УДК 519.21

А. В. Мастихин

# РЕШЕНИЕ СТАЦИОНАРНОГО ПЕРВОГО УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА ДЛЯ МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА ЭПИДЕМИИ, РАЗВИВАЮЩЕЙСЯ ПО СХЕМЕ $\mathbf{T_1+T_2\to T_1+T_3,\ T_1+T_3\to T_1,\ T_1\to 0}$

*Для трехмерного марковского процесса специального вида решено стационарное первое уравнение Колмогорова для переходных вероятностей. Получено интегральное представление для производящей функции финальных вероятностей. Найдены асимптотики для математического ожидания и дисперсии финального распределения и установлены предельные теоремы.*

**Определение марковского процесса.** На множестве состояний $N^3=\{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3=0,1,2,\dots\}$ рассматривается однородный по времени марковский процесс $\xi(t)=(\xi_1(t),\xi_2(t),\xi_3(t))$, $t\in[0,\infty)$, с переходными вероятностями $P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}(t)=\mathsf{P}\{\xi(t)=$ $=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\mid\xi(0)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\}$. Пусть при $\Delta t\to 0$ переходные вероятности имеют вид ($\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$, $\lambda_3>0$)

$$
\begin{aligned}
&P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\alpha_1,\alpha_2-1,\alpha_3+1)}(\Delta t)=\lambda_1\alpha_1\alpha_2\Delta t+o(\Delta t),\\
&P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3-1)}(\Delta t)=\lambda_2\alpha_1\alpha_3\Delta t+o(\Delta t),\\
&P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\alpha_1-1,\alpha_2,\alpha_3)}(\Delta t)=\lambda_3\alpha_1\Delta t+o(\Delta t),\\
&P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(\Delta t)=1-(\lambda_1\alpha_1\alpha_2+\lambda_2\alpha_1\alpha_3+\lambda_3\alpha_1)\Delta t+o(\Delta t).
\end{aligned}
$$

Определим производящие функции ($|s_1|\le 1, |s_2|\le 1, |s_3|\le 1$)

$$
F_\alpha(t;s_1,s_2,s_3)=\sum_{\beta_1,\beta_2,\beta_3=0}^{\infty}P^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}(t)s_1^{\beta_1}s_2^{\beta_2}s_3^{\beta_3}.
$$

Вторая (прямая) система дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей равносильна уравнениию в частных производных [2, 6]

$$
\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial t}=\lambda_1\bigl(s_1s_3-s_1s_2\bigr)\frac{\partial^2F_\alpha(t;s)}{\partial s_1\partial s_2}+
+\lambda_2\bigl(s_1-s_1s_3\bigr)\frac{\partial^2F_\alpha(t;s)}{\partial s_1\partial s_3}+\lambda_3\bigl(1-s_1\bigr)\frac{\partial F_\alpha(t;s)}{\partial s_1},\quad (1)
$$

с начальными условиями

$$
F_\alpha(0;s_1,s_2,s_3)=s_1^{\alpha_1}s_2^{\alpha_2}s_3^{\alpha_3}.
$$

Введем экспоненциальную (двойную) производящую функцию [4, 5]

$$\mathcal{F}(t; z_1, z_2, z_3; s_1, s_2, s_3) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3}}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!} F_\alpha(t; s_1, s_2, s_3).$$

Первая (обратная) система дифференциальных уравнений Колмогорова для переходных вероятностей процесса $\xi(t)$ приводится к виду

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = \lambda_1 z_1 z_2 \Big(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_1 \partial z_3} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_1 \partial z_2}\Big) + \lambda_2 z_1 z_3 \Big(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_1} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial z_1 \partial z_3}\Big) + \\ + \lambda_3 z_1 \Big(\mathcal{F} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_1}\Big), \quad \mathcal{F}(0, z_1, z_2, z_3; s_1, s_2, s_3) = e^{s_1 z_1 + s_2 z_2 + s_3 z_3}. \quad (2)$$

**Интерпретация процесса. Задача о финальных вероятностях.** Марковский процесс $\xi(t)$ может быть интерпретирован как модель эпидемии [1, 2, 6], а именно как модель распространения инфекции с двумя стадиями заболевания. Процессу соответствует схема взаимодействий [2, 6]:

$$T_1 + T_2 \to T_1 + T_3, \quad T_1 + T_3 \to T_1, \quad T_1 \to 0, \quad (3)$$

где частицы типа $T_1$ — зараженные особи (источники инфекции); частицы типа $T_2$ — здоровые особи (восприимчивые к инфекции, не имевшие пока контактов с зараженными); частицы типа $T_3$ —- особи, имевшие один контакт с зараженными (ставшие носителями инфекции). Здоровая особь после двух контактов с зараженным удаляется из популяции. Состояние $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ означает наличие $\alpha_1$ частиц типа $T_1$, $\alpha_2$ частиц типа $T_2$ и $\alpha_3$ частиц типа $T_3$. Через случайное время $\tau_1$, с распределением вероятностей $\mathsf{P}\{\tau_1 < t\} = e^{-\alpha_1\alpha_2\lambda_1 t}$, пара частиц типа $T_1$ и типа $T_2$ взаимодействует и независимо от других частиц превращается в частицу типа $T_1$ и частицу типа $T_3$. Процесс переходит в состояние, соответствующее вектору $(\alpha_1, \alpha_2 - 1, \alpha_3 + 1)$. Через случайное время $\tau_2$, с распределением вероятностей $\mathsf{P}\{\tau_2 < t\} = e^{-\alpha_1\alpha_3\lambda_2 t}$, пара частиц типа $T_1$ и типа $T_3$ взаимодействует и независимо от других частиц превращается в частицу типа $T_1$. Процесс переходит в состояние, соответствующее вектору $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 - 1)$. Кроме того, через случайное время $\tau_3$, с распределением вероятностей $\mathsf{P}\{\tau_3 < t\} = e^{-\alpha_1\lambda_3 t}$, частица типа $T_1$ умирает и процесс переходит в состояние, соответствующее вектору $(\alpha_1 - 1, \alpha_2, \alpha_3)$. Случайные величины $\tau_1, \tau_2$ и $\tau_3$ независимы, в состоянии $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ процесс находится случайное время $\tau = \min\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$.

Предложенный марковский процесс рассмотрен в работе [2] в случае $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \mu$. В [2] методом преобразования Лапласа решено уравнение (1). Определим финальные вероятности для поглощающих состояний $(0, \gamma_2, \gamma_3)$, $\gamma_2, \gamma_3 = 0, 1, 2, \ldots,$

$$q_{(0,\gamma_2,\gamma_3)}^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} = \lim_{t\to\infty} P_{(0,\gamma_2,\gamma_3)}^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(t), \quad \sum_{\gamma_2,\gamma_3=0}^{\infty} q_{(0,\gamma_2,\gamma_3)}^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} = 1.$$

Для финальных вероятностей в [2] получено соотношение

$$\sum_{\gamma_2=0}^{\alpha_2}\sum_{\gamma_3=0}^{\alpha_2-\gamma_2} q_{(0,\gamma_2,\gamma_3)}^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} s_2^{\gamma_2} s_3^{\gamma_3} = \sum_{\gamma_2=0}^{\alpha_2} \frac{\mu^{\alpha_1}}{(\gamma_2+\mu)^{\gamma_2+\alpha_1}} \frac{\alpha_2!}{(\alpha_2-\gamma_2)} \big(s_3-1\big)^{\gamma_2} \times$$

$$\times \sum_{l_0=0}^{\gamma_2}\sum_{l_1=0}^{l_0}\ldots\sum_{l_{\alpha_1-1}=0}^{l_{\alpha_1-2}} \frac{\left\{(\gamma_2+\mu)\left(\dfrac{s_2-1}{s_3-1}\right)\right\}^{l_{\alpha_1-1}}}{l_{\alpha_1-1}}.$$

Однако это выражение малопригодно для исследования асимптотических свойств рассматриваемого марковского процесса.

В настоящей работе процесс $\xi(t)$ исследуется предложенным в работах [4, 5] методом экспоненциальной производящей функции. Получены интегральное представление для производящей функции финальных вероятностей, асимптотики для математического ожидания и дисперсии финального распределения при $\alpha_2 \to \infty$ и предельные теоремы. Такие теоремы “порогового” типа позволяют определить пороговую численность инфицированных особей, при превышении которой принято говорить о начале эпидемии [2, 6]. Согласно работе [2] исследован случай $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = \mu$, случай $\lambda_1 \neq \lambda_2$ будет рассмотрен в работе, готовящейся к печати.

**Стационарное первое уравнение Колмогорова.** Вводим производящую функцию финальных вероятностей

$$\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(s_2, s_3) = \sum_{\gamma_2,\gamma_3=0}^{\infty} q_{(0,\gamma_2,\gamma_3)}^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} s_2^{\gamma_2} s_3^{\gamma_3}, \quad |s_2| \leq 1, |s_3| \leq 1,$$

и двойную производящую функцию

$$\Phi(z_1, z_2, z_3; s_2, s_3) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3}}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!} \Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(s_2, s_3).$$

Аналитичность функции $\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(s_2, s_3)$ при $|s_2| < 1,\ |s_3| < 1$ устанавливаем, исходя из неравенства $|\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(s_2, s_3)| \leq 1$ в рассматриваемой области.

Аналитичность функции $\Phi(z_1, z_2, z_3; s_2, s_3)$ при любых $z_1, z_2, z_3$ следует из неравенства

$$|\Phi(z_1, z_2, z_3; s_2, s_3)| \le$$
$$\le \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3=0}^{\infty} \frac{|z_1|^{\alpha_1}|z_2|^{\alpha_2}|z_3|^{\alpha_3}}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!}|\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(s_2, s_3)| \le e^{|z_1|+|z_2|+|z_3|}.$$

Из первого уравнения (2) аналогично теореме 1.4 работы [5] получаем, что функция $\Phi(z_1, z_2, z_3; s_2, s_3)$ удовлетворяет стационарному уравнению

$$z_1 z_2\Big(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z_1 \partial z_3} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z_1 \partial z_2}\Big) + z_1 z_3\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial z_1} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z_1 \partial z_3}\Big) + \mu z_1\Big(\Phi - \frac{\partial\Phi}{\partial z_1}\Big) = 0,$$

или, после преобразований,

$$(z_2 - z_3)\frac{\partial^2\Phi}{\partial z_1 \partial z_3} - z_2\frac{\partial^2\Phi}{\partial z_1 \partial z_2} - (\mu - z_3)\frac{\partial\Phi}{\partial z_1} + \mu\Phi = 0. \qquad (4)$$

Получим граничные условия. Пусть $z_1 = 0$. Очевидно, что $q^{(0,\alpha_2,\alpha_3)}_{(0,\alpha_2,\alpha_3)} = 1$ и $q^{(0,\alpha_2,\alpha_3)}_{(0,\gamma_2,\gamma_3)} = 0$ при $\alpha_2 \ne \gamma_2$ или $\alpha_3 \ne \gamma_3$. Следовательно,

$$\Phi(0, z_2, z_3; s_2, s_3) = \sum_{\alpha_2,\alpha_3=0}^{\infty} \frac{z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3}}{\alpha_2!\alpha_3!}\Phi_{(0,\alpha_2,\alpha_3)}(s_2, s_3) =$$
$$= \sum_{\alpha_2,\alpha_3=0}^{\infty} \frac{z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3}}{\alpha_2!\alpha_3!} s_2^{\alpha_2} s_3^{\alpha_3} = e^{s_2 z_2 + s_3 z_3}.$$

Пусть $z_2 = 0$, $z_3 = 0$. Для состояний $(\alpha_1, 0, 0), \alpha_1 = 0, 1, 2\ldots$, финальные вероятности определяются следующим образом: $q^{(\alpha_1,0,0)}_{(0,0,0)} = 1$ и $q^{(\alpha_1,0,0)}_{(0,\gamma_2,\gamma_3)} = 0$ при $\gamma_2 \ne 0$ или $\gamma_3 \ne 0$. Следовательно,

$$\Phi(z_1, 0, 0; s_2, s_3) = \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!}\Phi_{(\alpha_1,0,0)}(s_2, s_3) = \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!} = e^{z_1}.$$

Итак, уравнение (4) рассматривается при условиях

$$\Phi(z_1, 0, 0; s_1, s_2, s_3) = e^{z_1}, \quad \Phi(0, z_2, z_3; s_1, s_2, s_3) = e^{s_2 z_2 + s_3 z_3}. \qquad (5)$$

В работе получено решение задачи (4), (5), удовлетворяющее условию аналитичности. Вопросы существования и единственности решений уравнений вида (4) не являются целью настоящей работы, отметим лишь, что они сложны и мало изучены.

**Замена переменных. Функция Римана.** Поставленная задача решения уравнения (4) с тремя переменными и условиями (5) сводится к граничной задаче решения гиперболического уравнения с двумя переменными.

Рассмотрим замену переменной $x = z_1,\ y = e^{-z_3/z_2},\ \zeta = z_2 e^{z_3/z_2}$. Тогда $z_1 = x,\ z_2 = \zeta y,\ z_3 = -\zeta y \ln y$. После вычислений получим уравнение в частных производных для функции $\widetilde{\Phi}(x,y) = \Phi(x, \zeta y, -\zeta y \ln y; s_2, s_3)$:

$$\widetilde{\Phi}_{xy} + \left(\frac{\mu}{y} + \zeta \ln y\right)\widetilde{\Phi}_x - \frac{\mu}{y}\widetilde{\Phi} = 0, \tag{6}$$

с условиями $\widetilde{\Phi}(x,0) = e^x$, $\widetilde{\Phi}(0,y) = e^{\zeta y (s_2 - s_3 \ln y)}$. Запишем уравнение (6) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\widetilde{\Phi}_y + \left(\frac{\mu}{y} + \zeta \ln y\right)\widetilde{\Phi}\right) - \frac{\mu}{y}\widetilde{\Phi} = 0.$$

Решая обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\widetilde{\Phi}_y + \left(\frac{\mu}{y} + \zeta \ln y\right)\widetilde{\Phi} = 0,$$

приходим к замене $\widetilde{\Phi}(x,y) = u(x,y) y^{-\mu} e^{-y\zeta(\ln y - 1)}$. Подставляя последнее выражение в уравнение (6), получаем для функции $u(x,y)$ уравнение

$$u_{xy} - \frac{\mu}{y} u = 0 \tag{7}$$

с граничными условиями

$$u(x,0) = 0, \quad u(0,y) = y^{\mu} e^{y\zeta((s_2 - 1) - (s_3 - 1)\ln y)}. \tag{8}$$

Полученная задача Гурса (7),(8) решается методом Римана [7, 8].

В общем случае для гиперболического уравнения $L(u) = u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0$ решение граничной задачи $u(x, y_0) = \phi(x)$, $u(x_0, y) = \psi(y)$, $\phi(x_0) = \psi(y_0)$, дается формулой [7]

$$\begin{aligned} u(x,y) = R(x, y_0; x, y)\phi(x) + R(x_0, y; x, y)\psi(y) - R(x_0, y_0; x, y)\phi(x_0) + \\ + \int_{x_0}^{x} \left[b(t, y_0) R(t, y_0; x, y) - \frac{\partial}{\partial t} R(t, y_0; x, y)\right]\phi(t)dt + \\ + \int_{y_0}^{y} \left[a(x_0, t) R(x_0, t; x, y) - \frac{\partial}{\partial t} R(x_0, t; x, y)\right]\psi(t)dt, \end{aligned} \tag{9}$$

где $R(x_0, y_0; x, y)$ — функция Римана. По определению функция Римана $R(x_0, y_0; x, y)$ является решением сопряженного уравнения $L^*(u) =$

$= u_{xy} - (au)_x - (bu)_y + cu = 0$ относительно переменных $x$ и $y$. В случае уравнения (7) рассматриваемое уравнение совпадает с сопряженным. Кроме того, требуется выполнение следующих соотношений:

$$R_y(x_0, y_0; x_0, y) = R_x(x_0, y_0; x, y_0) = \\ = R_{x_0}(x_0, y; x, y) = R_{y_0}(x, y_0; x, y) = 0,$$

$$R(x, y; x, y) = R(x_0, y_0; x_0, y_0) = 1.$$

***Лемма 1***. *Функция Римана для уравнения* (7) *имеет вид*

$$R(x_0, y_0; x, y) = J_0\Big(2\sqrt{-\mu(x - x_0)\ln\frac{y}{y_0}}\Big), \tag{10}$$

*где* $J_0$ *— функция Бесселя нулевого порядка.*

***Доказательство.*** Функцию Римана для уравнения $L(u) = 0$ ищем в виде ряда [9]

$$R(x_0, y_0; x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{v_j(x, y)(x - x_0)^j (y - y_0)^j}{j!j!}.$$

Нулевой коэффициент, следуя [9], находим из соотношения

$$\ln v_0(x, y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} (a\,dX + b\,dY) = 0,$$

таким образом, $v_0(x, y) = 1$. Интеграл берется по отрезку, соединяющему точки $(x_0, y_0)$ и $(x, y)$; в полярных координатах имеем $x = x_0 + r\cos\theta$, $y = y_0 + r\sin\theta$ для граничных точек и $X = x_0 + s\cos\theta$, $Y = y_0 + s\sin\theta$ для внутренних точек из этого отрезка, где $\theta = \mathrm{const}$, $s \in [0, r]$. Рекуррентная формула для вычисления коэффициентов ряда получается при подстановке ряда в сопряженное уравнение и имеет вид [9]

$$v_j(x, y) = -\frac{j}{r^j} \int\limits_0^r s^{j-1} L^*(v_{j-1}(X, Y))ds.$$

Вычисление $v_1(x, y)$, $v_2(x, y)$ составляет основание индукции по $j$:

$$L^*(v_0) = -\frac{\mu}{y}, \quad v_1 = -\frac{1}{r}\int\limits_0^r -\frac{\mu}{y}ds = \frac{\mu}{r}\int\limits_0^r \frac{d(y_0 + s\sin\theta)}{(y_0 + s\sin\theta)\sin\theta} =$$

$$= \frac{\mu}{r\sin\theta}\ln(y_0 + s\sin\theta)\Big|_0^r = \frac{\mu}{r\sin\theta}(\ln(y_0 + r\sin\theta) - \ln y_0) = \frac{\mu}{y - y_0}\ln\frac{y}{y_0};$$

$$L^*(v_1) =$$
$$= -\frac{\mu}{y} v_1 = -\frac{\mu^2}{(y-y_0)y} \ln \frac{y}{y_0} = -\frac{\mu^2}{s \sin\theta (y_0 + s\sin\theta)} \ln \frac{y_0 + s\sin\theta}{y_0},$$

$$v_2 = -\frac{2}{r^2} \int\limits_0^r -\frac{s\mu^2}{s(y_0 + s\sin\theta)\sin\theta} \ln \frac{y_0 + s\sin\theta}{y_0} ds = \frac{\mu^2}{(y-y_0)^2} \ln^2 \frac{y}{y_0}.$$

Предположим, что коэффициент $v_j = \dfrac{\mu^j}{(y-y_0)^j} \ln^j \dfrac{y}{y_0}$ вычислен. Определим $v_{j+1}$:

$$L^*(v_j) = -\frac{\mu^{j+1}}{(y-y_0)^j y} \ln^j \frac{y}{y_0} = -\frac{\mu^{j+1} \ln^j((y_0 + s\sin\theta)/y_0)}{(y_0 + s\sin\theta)(s\sin\theta)^j},$$

$$v_{j+1} = -\frac{j+1}{r^{j+1}} \int\limits_0^r \frac{-s^j \mu^{j+1} \ln^j((y_0 + s\sin\theta)/y_0)}{s^j (y_0 + s\sin\theta)(s\sin\theta)^j} ds = \frac{\mu^{j+1}}{(y-y_0)^{j+1}} \ln^{j+1} \frac{y}{y_0}.$$

Окончательно, функция Римана имеет вид

$$R(x_0, y_0; x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{v_j(x,y)(x-x_0)^j (y-y_0)^j}{j!j!} =$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\mu \ln(y/y_0)(x-x_0))^j}{j!j!} = J_0\Big(2\sqrt{-\mu(x-x_0)\ln\frac{y}{y_0}}\Big).$$

Лемма доказана.

**Интегральное представление для производящей функции $\boldsymbol{\Phi}_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(s_2, s_3)$.**

***Теорема 1.*** *Производящая функция финальных вероятностей имеет вид*

$$\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(s_2, s_3) = \frac{\mu^{\alpha_1}}{(\alpha_1 - 1)!} \int_0^{\infty} x^{\alpha_1 - 1} e^{-\mu x} \times$$
$$\times \Big[e^{-x}\big((s_2 - 1) + x(s_3 - 1)\big) + 1\Big]^{\alpha_2} \Big[e^{-x}(s_3 - 1) + 1\Big]^{\alpha_3} dx, \quad (11)$$

*где* $\mu > 0, \alpha_1 \neq 0$.

***Доказательство***. Для уравнения (7) рассмотрим решение $u^0(x,y)$ задачи Гурса ($x_0 > 0,\ y_0 > 0$) с граничными условиями

$$u^0(x_0, y) = \psi(y), \quad u^0(x, y_0) = \phi(x),$$

где $\psi(y) = (y - y_0)^\mu e^{\zeta(y-y_0)((s_2-1)-(s_3-1)\ln(y-y_0))}$, $\phi(x) = 0$. Формула (9) приобретает вид

$$u^0(x,y) = \psi(y) - \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial}{\partial t} R(x_0,t;x,y)\psi(t)dt.$$

Используя метод интегрирования по частям и учитывая равенства $R(x_0,y_0;x,y) = J_0(0) = 1$, получим

$$u^0(x,y) = \psi(y) - \psi(t)R(x_0,t;x,y)\Big|_{y_0}^{y} + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial\psi(t)}{\partial t} R(x_0,t;x,y)dt = \\ = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial\psi(t)}{\partial t} R(x_0,t;x,y)dt.$$

Рассмотрим предел при $x_0 \to 0, y_0 \to 0$, получим

$$u(x,y) = \int\limits_{0}^{y} \frac{\partial\psi(t)}{\partial t} R(0,t;x,y)dt = \int\limits_{0}^{y} t^\mu e^{-\zeta t((s_2-1)-(s_3-1)\ln t)} \times \\ \times \Big[\mu + t\zeta\big((s_2-1)-(s_3-1)(\ln t + 1)\big)\Big] \times \\ \times J_0\left(2\sqrt{\mu x \ln\frac{t}{y}}\right)dt. \quad (12)$$

Возвращаясь к переменным $z_1,\ z_2,\ z_3$ и функции $\Phi(z_1,z_2,z_3;s_2,s_3) = = u(z_1, e^{z_3/z_2})e^{\mu z_3/z_2+z_2+z_3}$, получаем выражение для экспоненциальной производящей функции

$$\Phi(z_1,z_2,z_3;s_2,s_3) = \\ = \int_0^{e^{-z_3/z_2}} \tau^{\mu-1} e^{\mu z_3/z_2 + z_2 e^{z_3/z_2}\tau((s_2-1)-(s_3-1)\ln\tau)+z_2+z_3} \times \\ \times \Big[\mu + \tau z_2 e^{z_3/z_2}((s_2-1)-(s_3-1)(\ln\tau+1))\Big] J_0\Big(2\sqrt{z_1\mu\big(\ln\tau + \frac{z_3}{z_2}\big)}\Big)d\tau.$$

После замены $\tau = e^{-z_3/z_2 - x}$ получаем

$$\Phi(z_1,z_2,z_3;s_2,s_3) = \\ = \int_0^\infty e^{-\mu x + z_2(e^{-x}(s_2-1)+x(s_3-1)+1)+z_3(e^{-x}(s_3-1)+1)} \times$$

$$\times\left[\mu+z_2(e^{-x}((s_2-1)+(x-1)(s_3-1)))+z_3e^{-x}(s_3-1)\right]J_0\left(2\sqrt{-\mu x z_1}\right)dx. \tag{13}$$

Совершенный выше предельный переход нуждается в обосновании; однако непосредственной подстановкой выражения (13) в уравнение (4) и проверкой условий (5) убеждаемся, что (13) является решением задачи (4), (5). Единственность устанавливается, исходя из аналитичности решения (ср. [9, 5]).

Учитывая определение производящей функции $\Phi(z_1, z_2, z_3; s_2, s_3)$ и разложения в ряды

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\qquad J_0(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j(z/2)^{2j}}{j!j!},$$

запишем разложение подынтегральной функции в ряд по $z_1$ и $z_3$. Имеем

$$\Phi(z_1, z_2, z_3; s_2, s_3)=$$
$$=\sum_{\alpha_1=0}^{\infty}\mu^{\alpha_1}\frac{z_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!\alpha_1!}\sum_{\alpha_3=0}^{\infty}\frac{z_3^{\alpha_3}}{\alpha_3!}\int\limits_0^{\infty}x^{\alpha_1}e^{-\mu x+z_2(e^{-x}(s_2-1)+x(s_3-1)+1)}\times$$
$$\times\Big[\mu+z_2(e^{-x}((s_2-1)+(x-1)(s_3-1)))(e^{-x}(s_3-1)+1)^{\alpha_3}+$$
$$+\alpha_3(e^{-x}(s_3-1))(e^{-x}(s_3-1)+1)^{\alpha_3-1}\Big]dx.$$

Далее, разбивая интеграл на сумму двух интегралов соответственно слагаемым, стоящим в квадратных скобках, и производя интегрирование по частям во втором интеграле, получаем

$$\Phi(z_1, z_2, z_3; s_2, s_3)=\sum_{\alpha_1,\alpha_3=0}^{\infty}\frac{z_1^{\alpha_1}z_3^{\alpha_3}\mu^{\alpha_1}}{\alpha_1!(\alpha_1-1)!\alpha_3!}\times$$
$$\times\int\limits_0^{\infty}x^{\alpha_1-1}e^{-\mu x+z_2(e^{-x}(s_2-1)+x(s_3-1)+1)}(e^{-x}(s_3-1)+1)^{\alpha_3}dx.$$

Представляя экспоненту под интегралом в виде ряда по $z_2$, получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. При начальном состоянии процесса $(\alpha_1, 0, \alpha_3)$ имеем марковский процесс эпидемии Вейса со схемой взаимодействий [3]

$$T_1+T_3\to T_1,\qquad T_1\to 0.$$

Соответственно, при $\alpha_2=0$ выражение (11) совпадает с производящей функцией финальных вероятностей процесса эпидемии Вейса [5].

**Асимптотические свойства финального распределения.** Для марковского процесса $\xi(t)$ частицы типов $T_2$ и $T_3$ называются финальными [10]. Обозначим $\eta_2^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}$, $\eta_3^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}$ случайные числа финальных частиц, которые останутся после того, как процесс выродится, т.е. не останется частиц типа $T_1$. Совместное вероятностное распределение величин $\eta_2^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}$, $\eta_3^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}$ определяется производящей функцией (13). Одномерные распределения финальных вероятностей случайных величин $\eta_2^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}$ и $\eta_3^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}$ задаются производящими функциями вероятностей $\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(s_2,1)$ и $\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(1,s_3)$. Для факториальных моментов из формулы (11) при $\alpha_2\to\infty$ получаем

$$\mathsf{M}\eta_2^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} = \frac{\partial\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(1,1)}{\partial s_2} = \alpha_2\Big(\frac{\mu}{\mu+1}\Big)^{\alpha_1},$$

$$\mathsf{M}\eta_3^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} = \frac{\partial\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(1,1)}{\partial s_3} \sim \frac{\alpha_1\alpha_2}{\mu+1}\Big(\frac{\mu}{\mu+1}\Big)^{\alpha_1},$$

$$\frac{\partial^2\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(1,1)}{\partial s_2^2} = \alpha_2(\alpha_2-1)\Big(\frac{\mu}{\mu+1}\Big)^{\alpha_1},$$

$$\frac{\partial^2\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(1,1)}{\partial s_3^2} \sim \frac{\alpha_2(\alpha_2-1)\alpha_1(\alpha_1+1)}{\mu+2}\Big(\frac{\mu}{\mu+2}\Big)^{\alpha_1},$$

$$\mathsf{D}\eta_2^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} = \frac{\partial^2\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(1,1)}{\partial s_2^2} + \frac{\partial\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(1,1)}{\partial s_2} - \\ - \Big(\frac{\partial\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(1,1)}{\partial s_2}\Big)^2 \sim (\alpha_2)^2\Big[\Big(\frac{\mu}{\mu+2}\Big)^{\alpha_1} - \Big(\frac{\mu}{\mu+1}\Big)^{2\alpha_1}\Big],$$

$$\mathsf{D}\eta_3^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} \sim \alpha_1(\alpha_2)^2\Big[\frac{\alpha_1-1}{(\mu+2)^2}\Big(\frac{\mu}{\mu+2}\Big)^{\alpha_1} - \frac{\alpha_1}{(\mu+1)^2}\Big(\frac{\mu}{\mu+1}\Big)^{2\alpha_1}\Big].$$

***Теорема 2.*** *Пусть* $x\in[0,1]$. *Тогда*

$$\lim_{\alpha_2\to\infty}\mathsf{P}\Big\{\frac{\eta_2^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}}{\alpha_2}\le x\Big\} = x^\mu\sum_{n=0}^{\alpha_1-1}\frac{(-\mu\ln x)^n}{n!}.$$

***Доказательство***. Преобразование Лапласа от функции распределения случайной величины $\eta_2^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}/\alpha_2$ имеет вид [11]

$$\mathsf{M}(e^{-\lambda\eta_2^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}/\alpha_2}) = \Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(e^{-\lambda/\alpha_2},1) = \\ = \frac{\mu^{\alpha_1}}{(\alpha_1-1)!}\int_0^\infty x^{\alpha_1-1}e^{-\mu x}\Big(e^{-x}\big((e^{-\lambda/\alpha_2}-1)+1\big)\Big)^{\alpha_2}dx.$$

При $\alpha_2 \to \infty$ получаем

$$\Phi_{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}(e^{-\lambda/\alpha_2},1) \sim \frac{\mu^{\alpha_1}}{(\alpha_1-1)!}\int\limits_0^\infty x^{\alpha_1-1}e^{-\mu x}\left(1-\frac{\lambda}{\alpha_2}e^{-x}\right)^{\alpha_2}dx \sim$$

$$\sim \frac{\mu^{\alpha_1}}{(\alpha_1-1)!}\int_0^\infty x^{\alpha_1-1}e^{-\mu x}e^{-\lambda e^{-x}}dx.$$

После замены $y = e^{-x}$ имеем

$$\frac{\mu^{\alpha_1}}{(\alpha_1-1)!}\int_0^1 (-\ln y)^{\alpha_1-1}y^{\mu-1}e^{-\lambda y}dy.$$

Полученное выражение является преобразованием Лапласа плотности распределения $f(y) = \dfrac{\mu^{\alpha_1}}{(\alpha_1-1)!}(-\ln y)^{\alpha_1-1}y^{\mu-1}$ для случайной величины, распределенной на отрезке $[0,\ 1]$. По теореме непрерывности [11] имеем сходимость функций распределений

$$\lim_{\alpha_2\to\infty}\mathsf{P}\left\{\frac{\eta_2^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}}{\alpha_2} \le x\right\} = \int_0^x f(y)dy.$$

Далее вычисляем

$$\frac{\mu^{\alpha_1}}{(\alpha_1-1)!}\int_0^x (-\ln y)^{\alpha_1-1}y^{\mu-1}dy = x^\mu\sum_{n=0}^{\alpha_1-1}\frac{(-\mu\ln x)^n}{n!}.$$

Теорема доказана.

***Теорема 3.*** *Пусть* $x \in [0,1]$. *Тогда*

$$\lim_{\alpha_2\to\infty}\mathsf{P}\left\{\frac{\eta_3^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}}{\alpha_2} \le x\right\} = \int_0^x f_1(y)dy,$$

*где преобразование Лапласа от плотности распределения вероятностей* $f_1(y)$ *при* $\lambda \ge 0$ *имеет вид*

$$\int_0^\infty e^{-\lambda y}f_1(y)dy = \frac{\mu^{\alpha_1}}{(\alpha_1-1)!}\int_0^\infty x^{\alpha_1-1}e^{-\mu x}e^{-\lambda x e^{-x}}dx.$$

***Теорема 4.*** *Пусть* $x_1, x_2 \in [0, 1]$. *Тогда*

$$\lim_{\alpha_2\to\infty} \mathsf{P}\left\{ \frac{\eta_2^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}}{\alpha_2} \le x_1, \frac{\eta_3^{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}}{\alpha_2} \le x_2 \right\} = \\ = \int_0^{x_1}\int_0^{x_2} f_2(y_1, y_2)dy_1dy_2,$$

*где двойное преобразование Лапласа* [12] *от двумерной плотности распределения вероятностей* $f_2(y_1, y_2)$ *имеет вид* $(\lambda_1 \ge 0,\ \lambda_2 \ge 0)$

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\lambda_1 y_1 - \lambda_2 y_2} f_2(y_1, y_2)dy_1dy_2 = \\ = \frac{\mu^{\alpha_1}}{(\alpha_1 - 1)!}\int_0^{\infty} x^{\alpha_1 - 1}e^{-\mu x}e^{-(\lambda_1+\lambda_2 x)e^{-x}}dx.$$

Доказательство теорем 3 и 4 аналогично доказательству теоремы 2. Явный вид для плотностей вероятностей $f_1(y_1)$ и $f_2(y_1, y_2)$ может быть найден в виде рядов по специальным функциям.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Эпидемии процесс // Математическая энциклопедия. Т. 5. – М.: Советская энциклопедия, 1985. – Кол. 1008.
2. Gani J. Approaches to the Modelling of Aids // Lecture notes in biomathematics. V. 86. Stochastic processes in epidemic theory. – Heidelberg: Springer, 1990. – P. 145–154.
3. Weiss G. On the spread of epidemics by carries // Biometrics. – 1965. – V. 21, № 2. – P. 481–490.
4. Севастьянов Б. А., Калинкин А. В. Ветвящиеся случайные процессы с взаимодействием частиц // Докл. АН СССР. – 1982. – Т. 264, вып. 2. – С. 306–308.
5. Калинкин А. В. Финальные вероятности ветвящегося процесса с взаимодействием частиц и процесс эпидемии // Теория вероятн. и ее примен. – 1998. – Т. 43, вып. 4. – С. 773–780.
6. Калинкин А. В. Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием // УМН. – 2002. – Т. 57, вып. 2. – С. 23–84.
7. Бицадзе А. В., Калиниченко Д. Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1985. – 312 с.
8. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964.
9. Copson E. T. Partial Differential Equation. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1975. –280 p.
10. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. – М.: Наука, 1971. – 436 с.
11. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. – М.: Мир, 1984.
12. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление по двум переменным и его приложения. – М.: Физматгиз, 1958.
13. Мастихин А. В. Функция Римана для стационарного уравнения марковской эпидемии // Обозрение прикл. промышл. матем. Сер. вероятн. и статист. – 2003. – Т. 10, № 2. – С. 502.


Статья поступила в редакцию 17.02.2005