, t_0 + \delta + \delta' + +\delta'']$, ... Отсюда следует, что оно верно при всех $t > t_0$. В самом деле, пусть $[t_0, t_0 + \Delta]$ — "максимальный" промежуток, на котором справедливо неравенство (9) (такой существует, поскольку неравенство (9) нестрогое и входящие в него функции непрерывны). Выбирая $t_0 + \Delta$ в качестве начальной точки и повторяя рассуждение, приходим к выводу, что неравенство (9) справедливо в промежутке более широком, чем $[t_0, t_0 + \Delta]$.

Лемма доказана.

Следствие 1. Всякое решение $y(t)$ однородного уравнения $L(y) = 0$ с ограниченными коэффициентами, а также его производные $y'(t)$, $y''(t)$, $\ldots$, $y^{(n)}(t)$ — функции экспоненциального типа, так как для всякого такого решения выполняется неравенство (8).

Следствие 2. В формулах (6) и (7) для $K(t,s)$ и $\partial K(t,s)/\partial s$ все коэффициенты $c_j(s)$ и $c'_j(s)$ — функции экспоненциального типа, так как

$$W(s) = W(0) \exp\left(-\int\limits_0^s p_1(\sigma) d\sigma\right),$$

$$(W(s))^{-1} = (W(0))^{-1} \exp\left(\int\limits_0^s p_1(\sigma) d\sigma\right)$$

и $|p_j(s)| \leqslant M$.

Следствие 3. Для $K(t,s)$ и всех частных производных $\partial^j K\,(t,s)/\partial t^j$, $j = \overline{1,n}$, выполняется

$$\left|\frac{\partial^j K\,(t,s)}{\partial t^j}\right| \leqslant D e^{\Delta(t-s)}, \quad j = \overline{0,n} \tag{11}$$

(D, Δ достаточно велики). Это следует из того, что при фиксированном s имеем

$$L\,(K) = 0, \quad K(s,s) = \begin{cases} 0 \text{ при } n > 1, \\ 1 \text{ при } n = 1. \end{cases}$$

Далее применим лемму (следствие 1), выбрав в качестве начальной точки $t_0 = s_0$.

3. Определим число γ_0 как показатель экспоненциального роста $K(t, s)$ по обеим переменным. Рассмотрим точную нижнюю грань γ_0 тех γ, при которых

$$\sup_{0 \leqslant s \leqslant t < \infty} \frac{|K(t, s)|}{e^{\gamma(t-s)}} < \infty.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$|K(t, s)| \leqslant A_\varepsilon e^{(\gamma_0 + \varepsilon)(t-s)}, \tag{12}$$

и существуют $M_n \to \infty$, t_n, s_n, $t_n - s_n \to \infty$, такие, что

$$|K(t_n, s_n)| = M_n e^{(\gamma - \varepsilon)(t_n - s_n)} \quad \forall \varepsilon > 0.$$

В соответствии с работой [5] γ_0 — генеральный показатель уравнения (2).

Определим далее число β_0 как показатель экспоненциального роста по t функции двух переменных $K(t, s)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$|K(t, s)| \leqslant B_{\varepsilon, s} e^{(\beta_0 + \varepsilon)(t-s)}$$

и при некотором s_0

$$\begin{gathered} \|K(t_n, s_0)\| \leqslant M_n e^{(\beta_0 - \varepsilon)(t_n - s_0)}, \\ M_n \to \infty, \quad t_n \to \infty. \end{gathered} \tag{13}$$

В работе [5] доказано, что показатель по t функции Коши равен старшему ляпуновскому показателю уравнения (2).

Старший и генеральный показатели связаны соотношением $\beta_0 \leqslant \gamma_0$.

Доказательство теоремы. Покажем, что

а) $\varkappa(\alpha) \leqslant \max(\gamma_0, \alpha)$ при всех α,

б) $\varkappa(\alpha) \geqslant \alpha$ при всех α,

в) $\varkappa(\alpha) \geqslant \beta_0$ при всех α,

г) существует $\alpha_0 > -\infty$ такое, что $\varkappa(\alpha) \leqslant \beta_0$ при $\alpha \leqslant \alpha_0$.

Докажем пункт а). Пусть $f(t) \in E_\alpha$, $|f(t)| \leqslant C_\varepsilon e^{(\alpha + \varepsilon)t}$. Учитывая неравенство (12), имеем

$$|y(t)| = \left| \int_0^t K(t, s) f(s) ds \right| \leqslant A_\varepsilon C_\varepsilon \int_0^t e^{(\gamma_0 + \varepsilon)(t-s)} e^{(\alpha + \varepsilon)s} ds =$$

$$= \frac{A_\varepsilon C_\varepsilon}{\alpha - \gamma_0} \left(e^{(\alpha + \varepsilon)t} - e^{(\gamma_0 + \varepsilon)t} \right) = \begin{cases} C'_\varepsilon e^{(\alpha + \varepsilon)t} & \text{при } \alpha > \gamma_0, \\ C''_\varepsilon e^{(\gamma_0 + \varepsilon)t} & \text{при } \alpha < \gamma_0. \end{cases}$$

Отсюда сразу следует, что $y(t) \in E_{\max(\gamma_0,\alpha)}$ (в случае, когда $\alpha = \gamma_0$, затруднений не возникает), т.е. $\kappa(\alpha) \leqslant \max(\gamma_0, \alpha)$ при всех α.

Докажем пункт б). Поскольку

$$K(s,s) = \frac{\partial K(s,s)}{\partial t} = \ldots = \frac{\partial^{n-2} K(s,s)}{\partial t^{n-2}} = 0, \quad \frac{\partial^{n-1} K(s,s)}{\partial t^{n-1}} = 1,$$

то

$$K(t,s) = \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} + \int\limits_s^t \frac{(\tau - s)^{n-1}}{(n-1)\,!} \frac{\partial^n K(\tau, s)}{\partial t^n} d\tau.$$

Учитывая неравенство (11), получим

$$\left| K(t,s) - \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \right| \leqslant D e^{\Delta(t-s)} \frac{(t-s)^n}{n!}, \quad \Delta \geq 0. \qquad (14)$$

Зададим теперь произвольно $\delta > 0$ и $t_m \to \infty$ и рассмотрим последовательность правых частей

$$f_m(t) = \begin{cases} e^{\alpha t} \ \text{ при } \ t_m - \delta \leqslant t \leqslant t_m, \\ 0 \ \text{ при } \ t \overline{\in} [t_m - \delta, \ t_m]. \end{cases}$$

Очевидно, $f_m(t) \in B_\alpha$, $\|f(t)\|_{B_\alpha} = 1$ (разрывность $f_m(t)$ несущественна).

Для соответствующей последовательности решений имеем

$$y_m(t_m) = \int\limits_0^{t_m} K(t_m, s) f_m(s) ds = \int\limits_{t_m - \delta}^{t_m} K(t_m, s) e^{\alpha s} ds.$$

Используя неравенство (14), получим

$$\left| y_m(t_m) - e^{\alpha(t_m - \theta_m \delta)} \frac{\delta^n}{n!} \right| \leqslant D e^{\alpha t_m} e^{(\Delta - \alpha)\theta'_m \delta} \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)\,!}, \quad 0 \leqslant \theta_m, \theta'_m \leqslant 1,$$

откуда следует

$$\frac{|y_m(t_m)|}{e^{\alpha t_m}} \geqslant \frac{\delta^n}{n!} \left(e^{-\alpha \theta_m \delta} - D e^{(\Delta - \alpha)\theta'_m \delta} \frac{\delta}{n} \right) \geqslant \frac{1}{2} \frac{\delta^n}{n!},$$

если δ достаточно мало.

Пусть теперь $\kappa(\alpha) < \alpha$ при некотором α. Выберем α_1, $\kappa(\alpha) < \alpha_1 < < \alpha$. Имеют место включения

$$B_{\kappa(\alpha)} \subset E_{\kappa(\alpha)} \subset B_{\alpha_1}.$$

Если $f(t)$ пробегает B_α, то $y(t)$ включается в $E_{\kappa(\alpha)}$, следовательно, и в B_{α_1}. Таким образом, оператор (5) действует следующим образом:

$$B_\alpha \xrightarrow{K(f)} B_{\alpha_1}.$$

Этот оператор замкнут и, следовательно, по теореме Банаха, ограничен:

$$\|y\|_{B_{\alpha_1}} \leqslant C\,\|f\|_{B_\alpha}.$$

С другой стороны, имеем

$$\frac{|y_m\,(t_m)|}{e^{\alpha_1 t_m}} \geqslant \frac{1}{2}\frac{\delta^n}{n!}e^{(\alpha-\alpha_1)t_m} \to \infty$$

и, следовательно, $\|y_m(t)\|_{B_{\alpha_1}} \to \infty$, в то время как $\|f_m(t)\|_{B_\alpha} = 1$.

Из пунктов а), б) следует, что $\kappa(\alpha) = \alpha$ при $\alpha \geqslant \gamma_0$.

Докажем пункт в). План доказательства — тот же, что и для пункта б).

Пусть $\beta_0, t_m \to \infty$, $M_m \to \infty$ (см. неравенство (13)). Используем равенство

$$K(t_m, s) = K(t_m, s_0) + \int\limits_{s_0}^{s} \frac{\partial K\,(t_m, \sigma)}{\partial s} d\sigma$$

и положим

$$f_m\,(t) = \begin{cases} e^{\alpha t} \ \text{ при } \ s_0 \leqslant t \leqslant s_0 + \delta_m, \\ 0 \ \text{ при } \ t \overline{\in} \, [s_0, \ s_0 + \delta_m]. \end{cases}$$

Последовательность δ_m такова, что $0 \leqslant \delta_m \leqslant 1$, $\delta_m \to 0$, а в остальном произвольна.

Имеем

$$y_m(t_m) = \int\limits_0^{t_m} K(t_m, s_0) f_m(s) ds + \int\limits_0^{t_m} \left(\int\limits_{s_0}^{s} \frac{\partial K(t_m, \sigma)}{\partial s} d\sigma \right) f_m(s) ds =$$

$$= K(t_m, s_0) \int\limits_{s_0}^{s_0+\delta_m} e^{\alpha s} ds + \int\limits_{s_0}^{s_0+\delta_m} \left(\int\limits_{s_0}^{s} \frac{\partial K(t_m, \sigma)}{\partial s} d\sigma \right) e^{\alpha s} ds,$$

откуда

$$|y_m(t_m)| \geqslant M_m e^{(\beta_0-\varepsilon)t_m} \delta_m e^{\alpha\left(s_0+\tilde{\delta}_m\right)} - \frac{\delta_m^2}{2} e^{\alpha\delta_m^*} \max\left|\frac{\partial K\,(t_m, \sigma)}{\partial s}\right|;$$

здесь

$$\tilde{\delta}_m = \begin{cases} 0 \ \text{ при } \ \alpha \geqslant 0, \\ \delta_m \ \text{ при } \ \alpha < 0, \end{cases}$$

$$\delta_m^* = \delta_m - \tilde{\delta}_m,$$

максимум берется в треугольной области $\{s_0 \leqslant \sigma \leqslant s; \;\; s_0 \leqslant s \leqslant \leqslant s_0 + \delta_m\}$, площадь которой равна $\delta_m^2/2$.

Оценим данный максимум. Для этого напомним, что частная производная $\partial K/\partial s$ в соответствии с формулой (7) оценивается следующим образом:

$$\left|\frac{\partial K(t_m, \sigma)}{\partial s}\right| \leqslant B_\varepsilon e^{(\beta_0+\varepsilon)t_m} e^{bs};$$

β_0 — старший показатель однородного уравнения; b — число, ограничивающее порядок роста $c_j'(s)$. Поэтому

$$\max\left|\frac{\partial K(t_m, \sigma)}{\partial s}\right| \leqslant B_\varepsilon e^{(\beta_0+\varepsilon)t_m} e^{b\tilde{s}},$$

где

$$\tilde{s} = \begin{cases} s_0 + \delta_m \;\text{ при }\; b \geqslant 0, \\ s_0 \;\text{ при }\; b < 0. \end{cases}$$

Таким образом, имеем

$$|y_m(t_m)| \geqslant M_m e^{(\beta_0-\varepsilon)t_m} \delta_m e^{\alpha\left(s_0+\tilde{\delta}_m\right)} - B_\varepsilon \frac{\delta_m^2}{2} e^{\alpha\delta_m^* + (\beta_0+\varepsilon)t_m + b\tilde{s}} =$$

$$= M_m e^{(\beta_0-\varepsilon)t_m} \delta_m \left(e^{\alpha\left(s_0+\tilde{\delta}_m\right)} - \frac{1}{2} B_\varepsilon \frac{\delta_m}{M_m} e^{\alpha\delta_m^* + 2\varepsilon t_m + b\tilde{s}}\right).$$

Положим $\delta_m = e^{-2\varepsilon t_m}$, $0 < \delta_m < 1$, $\delta_m \to 0$. Тогда

$$|y_m(t_m)| \geqslant M_m e^{(\beta_0-3\varepsilon)t_m} \left[e^{\alpha\left(s_0+\tilde{\delta}_m\right)} - \frac{B_\varepsilon}{2M_m} e^{\alpha\delta_m^* - b\tilde{s}}\right].$$

При $m \to \infty$ величина в квадратных скобках стремится к $e^{\alpha s_0}$. Поэтому

$$\frac{|y_m(t_m)|}{e^{(\beta_0-3\varepsilon)t_m}} \to \infty.$$

Пусть теперь $\kappa(\alpha) < \beta_0$ при некотором α. Выберем ε так, чтобы $\beta_0 - 3\varepsilon = \alpha_1 > \kappa(\alpha)$. Имеют место включения

$$B_{\kappa(\alpha)} \subset E_{\kappa(\alpha)} \subset B_{\alpha_1},$$

следовательно,

$$B_\alpha \xrightarrow{K(f)} B_{\alpha_1}, \quad \|y\|_{B_{\alpha_1}} \leqslant C\,\|f\|_{B_\alpha}.$$

Однако это невозможно, так как $\|f_m(t)\|_{B_\alpha} = 1$, $\|y_m(t)\|_{B_{\alpha_1}} \to \infty$. Пункт в) доказан.

Докажем пункт г). В соответствии с пунктом 2 имеем

$$|K(t,s)| \leqslant B_\varepsilon e^{(\beta_0+\varepsilon)t} e^{as},$$

где a — число, ограничивающее порядок роста $c_j(s)$; полагаем $a \geqslant 0$. Поэтому для $f(t)$ получим

$$|y(t)| = \left| \int\limits_0^t K(t,s) f(s) ds \right| \leqslant B_\varepsilon C_\varepsilon \int\limits_0^t e^{(\beta_0+\varepsilon)t} e^{as} e^{(\alpha+\varepsilon)s} ds =$$

$$= B_\varepsilon C_\varepsilon e^{(\beta_0+\varepsilon)t} \frac{e^{(a+\alpha+\varepsilon)t} - 1}{a+\alpha+\varepsilon}.$$

Если, например, $\alpha_0 = -2a, \alpha \leqslant \alpha_0$, то

$$|y(t)| \leqslant B_\varepsilon C_\varepsilon e^{(\beta_0+\varepsilon)t} \frac{1}{a-\varepsilon} \leqslant D_\varepsilon e^{(\beta_0+\varepsilon)t},$$

$y(t) \in E_{\beta_0}$, что и требовалось доказать.

Сопоставляя оценки экспоненциальной характеристики $\kappa(\alpha)$, полученные в пунктах а)–г): $\kappa(\alpha) \leqslant \max(\gamma_0, \alpha)$ при всех α, $\kappa(\alpha) \geqslant \alpha$ при всех α, $\kappa(\alpha) = \alpha$ при $\alpha \geqslant \gamma_0$, $\kappa(\alpha) \geqslant \beta_0$ при всех α, существует $\alpha_0 > -\infty$ такое, что $\kappa(\alpha) \leqslant \beta_0$ при $\alpha \leqslant \alpha_0$, — приходим к формулировке теоремы.

В заключение отметим, что для уравнения (3) с периодическими коэффициентами генеральный и старший показатели однородного уравнения совпадают, откуда сразу следует основной результат работы [6]; канонический вид экспоненциальной характеристики этого уравнения следующий:

$$\kappa(\alpha) = \max(\alpha, \alpha_0),$$

где $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0$ — старший ляпуновский показатель. Из этого следует, что при $\alpha > \alpha_0$ показатель экспоненциального роста $\kappa(\alpha)$ решений $y(t)$ начальной задачи (4) зависит от показателя роста правых частей $f(t)$, а при $\alpha \leqslant \alpha_0$ показатель роста $\kappa(\alpha)$ решений $y(t)$ не зависит от показателя роста правых частей, т.е. в случае $\alpha_0 > 0$ при очень быстро убывающих правых частях $f(t)$, стремящихся к нулю, решения $y(t)$ растут очень быстро. Этот случай можно назвать сильной неустойчивостью.

Пример. Рассмотрим неоднородное уравнение Перрона [5]

$$\frac{dy}{dt} = (\sin \ln t + \cos \ln t)\, y + f(t);$$

здесь $\beta_0 = 1$, $\gamma_0 = \sqrt{2}$, $\alpha_0 = -2$. Таким образом, $\kappa(\alpha) = 1$ при $\alpha \leqslant -2$; $\kappa(\alpha) = \alpha$ при $\alpha \geqslant \sqrt{2}$; $\kappa(\alpha)$ — неубывающая функция в промежутке $(-2; \sqrt{2})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рутман М. А. Об устойчивости некоторых систем линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами // Докл. АН СССР. – 1956. – Т. 108. – № 5. – С. 770.
2. Орлик Л. К. Об экспоненциальной характеристике линейного дифференциального уравнения 1-го порядка в банаховом пространстве // Укр. матем. журнал. – 1989. – Т. 41. – № 9. – С. 1288–1289.
3. Орлик Л. К. Об экспоненциальной характеристике интегрального оператора Вольтерра с периодическим ядром, зависящим от четырех переменных // Дифференциальные уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 10. – С. 1819–1821.
4. Ляпунов А. М. Общая задача устойчивости движения. – М.-Л.: ОИТИ, 1935. – 386 с.
5. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.
6. Орлик Л. К., Рутман М. А. Об экспоненциальных показателях решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Изв. вузов. Сер. Математика. – 1982. – № 6. – С. 80–81.
7. Рутман М. А. Об ограниченных решениях линейных дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений // Исследования по современным проблемам конструктивной теории функции. – М.: Физматгиз, 1961. – 294 с.

Статья поступила в редакцию 29.06.2004

Ольга Александровна Мудракова окончила в 1975 г. Ростовский государственный университет. Старший преподаватель Военной академии радиационной, химической и биологической защиты. Автор 9 научных работ в области дифференциальных уравнений.

O.A. Mudrakova graduated from the Rostov State University in 1975. Senior teacher of the Military Academy for Radiation Chemical and Biological Protection. Author of 9 publications in the field of differential equations.