УДК 621.372.8

А. В. Котович, Г. А. Нeсененко

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕТОДОМ ВОЗМУЩЕНИЙ ТЕПЛОВОГО РЕЖИМА ПРЯМОУГОЛЬНОГО ОКНА ВЫВОДА ИМПУЛЬСНОЙ ЭНЕРГИИ

*Предложен и обоснован приближенный аналитический метод решения нерегулярных задач теплопроводности с нелинейными источниками и стоками тепла. Метод основан на асимптотическом анализе интегральных представлений решений, записанных с помощью соответствующих функций Грина.*

Стремление повысить выходную мощность современных приборов СВЧ при одновременном уменьшении их габаритов приводит к существенному увеличению удельных тепловых нагрузок во многих элементах и узлах этих приборов. Поэтому расчет тепловых режимов элементов конструкций оказывается необходимым при создании долговечных и надежных современных приборов СВЧ.

Волноводное окно вывода энергии представляет собой диэлектрическую пластину, которая отделяет вакуумную часть прибора СВЧ от внешней среды. При передаче по волноводному тракту большой мощности СВЧ происходит сильный нагрев окна за счет диэлектрических потерь в материале окна [1]. Это обстоятельство может привести к образованию микротрещин в окне и, следовательно, к нарушению его вакуумной прочности [2].

Правильный выбор конструкции волноводного окна и режима его охлаждения невозможен без предварительного расчета температурного поля в окне. Исследованию нагрева волноводных окон посвящены работы [3–7]. В этих работах рассматривались различные математические модели: линейные [3, 6], нелинейные [4, 7], одномерные [3–6] и двумерные [7].

В настоящей работе авторами за основу исследования взята математическая модель процесса, предложенная в [7], как обладающая наибольшей общностью; однако, в отличие от [7], рассматривается окно прямоугольной формы.

**Постановка задачи.** Согласно принятой математической модели [4, 7] необходимо найти решение $\Theta = \Theta(x, y, \tau)$ уравнения

$$\frac{\partial(C\Theta)}{\partial\tau} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad}\Theta) - M^2(\Theta - \Theta_k) - \sigma\bar{\varepsilon}\Theta^4 + Q, \qquad (1)$$

где $a_0 < x < b$, $c < y < d$, $0 < \tau < \tau_и$, $a_0 < 0$, $c < 0$, $b > 0$, $d > 0$, удовлетворяющее начальному условию

$$\Theta(x,y,\tau)\Big|_{\tau=0} = \Theta^0(x,y),\ \ a_0 \le x \le b,\ \ c \le y \le d, \qquad (2)$$

условию ограниченности температуры в центре окна

$$\Theta(x,y,\tau)\Big|_{x=0,\ y=0} < \infty,\ \ 0 \le \tau \le \tau_и, \qquad (3)$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\Theta(x,y,\tau)}{\partial x}\bigg|_{x=a_0,\ x=b} = 0,\ \ c \le y \le d,\ \ 0 \le \tau \le \tau_и, \\ &\frac{\partial\Theta(x,y,\tau)}{\partial y}\bigg|_{y=c,\ y=d} = 0,\ \ a_0 \le x \le b,\ \ 0 \le \tau \le \tau_и. \end{aligned} \qquad (4)$$

Краевая задача (1)–(4) — это так называемая нелинейная вторая краевая задача нестационарной теплопроводности. Возможно рассмотрение первой краевой задачи, т. е. задачи, в которой вместо граничных условий второго рода (4) рассматриваются граничные условия первого рода:

$$\begin{aligned} &\Theta(x,y,\tau)\Big|_{x=a_0,\ x=b} = 0,\ \ c \le y \le d,\ \ 0 \le \tau \le \tau_и, \\ &\Theta(x,y,\tau)\Big|_{y=c,\ y=d} = 0,\ \ a_0 \le x \le b,\ \ 0 \le \tau \le \tau_и. \end{aligned} \qquad (4')$$

Во второй краевой задаче (1)–(4) приняты следующие обозначения: $\Theta = \Theta(x,y,\tau)$ — безразмерная температура: $\Theta = T/T_{макс}$; $\Theta_к$ — безразмерная температура газа, охлаждающего окно: $\Theta_к = T_к/T_{макс}$; $x, y, \tau$ — безразмерные координаты: $x = \bar{x}/H$, $y = \bar{y}/H$, $\tau = a_к^2 t/H^2$, где $H$ — пространственный масштаб, $a_к^2$ — коэффициент температуропроводности материала, из которого изготовлено окно вывода, при комнатной температуре $T_к$; $T$, $\bar{x}$, $\bar{y}$, $t$ — соответствующие размерные переменные; $T_{макс}$ — некоторая фиксированная (масштабная) температура; $\tau_и$ — продолжительность импульса; $M^2$ — критерий Био: $M^2 = \alpha H/\lambda_к h$; $\sigma$ — приведенный коэффициент излучения: $\sigma = \dfrac{2\sigma_0 T_{макс}^3 H^2}{\lambda_к h}$; $Q = Q(x,y,\tau,\Theta)$ — объемная плотность внутренних источников тепла; $C, \lambda, \bar{\varepsilon}$ — значения коэффициентов теплоемкости, теплопроводности и черноты, отнесенные к соответствующим значениям этих коэффициентов при комнатной температуре и являющиеся заданными функциями температуры; $h$ — толщина окна; $\lambda_{\text{к}}$ — коэффициент теплопроводности при комнатной температуре $T_{\text{к}}$; $\sigma_0$ — постоянная Больцмана; $\alpha$ — коэффициент теплообмена между поверхностью диэлектрического окна и газом со стороны невакуумной части волновода.

Известно [8], что решение нелинейной краевой задачи (1)–(4) при заданных начальных (2) и граничных (3), (4) условиях является единственным в классе функций, непрерывных вместе с первыми и вторыми частными производными при условии, что функции $C(\Theta)$, $\lambda(\Theta)$ и $Q(x, y, \tau, \Theta)$ являются гладкими.

Поскольку в работе предполагается, что температурное поле $\Theta(x, y, \tau)$ диэлектрического окна соответствует импульсному режиму прибора СВЧ, то краевая задача (1)–(4) является сингулярно возмущенной краевой задачей [9, 10].

Действительно, вводя в рассмотрение безразмерное время $\tau'$ по формуле

$$\tau' = \frac{t}{t_{\text{и}}} = \frac{H^2}{a_{\text{к}}^2 t_{\text{и}}}\tau, \tag{5}$$

где $t_{\text{и}}$ — продолжительность импульса (далее вместо $\tau'$ пишем $\tau$), имеем

$$\frac{\partial(C\Theta)}{\partial\tau} = \varepsilon_{\text{в}}\mathrm{div}[\lambda\,\mathrm{grad}\,\Theta] - M_{\text{в}}^2(\Theta - \Theta_{\text{к}}) - \sigma_{\text{в}}\bar{\varepsilon}\Theta^4 + \varepsilon_{\text{в}}Q, \tag{6}$$

$$a_0 < x < b,\ \ c < y < d,\ \ 0 < \tau < 1,\ \ a_0 < 0,\ \ c < 0,\ \ b > 0,\ \ d > 0,$$

$$\Theta(x, y, \tau)|_{\tau=0} = \Theta^0(x, y),\ \ a_0 \le x \le b,\ \ c \le y \le d, \tag{7}$$

$$\Theta(x, y, \tau)|_{x=0,\ y=0} < \infty,\ \ 0 \le \tau \le 1, \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial\Theta(x, y, \tau}{\partial x}\right|_{x=a_0,\ x=b} = 0,\ \ c \le y \le d,\ \ 0 \le \tau \le 1, \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial\Theta(x, y, \tau)}{\partial y}\right|_{y=c,\ y=d} = 0,\ \ a_0 \le x \le b,\ \ 0 \le \tau \le 1; \tag{10}$$

здесь

$$\varepsilon_{\text{в}} = \frac{a_{\text{к}}^2 t_{\text{и}}}{H^2}, \tag{11}$$

$$M_{\text{в}}^2 = \varepsilon_{\text{в}} M^2 = \frac{a_{\text{к}}^2 t_{\text{и}}\alpha}{\lambda_{\text{к}} h H}, \tag{12}$$

$$\sigma_{\text{в}} = \varepsilon_{\text{в}}\sigma = \frac{a_{\text{к}}^2 t_{\text{и}} 2\sigma_0 T_{\text{макс}}^3}{\lambda_{\text{к}} h}. \tag{13}$$

Поскольку рассматривается импульсный режим работы приборов СВЧ, то $t_{\text{и}} \ll 1$ с и, значит, безразмерный параметр $\varepsilon_{\text{в}}$ (в предположении, что $(a_{\text{к}}^2/H^2) = O(1)$) удовлетворяет неравенству

$$\varepsilon_{\text{в}} \ll 1.$$

Итак, мы действительно показали, что в импульсных режимах работы температурное поле прямоугольного окна вывода энергии приборов СВЧ описывается решениями нелинейного сингулярно возмущенного (по иной терминологии — нерегулярного [11]) уравнения (6).

Цель авторов настоящей работы состоит в применении "геометро-оптического" асимптотического метода [9, 10] (который является одним из методов теории возмущений) для нахождения при $\varepsilon_{\text{в}} \ll 1$ приближенного аналитического решения $\Theta(x, y, \tau)$ исследуемой нелинейной двумерной краевой задачи (6)–(10).

Приступая к построению приближенного аналитического решения исследуемой нерегулярной нелинейной краевой задачи (6)–(10) "геометро-оптическим" асимптотическим методом, отметим, что согласно данным из работы [7] функции $\lambda = \lambda(\Theta)$, $a^2 = a^2(\Theta)$ и $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(\Theta)$ меняются незначительно в рабочем интервале температур. Поэтому при первоначальном варианте применения "геометро-оптического" асимптотического метода [9, 10] будем считать, что справедливы равенства

$$\begin{aligned} &\lambda = \lambda(\Theta) = \lambda_{\text{ср}} = \text{const}, \quad a^2 = a^2(\Theta) = a_{\text{ср}}, \\ &\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(\Theta) = \bar{\varepsilon}_{\text{ср}}, \qquad C = C(\Theta) = C_{\text{ср}}. \end{aligned} \tag{14}$$

Вид функции $Q = Q(x, y, \tau, \Theta)$ определяется типом волны в тракте вывода энергии СВЧ. Согласно работе [6] будем считать, в первом приближении, что при прохождении прямоугольного импульса волны типа $\text{TE}_{10}$ справедливо равенство

$$Q = Q(x, y, \tau, \Theta) = Q_{\text{ср}} = \text{const}. \tag{15}$$

С учетом соотношений (14), (15) получаем окончательный вид исследуемой нерегулярной нелинейной краевой задачи ($\varepsilon = \lambda_{\text{ср}}\varepsilon_{\text{в}}/C_{\text{ср}}$, $\bar{M}_{\text{в}}^2 = M_{\text{в}}^2/C_{\text{ср}}$, $\bar{\sigma}_{\text{в}} = \sigma_{\text{в}}/C_{\text{ср}}$):

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\tau} = \varepsilon\Delta\Theta - \bar{M}_{\text{в}}^2(\Theta - \Theta_{\text{к}}) - \bar{\sigma}_{\text{в}}\varepsilon_{\text{ср}}\Theta^4 + \frac{\varepsilon_{\text{в}}}{C_{\text{ср}}}Q_{\text{ср}}, \tag{16}$$

$$a_0 < x < b, \;\; c < y < d, \;\; 0 < \tau < 1, \;\; a_0 < 0, \;\; c < 0, \;\; b > 0, \;\; d > 0,$$

$$\Theta(x, y, \tau)\Big|_{\tau=0} = \Theta^0(x, y), \;\; a_0 \le x \le b, \;\; c \le y \le d, \tag{17}$$

$$\Theta(x, y, \tau)\Big|_{x=0,\; y=0} < \infty, \;\; 0 \le \tau \le 1, \tag{18}$$

$$\left.\frac{\partial\Theta(x, y, \tau)}{\partial x}\right|_{x=a_0,\; x=b} = 0, \;\; c \le y \le d, \;\; 0 \le \tau \le 1, \tag{19}$$

$$\left.\frac{\partial\Theta(x,y,\tau)}{\partial y}\right|_{y=c,\ y=d} = 0,\ \ a_0 \le x \le b,\ \ 0 \le \tau \le 1, \tag{20}$$

где $\Delta$ — двумерный оператор Лапласа.

**Решение сингулярно возмущенной нелинейной краевой задачи нестационарной теплопроводности “геометро-оптическим” асимптотическим методом.** Будем искать решение уравнения (16) в следующем виде:

$$\Theta(x,y,\tau) = u(x,y,\tau)v(x,y,\tau). \tag{21}$$

Краевую задачу для функции $v = v(x,y,\tau)$ сформулируем следующим образом:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \varepsilon\Delta v - \bar{M}_{\text{в}}^2 v, \tag{22}$$

$$a_0 < x < b,\ \ c < y < d,\ \ 0 < \tau < 1,\ \ a_0 < 0,\ \ c < 0,\ \ b > 0,\ \ d > 0,$$

$$\left.v(x,y,\tau)\right|_{\tau=0} = \Theta^0(x,y),\ \ a_0 \le x \le b,\ \ c \le y \le d, \tag{23}$$

$$\left.v(x,y,\tau)\right|_{x=0,\ y=0} < \infty,\ \ 0 \le \tau \le 1, \tag{24}$$

$$\left.\frac{\partial v(x,y,\tau)}{\partial x}\right|_{x=a_0,\ x=b} = 0,\ \ c \le y \le d,\ \ 0 \le \tau \le 1, \tag{25}$$

$$\left.\frac{\partial v(x,y,\tau)}{\partial y}\right|_{y=c,\ y=d} = 0,\ \ a_0 \le x \le b,\ \ 0 \le \tau \le 1. \tag{26}$$

С учетом соотношений (22)–(26) для функции $u = u(x,y,\tau)$ получаем следующую краевую задачу:

$$v\frac{\partial u}{\partial \tau} = \varepsilon\left\{v\Delta u + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right\} + \bar{M}_{\text{в}}^2\Theta_{\text{к}} + \frac{\varepsilon_{\text{в}}Q_{\text{ср}}}{C_{\text{ср}}} - \bar{\sigma}_{\text{в}}\varepsilon_{\text{ср}}u^4v^4, \tag{27}$$

$$a_0 < x < b,\ \ c < y < d,\ \ 0 < \tau < 1,\ \ a_0 < 0,\ \ c < 0,\ \ b > 0,\ \ d > 0,$$

$$\left.u(x,y,\tau)\right|_{\tau=0} = 1,\ \ a_0 \le x \le b,\ \ c \le y \le d, \tag{28}$$

$$\left.u(x,y,\tau)\right|_{x=0,\ y=0} < \infty,\ \ 0 \le \tau \le 1, \tag{29}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,y,\tau)}{\partial x}\right|_{x=a_0,\ x=b} = 0,\ \ c \le y \le d,\ \ 0 \le \tau \le 1, \tag{30}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,y,\tau)}{\partial y}\right|_{y=c,\ y=d} = 0,\ \ a_0 \le x \le b,\ \ 0 \le \tau \le 1. \tag{31}$$

Задача (22)–(26) — это линейная нерегулярная краевая задача, а задача (27)–(31) — это нелинейная нерегулярная краевая задача, поскольку уравнение (27) содержит в качестве слагаемого неизвестную функцию $u(x,y,\tau)$ в четвертой степени.

В основе “геометро-оптического” асимптотического метода лежат идеи, ранее использованные в механике жидкости и газа [12]. Согласно этим идеям пространственно-временная область, в которой ищется решение сингулярно возмущенной краевой задачи типа (32) – (36), а также нерегулярной задачи типа (37) – (41), разбивается на подобласти (“зоны”). Автором работ [9, 10] доказано, что для каждой “зоны” асимптотики Пуанкаре решения нерегулярной задачи имеют соответствующую структуру, которая достаточно просто и с единых методических позиций определяется при помощи асимптотического анализа интегрального представления решения, записанного при помощи соответствующих функций Грина. При этом существенно используется метод Лапласа — частный случай метода перевала [13], а также его модификации, разработанные автором работ [9, 10].

Возвращаясь к асимптотическому анализу решения $v = v(x, y, \tau)$ линейной нерегулярной задачи (22) – (26) и нелинейной задачи (27) – (31), отметим, что в этом случае прямоугольник, заданный неравенствами $a_0 \le x \le b, c \le y \le d$, разбивается на “зоны” следующих трех типов [9, 10]: “ядро зоны света области задания начальных условий”, “пограничные слои” и “угловые пограничные слои”.

Приведем математически корректные определения этих “зон”.

***Определение 1***. *Ядро зоны света области задания начальных условий* обозначим $(A_1^0)$. В зоне $(A_1^0)$ одновременно при $0 \le \tau \le 1$ выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} &d - y = O(1),\;\; \varepsilon \to 0,\;\; y - c = O(1),\;\; \varepsilon \to 0,\\ &a_0 - x = O(1),\;\; \varepsilon \to 0,\;\; b - x = O(1),\;\; \varepsilon \to 0. \end{aligned} \tag{32}$$

***Определение 2***. *Пограничный слой части границы прямоугольника $a_0 \le x \le b, c \le y \le d$, заданной уравнением $y = d$*, обозначим “ПГРСЛ-$d$”, при этом $(x, y, \tau) \in$ “ПГРСЛ-$d$”, если при $\delta \le \tau \le 1$, $\delta > 0$ выполняются условия

$$d - y = o(\varepsilon^{1/2}),\;\; \varepsilon \to 0,\;\; \tilde{a} < x < \tilde{b}, \tag{33}$$

где $a_0 < \tilde{a} < \tilde{b} < b$, причем $a_0 - \tilde{a} = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$, и $b_0 - \tilde{b} = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$.

***Определение 3.*** *Угловой пограничный слой в правом верхнем углу прямоугольника $a_0 \le x \le b$, $c \le y \le d$* обозначим “Угл. ПГРСЛ-$d \cup b$”, при этом $(x, y, \tau) \in$ “Угл. ПГРСЛ-$d \cup b$”, если одновременно при $\delta \le \tau \le 1$, $\delta > 0$ выполняются условия

$$d - y = o(\varepsilon^{1/2}),\;\; \varepsilon \to 0,\;\; b - x = o(\varepsilon^{1/2}),\;\; \varepsilon \to 0. \tag{34}$$

***Замечание***. Аналогично определяются пограничные слои тех частей границы прямоугольника $a_0 \le x \le b$, $c \le y \le d$, которые заданы уравнениями $y = c$, $x = a_0$, $x = b$, а также три оставшихся угловых пограничных слоя.

В статье [7] установлено, что наибольших значений температурное поле окна вывода энергии СВЧ достигает в центре окна. Поэтому в настоящей работе авторы ограничились нахождением приближенного аналитического решения исследуемых нерегулярных краевых задач в случае, когда $(x, y, \tau) \in (A_1^0)$. Заметим, что "геометро-оптический" асимптотический метод позволяет находить приближенные аналитические решения нерегулярных краевых задач как в любом из пограничных слоев прямоугольника $a_0 \le x \le b$, $c \le y \le d$, так и в любом из его угловых пограничных слоев [9, 10].

Приближенные решения исследуемых нерегулярных краевых задач при $\varepsilon \ll 1$ будем искать в виде их асимптотических разложений Пуанкаре [13]. Итак, чтобы найти при $\varepsilon \ll 1$ асимптотику Пуанкаре решения нерегулярной краевой задачи (22) – (26), сначала представим ее решение $v = v(x, y, \tau)$ в следующем виде:

$$v(x, y, \tau) = e^{-\bar{M}_{\text{в}}^2 \tau} w(x, y, \tau). \tag{35}$$

Тогда для функции $w = w(x, y, \tau)$ получаем нерегулярную линейную краевую задачу, которая отличается от краевой задачи (22) – (26) только тем, что в дифференциальном уравнении для функции $w(x, y, \tau)$ отсутствует слагаемое $-\bar{M}_{\text{в}}^2 w$. Обозначая через $\Gamma_{\text{II}}(x, y, \tau; \xi, \eta, \zeta)$ функцию Грина этой краевой задачи, запишем ее решение в следующем интегральном виде [14, 15]:

$$w(x, y, \tau) = \int\limits_{a_0}^{b} \int\limits_{c}^{d} \Theta^0(\xi, \eta) \Gamma_{\text{II}}(x, y, \tau; \xi, \eta, 0) d\xi\, d\eta. \tag{36}$$

К интегралу, стоящему справа в равенстве (36), применяем метод Лапласа [13]. Тогда, полагая функцию $\Theta_0(x, y)$ достаточно гладкой и разлагающейся в двойной ряд Тейлора, сходящийся к функции, по которой он построен, получаем следующее асимптотическое разложение Пуанкаре [9, 10] (для случая $(x, y, \tau) \in (A_1^0)$):

$$w(x, y, \tau) \sim \sum_{i=0}^{\infty} d_i^{(A)}(x, y, \tau) \varepsilon^i, \quad \varepsilon \to 0. \tag{37}$$

В асимптотическом разложении (37) коэффициенты $d_i^{(A)}(x, y, \tau)$ не являются функциями малого параметра $\varepsilon \ge 0$ и вычисляются в явном виде. Например:

$$d_0^{(A)}(x, y, \tau) = \Theta^0(x, y), \;\; d_1^{(A)}(x, y, \tau) = \tau \Delta \Theta^0(x, y). \tag{38}$$

Подставляя (37) в правую часть (35), получаем асимптотику Пуанкаре функции $v(x,y,\tau)$ — решения нерегулярной краевой задачи (22)–(26):

$$v(x,y,\tau) \sim e^{-\bar{M}_{\text{в}}^2\tau} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i d_i^{(A)}(x,y,\tau). \tag{39}$$

Таким образом, нами доказана следующая

***Лемма 1***. *Пусть функция* $\Theta^0(x,y)$ *имеет частные производные* (*по аргументам* $x$ *и* $y$) *любого порядка и разлагается в ряд Тейлора, сходящийся к функции, по которой он построен, в любой точке* $(x,y)$, *принадлежащей прямоугольнику* $a_0 \le x \le b$, $c \le y \le d$.

*Тогда в случае* $(x,y,\tau) \in (A_1^0)$ *для решения* $v(x,y,\tau)$ *нерегулярной краевой задачи* $(22)-(26)$ *справедливо асимптотическое разложение Пуанкаре вида* (39). *Коэффициенты* $d_i^{(A)}(x,y,\tau)$ *асимптотического разложения* (39) *не зависят от малого параметра* $\varepsilon > 0$ *и вычисляются в явном виде* (*см.* (38)).

Теперь обратимся к нахождению асимптотики Пуанкаре решения $u = u(x,y,\tau)$ нерегулярной задачи (27) – (31), по-прежнему предполагая, что справедливо включение $(x,y,\tau) \in (A_1^0)$.

Известно, что асимптотические разложения, полученные методом Лапласа, можно дифференцировать [13]. Поэтому уравнение (27) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} e^{-\bar{M}_{\text{в}}^2\tau} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i d_i^{(A)}(x,y,\tau)\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right) = \varepsilon \Bigg\{ e^{-\bar{M}_{\text{в}}^2\tau} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i d_i^{(A)}(x,y,\tau)(\Delta u) + \\ + 2e^{-\bar{M}_{\text{в}}^2\tau} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \frac{\partial d_i^{(A)}(x,y,\tau)}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \\ + 2e^{-\bar{M}_{\text{в}}^2\tau} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \frac{\partial d_i^{(A)}(x,y,\tau)}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Bigg\} - \\ - \bar{\sigma}_{\text{в}}\varepsilon_{\text{ср}}\left[e^{-\bar{M}_{\text{в}}^2\tau} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i d_i^{(A)}(x,y,\tau)\right]^4 u^4 + \bar{M}_{\text{в}}^2\Theta_{\text{к}} + \frac{\varepsilon_{\text{в}} Q_{\text{ср}}}{C_{\text{ср}}}. \end{aligned} \tag{40}$$

Для нахождения асимптотик решения $u = u(x,y,\tau)$ уравнения (40) используем метод неопределенных коэффициентов, часто применяющийся в теории возмущений [12]. А именно, ограничиваясь только двумя членами разложения функции в ряд Пуанкаре, решение $u = u(x,y,\tau)$ можно записать в виде

$$u \equiv u(x,y,\tau) = u_0(x,y,\tau) + \varepsilon u_1(x,y,\tau) + O(\varepsilon^2). \tag{41}$$

Подставляя (41) в уравнение (40) и ограничиваясь в разложении функции $v = v(x,y,\tau)$ тоже только двумя членами, приравнивая сомножители при одинаковых степенях малого параметра $\varepsilon > 0$ и учитывая начальные условия для функции $u = u(x, y, \tau)$, получаем задачи Коши для определения функций $u_0(x, y, \tau)$ и $u_1(x, y, \tau)$.

Задача Коши для определения функции $u_0(x, y, \tau)$ имеет вид

$$\frac{\partial u_0}{\partial \tau} = -\bar{\sigma}_{\text{в}}\varepsilon_{\text{ср}}e^{-3\bar{M}_{\text{в}}^2\tau}\left(d_0^{(A)}\right)^3 u_0^4 + \frac{1}{d_0^{(A)}}e^{\bar{M}_{\text{в}}^2\tau}\left(\bar{M}_{\text{в}}^2\Theta_{\text{к}} + \frac{\varepsilon_{\text{в}}Q_{\text{ср}}}{C_{\text{ср}}}\right),$$
$$u_0(x, y, \tau)\Big|_{\tau=0} = 1. \tag{42}$$

Задача Коши для определения функции $u_1(x, y, \tau)$ следующая:

$$\begin{aligned} e^{-\bar{M}_{\text{в}}^2\tau}d_0^{(A)}\frac{\partial u_1}{\partial \tau} + 4\bar{\sigma}_{\text{в}}\varepsilon_{\text{ср}}u_0^3 e^{-4\bar{M}_{\text{в}}^2\tau}\left(d_0^{(A)}\right)^4 u_1 = \\ = e^{-\bar{M}_{\text{в}}^2\tau}d_0^{(A)}\Delta u_0 + 2e^{-\bar{M}_{\text{в}}^2\tau}\left(\frac{\partial d_0^{(A)}}{\partial x}\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial d_0^{(A)}}{\partial y}\frac{\partial u_0}{\partial y}\right) - \\ -\frac{\partial u_0}{\partial \tau}e^{-\bar{M}_{\text{в}}^2\tau}d_1^{(A)} - 4\bar{\sigma}_{\text{в}}\varepsilon_{\text{ср}}d_1^{(A)}e^{-4\bar{M}_{\text{в}}^2\tau}\left(d_0^{(A)}\right)^3 u_0^4, \\ u_1(x, y, \tau)\Big|_{\tau=0} = 0. \end{aligned} \tag{43}$$

Чтобы найти приближенное аналитическое решение задачи Коши (42), согласно принятым предположениям $\varepsilon_{\text{в}} \ll 1$, $\bar{M}_{\text{в}}^2 = \varepsilon_{\text{в}}M^2 \ll 1$ оценим постоянную $\nu$:

$$\nu = \frac{1}{d_0^{(A)}}\left(\bar{M}_{\text{в}}^2\Theta_{\text{к}} + \frac{\varepsilon_{\text{в}}Q_{\text{ср}}}{C_{\text{ср}}}\right) \ll 1.$$

Следовательно, нелинейное дифференциальное уравнение в задаче Коши (42) — это регулярно возмущенное нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка, а именно

$$\frac{\partial u_0}{\partial \tau} = -\bar{\sigma}_{\text{в}}\varepsilon_{\text{ср}}e^{-3\bar{M}_{\text{в}}^2\tau}\left(d_0^{(A)}\right)^3 u_0^4 + \nu e^{\bar{M}_{\text{в}}^2\tau}. \tag{44}$$

Ограничиваясь учетом слагаемых порядка $O(\nu)$ включительно, представим решение $u_0(\tau)$ уравнения (44) в следующем виде:

$$u_0(\tau) = u_0^{(0)}(\tau) + \nu u_0^{(1)}(\tau) + O(\nu^2). \tag{45}$$

Применяя к уравнению (44) метод неопределенных коэффициентов, получаем следующие задачи Коши для функции $u_0^{(0)}(\tau)$:

$$\frac{\partial u_0^{(0)}(\tau)}{\partial \tau} = -\bar{\sigma}_{\text{в}}\varepsilon_{\text{ср}}e^{-3\bar{M}_{\text{в}}^2\tau}\left(d_0^{(A)}\right)^3\left(u_0^{(0)}(\tau)\right)^4,$$
$$u_0^{(0)}(\tau)\Big|_{\tau=0} = 1; \tag{46}$$

и функции $u_0^{(1)}(\tau)$:

$$\frac{\partial u_0^{(1)}(\tau)}{\partial \tau} = -4\bar{\sigma}_{\text{в}}\varepsilon_{\text{ср}} e^{-3\bar{M}_{\text{в}}^2\tau}\Big(d_0^{(A)}\Big)^3\Big(u_0^{(0)}(\tau)\Big)^3 u_0^{(1)} + e^{\bar{M}_{\text{в}}^2\tau},$$
$$u_0^{(1)}(\tau)\Big|_{\tau=0} = 0. \tag{47}$$

Решая задачи Коши (46) и (47), получаем выражение для функции $u_0(\tau) = u_0(x,y,\tau)$:

$$u_0(x,y,\tau) = \frac{\bar{M}_{\text{в}}^{2/3} e^{\bar{M}_{\text{в}}^2\tau}}{r^{1/3}} + \nu\frac{e^{4\bar{M}_{\text{в}}^2\tau}}{r}\Bigg\{\left[1+\frac{q}{3pe^{3\bar{M}_{\text{в}}^2\tau}}\right] - \frac{\bar{M}_{\text{в}}^{2/3}\left[1+\dfrac{q}{3p}\right]}{r^{1/3}} +$$
$$+\frac{1}{r^{1/3}}\left[\frac{2}{9q^{2/3}}\ln\frac{(\bar{M}_{\text{в}}^{2/3}+q^{1/3})^2}{|(\bar{M}_{\text{в}}^{4/3}-\bar{M}_{\text{в}}^{2/3}q^{1/3}+q^{2/3})|} + \right.$$
$$+\frac{2}{9q^{2/3}}\ln|r^{2/3}-r^{1/3}q^{1/3}+q^{2/3}| - \frac{4}{9q^{2/3}}\ln|r^{1/3}+q^{1/3}| + \frac{4}{3\sqrt{3}\,q^{2/3}}\times$$
$$\left.\times\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\bar{M}_{\text{в}}^{2/3}-r^{1/3}}{q^{1/3}(2q^{1/3}-\bar{M}_{\text{в}}^{2/3})+r^{1/3}(2\bar{M}_{\text{в}}^{2/3}-q)^{1/3}}\right)\right]\Bigg\} + O(\nu^2), \tag{48}$$

где

$$p = \bar{\sigma}_{\text{в}}\varepsilon_{\text{ср}}\Big(d_0^{(A)}\Big)^3 + \bar{M}_{\text{в}}^2,\quad q = \bar{\sigma}_{\text{в}}\varepsilon_{\text{ср}}\Big(d_0^{(A)}\Big)^3,\quad r = pe^{3\bar{M}_{\text{в}}^2\tau} - q. \tag{49}$$

Если подставить правую часть равенства (48) в дифференциальное уравнение задачи Коши (43), в итоге получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $u_1(\tau)$. Решение этого уравнения, как известно, записывается в квадратурах, однако из-за сложности аналитического выражения мы его выписывать здесь не будем.

Таким образом, нами доказана

***Лемма 2***. *Пусть выполнены условия леммы* 1.

*Тогда в случае* $(x,y,\tau) \in (A_1^0)$ *для решения* $u(x,y,\tau)$ *нерегулярной краевой задачи* $(27)-(31)$ *справедливо асимптотическое разложение Пуанкаре вида*

$$u(x,y,\tau) = u_0(x,y,\tau) + \varepsilon u_1(x,y,\tau) + O(\varepsilon^2), \tag{50}$$

*где* $u_0(x,y,\tau)$ *— решение задачи Коши* $(42)$, *а* $u_1(x,y,\tau)$ *— решение задачи Коши* $(43)$. *Функции* $u_0(x,y,\tau)$ *и* $u_1(x,y,\tau)$ *не зависят от малого параметра* $\varepsilon$, *вид асимптотики* $u_0(x,y,\tau)$ *дается равенством* $(48)$, *а функция* $u_1(x,y,\tau)$ *записывается в квадратурах.*

Возвращаясь к решению нерегулярной нелинейной краевой задачи (16) – (20), используя леммы 1 и 2 и подставляя (39), (50) в (21), получаем следующее

***Утверждение***. *Пусть функция* $\Theta^0(x, y)$ *имеет частные производные* (*по аргументам* $x$ *и* $y$) *любого порядка и разлагается в ряд Тейлора*, *сходящийся к функции*, *по которой он построен, в любой точке* $(x, y)$, *принадлежащей прямоугольнику* $a_0 \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$.

*Тогда в случае* $(x, y, \tau) \in (A_1^0)$ *для решения* $\Theta(x, y, \tau)$ *нерегулярной нелинейной краевой задачи* $(16) - (20)$ *справедлива при* $\varepsilon \ll 1$ *асимптотика вида*

$$\Theta(x, y, \tau) = e^{-\bar{M}_в^2 \tau}(d_0(x, y, \tau) + \varepsilon d_1(x, y, \tau) + O(\varepsilon^2)), \tag{51}$$

*где*

$$\begin{gathered} d_0(x, y, \tau) = d_0^{(A)}(x, y) u_0(x, y, \tau), \\ d_1(x, y, \tau) = d_0^{(A)}(x, y) u_1(x, y, \tau) + d_1^{(A)}(x, y, \tau) u_0(x, y, \tau). \end{gathered} \tag{52}$$

*Функции* $d_0^{(A)}(x, y)$, $d_1^{(A)}(x, y, \tau)$, $u_0(x, y, \tau)$ *выписаны в явном виде*; *функция* $u_1(x, y, \tau)$ *записана в квадратурах*. *Все эти функции не зависят от малого параметра* $\varepsilon$ (*см.* $(38)$ *и* $(48)$).

**Сравнение с аналогичными результатами других авторов**. В работе [6] при постановке задачи сначала отмечено, что при прохождении прямоугольного импульса волны типа $TE_{10}$ распределение в толще диэлектрика прямоугольного окна плотности объемных источников тепловой энергии $F(x, y)$ можно записать в следующем виде:

$$F(x, y) = F_0 \cos^2\left(\frac{2\pi y}{l_2}\right),$$

где $F_0$ — значение плотности объемных источников тепловой энергии в центре окна. Далее предполагается, что справедливо неравенство $l_2 \gg l_1$ ($l_1$ и $l_2$ — размеры прямоугольного окна вывода энергии), "поскольку решение двумерной нестационарной задачи теплопроводности вызывает большие трудности". При таких допущениях "функция $F(x, y)$ становится константой $F_0$, …коэффициент температуропроводности $a$ полагаем постоянным; отдачей тепла путем конвекции и излучением пренебрегаем" [6].

Обозначая через $v = v(x, t)$ искомую температуру прямоугольного окна вывода энергии, авторы статьи [6] записывают следующую одномерную линейную краевую задачу:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = F_1(t), \tag{53}$$

где $F_1(t) = F_0 \sum_{N=0}^{\infty} S(t - N\tau)\{1 - S[t - \tau_2 - N\tau]\}$ при $\tau_2 < \tau$ в области $0 \le x \le l_1$, $0 \le t \le \infty$ при начальном условии

$$v|_{t=0} = 0 \tag{54}$$

и граничных условиях

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l_1} = 0. \tag{55}$$

В работе [6] представлены:

1) аналитическое выражение, дающее решение линейной краевой задачи (53) – (55);

2) распределение температуры при малых значениях безразмерного времени;

3) средняя за период температура.

В разделе этой работы, озаглавленном “Количественные результаты решения, его анализ и выводы”, представлены результаты расчетов, проведенные с помощью ЭВМ по полученным авторами формулам. В итоге авторы приходят к следующим выводам:

1) распределение температуры по пространственной координате $L$ разбивается во всем временном интервале $0 \le m \le \infty$ ($m$ — безразмерное время) на две характерные зоны: $0 \le L \le L_2$ и $L_2 \le L < L$ ($L_2 \simeq 0{,}70$);

2) распределение температуры в первой зоне практически не зависит от пространственной координаты $L$;

3) вторая зона характеризуется резким спадом температуры по пространственной координате.

Возникающие при этом градиенты температуры для ряда режимов сопоставимы по величине с градиентами температуры для установившегося состояния. Отметим, что приведенные в работе [6] “зоны” качественно согласуются с “зонами”, определенными в рамках “геометро-оптического” асимптотического метода [9, 10] (см. также определение “зон” в настоящей работе).

В данной работе содержится новый достоверный результат, отличающийся от результатов работ [1–7], поскольку в этих работах не использовался метод возмущений. Тем не менее, полученный результат качественно совпадает с результатами, приведенными в [1–7]. А именно, если предположить, что $Q(T) = T^{\beta}$, $\beta > 1$, то, как показано в работе авторов [18], решение исходной нелинейной нерегулярной задачи является функцией, неограниченно возрастающей за конечный интервал времени. Отметим, что этот вывод находится в полном согласии с результатами монографии [8] и отличается от аналогичных результатов других авторов [16], исследовавших асимптотики решений сингулярно возмущенных уравнений параболического типа, поскольку в [16] получены асимптотики Эрдейи решений, а в настоящей работе получены асимптотики Пуанкаре. Как известно, асимптотики Эрдейи имеют недостатки по сравнению с асимптотиками Пуанкаре. В частности, они не позволяют проводить аналитический параметрический анализ свойств решений исследуемой задачи.

**Выводы.** 1. В работе предложен и обоснован способ расчета нерегулярных тепловых полей в окнах вывода энергии приборов СВЧ, работающих в импульсном режиме, который позволяет учитывать тепловые потери за счет излучения и конвекции.

2. Способ расчета основан на применении “геометро-оптического” асимптотического метода, разработанного одним из авторов.

3. Поскольку решение анализируемой нерегулярной краевой задачи представлено в виде асимптотики Пуанкаре, то возможен его аналитический параметрический анализ.

4. Предложенным методом можно учитывать нелинейную зависимость свойств материала окна от температуры, нелинейную зависимость мощности тепловых источников от температуры, а также произвольную форму окна вывода энергии.

5. Результаты настоящей работы легко обобщаются на случай трехмерных (по пространственным переменным) аналогичных нелинейных нерегулярных краевых задач.

6. Проведено сравнение результатов, полученных в настоящей работе, с аналогичными результатами, полученными другими авторами; на основании проведенного сравнения сделан достоверный вывод о качественном совпадении результатов данной работы с аналогичными результатами других авторов и о новизне предложенного метода.

В настоящее время авторами проводится серия расчетов по приведенному алгоритму.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гинзбург В. С., Кармазин В. Г. Мощные усилительные клистроны // Вопросы радиоэлектроники. Сер. I. “Электроника”. – 1961. – № 3. – С. 25–43.
2. Самсонов Д. Е. Основы расчета и конструирования магнетронов. – М.: Сов. радио, 1974. – 327 с.
3. Денискин Ю. Д., Лыков П. Г. Тепловые процессы в дисковом выводе энергии приборов СВЧ // Вопросы радиоэлектроники. Сер. I. “Электроника”. – 1964. – № 6. – С. 102–109.
4. Лыков П. Г., Денискин Ю. Д. Приближенный расчет нагрева пластин из бериллиевой керамики, помещенных в волноводе // Электронная техника. Сер. I. “Электроника СВЧ”. – 1966. – № 10. – С. 183–185.

5. Денискин Ю. Д., Лыков П. Г. Распределение температуры в волноводных окнах выводов энергии приборов СВЧ // Вопросы радиоэлектроники. Сер. I. "Электроника". – 1965. – № 12. – С. 184 – 188.

6. Деомидов А. И., Сазонов В. П. К расчету теплового режима окна в прямоугольном волноводе при импульсном прохождении СВЧ мощности // Электронная техника. Сер. I. "Электроника СВЧ". – 1966. – № 10. – С. 69–85.

7. Блейвас И. М., Захаров М. И., Ракитский Ю. В., Тарасов В. С. Расчет нелинейных тепловых процессов в волноводном окне вывода энергии приборов СВЧ // Электронная техника. Сер. I. "Электроника СВЧ". – 1968. – № 1. – С. 63–84.

8. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. – М.: Наука, 1987. – 480 с.

9. Несененко Г. А. Решение задач нерегулярного нелинейного тепло- и массопереноса "геометро-оптическим" асимптотическим методом. – Бирск: Изд-во Бирского ГПИ, 2003. – 127 с.

10. Несененко Г. А. Асимптотики Пуанкаре решений нелинейных нерегулярных задач тепло- и массопереноса // Успехи современной радиоэлектроники. – 2003. – № 2. – С. 3–78.

11. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.

12. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. – М.: Мир, 1967. – 310 с.

13. Федорюк М. В. Метод перевала. – М.: Наука, 1977. – 368 с.

14. Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высшая школа, 2001. – 550 с.

15. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 427 с.

16. Васильева А. В., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. – М.: Высшая школа, 1990. – 208 с.

17. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. – М.: Наука, 1990. – 528 с.

18. Котович А. В., Несененко Г. А. Решение нелинейной нерегулярной многомерной задачи теплопроводности с тепловым источником степенного типа "геометро-оптическим" асимптотическим методом // Современные естественно-научные и гуманитарные проблемы: Сб. трудов научно-методич. конфер., посвященной 40-летию НУК ФН. 1 декабря 2004 г., г. Москва. – М.: Логос, 2005. – С. 323–333.


Статья поступила в редакцию 18.02.2005

Александр Валерианович Котович родился в 1960 г., окончил в 1983 г. МАИ. Канд. техн. наук, доцент кафедры "Прикладная математика" МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 45 научных работ в области численных методов решения дифференциальных уравнений с частными производными.

A.V. Kotovich (b. 1960) graduated from the Moscow Aviation Institute in 1983. Ph. D. (Eng.), assoc. professor of "Applied Mathematics" department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 45 publications in the field of numerical methods to solve differential equations with partial derivatives.

Георгий Алексеевич Несененко родился в 1939 г., окончил в 1961 г. Харьковский политехнический институт и в 1983 г. Харьковский государственный университет. Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 257 научных работ в области асимптотических разложений решений нелинейных краевых задач.

G.A. Nesenenko (b. 1939) graduated from the Kharkov Polytechnic Institute in 1961. D.Sc. (Phys.-Math.), professor of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 257 publications in the field of asymptotic expansions of solutions to nonlinear boundary problems.

---

## ЖУРНАЛ “ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА имени Н.Э. БАУМАНА”

В журнале публикуются наиболее значимые результаты фундаментальных и прикладных исследований и совместных разработок, выполненных в МГТУ имени Н.Э. Баумана и других научных и промышленных организациях.

Журнал “Вестник МГТУ имени Н.Э. Баумана” в соответствии с постановлением Высшей аттестационной комиссии Министерства образования Российской Федерации включен в перечень периодических и научно-технических изданий, в которых рекомендуется публикация основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора наук.

Журнал издается в трех сериях: “Приборостроение”, “Машиностроение”, “Естественные науки” — с периодичностью 12 номеров в год.

**Подписка по каталогу “Газеты, журналы” агентства “Роспечать”**

| Индекс | Наименование серии | Объем выпуска | Подписная цена (руб.) | |
|---|---|---|---|---|
| | | Полугодие | 3 мес. | 6 мес. |
| 72781 | “Машиностроение” | 2 | 150 | 300 |
| 72783 | “Приборостроение” | 2 | 150 | 300 |
| 79982 | “Естественные науки” | 2 | 150 | 300 |

**Подписывайтесь и публикуйтесь!**

Адрес редакции журнала “Вестник МГТУ имени Н.Э. Баумана”: 105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, д. 5.

Тел.: (095) 263-62-60; 263-60-45.

Факс: (095) 265-42-98; 263-67-07.

E-mail: markir@bmstu.ru, press@bmstu.ru