УДК 368.1:519

С. Д. Голубев, Л. А. Черная,
А. Г. Шухов

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ В АКТУАРНЫХ РАСЧЕТАХ ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПРОГРАММ ИМУЩЕСТВЕННОГО СТРАХОВАНИЯ

Предпринята попытка применения методов и моделей теории массового обслуживания в задаче прогнозирования финансово-экономических показателей страхового процесса в форме реализуемой во времени программы продажи полисов имущественного страхования. Построенная модель, в частности, позволяет численно моделировать эффект отставания времени страховых выплат от моментов продаж страховых полисов.

Постановка задачи. Одна из практически важных задач, решаемых в процессе управления деятельностью страховой компании, состоит в формировании и оценке финансово-экономических показателей развивающихся во времени программ страхования однородных по своим характеристикам видам имущества. Отличительная особенность динамики изменения основных показателей, отражающих эффективность такого рода программ, с точки зрения страховщика состоит в наличии временного лага, отделяющего время поступлений страховых сборов от времени страховых выплат по программе. При проведении маркетинговой и андеррайтинговой политики для управления страховым процессом, а также для формирования оценки финансово-экономической ситуации весьма важно правильно определить величину этого лага. Это даст возможность адекватно оценивать величину финансовых ресурсов компании, поскольку премиальные поступления и предстоящие страховые выплаты являются основными составляющими ее финансового баланса в краткосрочной перспективе.

Сопоставление ожидаемых изменений во времени доходов, определяемых как разность премиальных поступлений и страховых выплат, позволяет выявлять наиболее предпочтительные страховые программы для их приоритетного включения в страховой портфель и достижения максимальной экономической эффективности страховой деятельности компании.

Особо важное значение оценка ожидаемой величины дохода, по-видимому, имеет для продуктов с высоким коэффициентом убыточности, близким к 100%. Превышение нетто-премии над страховыми выплатами имеет сугубо динамический, временный характер, т. е. положительность разности нетто-премии и страховых выплат почти полностью обусловлена эффектом отставания момента страховых выплат от момента получения страховых премий. С другой стороны, множественность одновременно реализуемых страховых программ обеспечивает определенную статистическую устойчивость превышения суммарной страховой премии над суммарными выплатами.

Чтобы воспользоваться разработанными в теории массового обслуживания математическими моделями и методами, будем интерпретировать поток заключаемых страховых договоров по программе как входящий поток требований для страхового обслуживания. Удержание страхового риска, а также осуществление страховых выплат при возникновении страховых событий, после которых договор считается полностью выполненным со стороны страховщика, естественно интерпретировать как процесс обслуживания поступивших требований. Наконец, прекращение действия страховых договоров вследствие истечения срока, на который они заключались, будем интерпретировать как процесс ухода клиентов, проявивших “нетерпение” и не дождавшихся очереди на обслуживание.

Таким образом, основные элементы страхового процесса интерпретированы в терминах теории массового обслуживания, что позволяет перейти к рассмотрению математических моделей, описывающих этот страховой процесс.

Модели и алгоритмы прогнозирования финансово-экономических показателей программы имущественного страхования. Для решения поставленной задачи, во-первых, примем предположение о пуассоновском распределении числа страховых событий в группе застрахованных объектов, что равносильно предположению о том, что вероятность ненаступления страховых случаев в застрахованных объектах на интервале $(0, t)$ равна $e^{-\lambda t}$, где λ — положительная константа, определяемая как средняя интенсивность возникновения страховых случаев в расчете на один застрахованный объект; во-вторых, будем предполагать, что поток заключаемых договоров может быть приближен простейшим нестационарным потоком — потоком пуассоновского типа [2] с переменным во времени параметром

$$\mu(t) = \dot{N}_0(t), \qquad (1)$$

т. е. будем считать мгновенное значение параметра пуассоновского потока равным интенсивности потока заключаемых договоров $\dot{N}_0(t)$. Как известно [2], в этом случае распределение числа заключенных договоров на интервале (t_0, t) описывается выражением

$$r_k(t_0, t) = \frac{[\Lambda(t_0, t)]^k}{k!} e^{-\Lambda(t_0, t)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

где

$$\Lambda(t_0, t) = \int\limits_{t_0}^{t} \mu(s) ds = N_0(t). \tag{3}$$

Отметим, что “погружение” детерминированного потока договоров $\dot{N}_0(t)$ в формулах (2), (3) обусловлено не столько физической природой процесса, сколько удобством применения математического аппарата теории массового обслуживания в решении задачи с вероятностным описанием входящего потока требований (в данном случае заключенных договоров). Вместе с тем, при достаточно большом значении величины $\Lambda(t_0, t)$, представляющей собой общее число страховых договоров, заключенных на интервале времени (t_0, t), значение коэффициента вариации распределения (2), определяемого как отношение среднеквадратического значения числа заключенных договоров к их математическому ожиданию, является достаточно малой величиной, т. е. описание входящего потока в форме (1), (2) оказывается близким к детерминированной модели. Действительно, математическое ожидание и дисперсия пуассоновского распределения (2) определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} m_N(t_0, t) &= \Lambda(t_0, t), \\ D_N(t_0, t) &= \Lambda(t_0, t). \end{aligned} \tag{4}$$

Запишем выражение коэффициента вариации, используя формулы (4):

$$K_v(t_0, t) = \frac{\sqrt{D_N(t_0, t)}}{m_N(t_0, t)} = \frac{1}{\sqrt{\Lambda(t_0, t)}}. \tag{5}$$

Если допустить, что число заключенных договоров на рассматриваемом интервале времени составляет не менее 1000 (вполне правдоподобное предположение), то значение коэффициента вариации не превзойдет величины

$$K_v(t_0, t) = \frac{1}{\sqrt{1000}} \leq 0{,}03162,$$

т. е. относительная ошибка аппроксимации случайным потоком его детерминированного аналога составляет приблизительно 3%, что, по-видимому, вполне приемлемо в прогнозно-аналитических расчетах применительно к задачам анализа страховых схем.

Несомненное преимущество представления входящего потока требований (потока страховых договоров) в форме (1), (2) состоит в возможности применения ставшей к настоящему времени классической *модели гибели и размножения* [2], хорошо изученной в рамках теории массового обслуживания. Обозначая $p_k(t_0, t)$ вероятность того, что в страховом портфеле страховой компании в момент времени t находятся $K(t) = k = 0, 1, \ldots$ страховых договоров, запишем систему уравнений модели гибели и размножения, описывающих динамику изменения во времени вероятностей $p_k(t_0, t)$:

$$\begin{aligned} &p_0'(t_0,t) = -\mu(t)p_0(t_0,t) + \lambda p_1(t_0,t),\\ &p_1'(t_0,t) = -\left(\lambda + \mu(t)\right)p_1(t_0,t) + 2\lambda p_2(t_0,t) + \mu(t)p_0(t_0,t),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &p_k'(t_0,t) = -\left(k\lambda + \mu(t)\right)p_k(t_0,t) + (k+1)\lambda p_{k+1}(t_0,t) +\\ &\qquad\qquad + \mu(t)p_{k-1}(t_0,t), \quad k = 2, 3, \ldots. \end{aligned} \tag{6}$$

Решение системы дифференциальных уравнений удовлетворяет начальным условиям:

$$p_k(t_0, t_0) = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0,\\ 0, & \text{если } k > 0. \end{cases} \tag{7}$$

Заметим, что система дифференциальных уравнений (6) учитывает лишь механизм прекращения действия страховых договоров вследствие возникновения в соответствующих застрахованных объектах страховых событий, за которыми следуют страховые выплаты и прекращение действия страхового договора. Другой механизм прекращения действия договоров связан с истечением их срока действия. Иными словами, система уравнений (6) описывает динамику распределения вероятностей числа действующих договоров в страховом портфеле при условии $t_0 \leq y \leq t_0 + T_с$, где $T_с$ — срок действия договора. Случай $t > t_0 + T_с$ будет рассмотрен ниже.

Прежде чем приступить к решению системы уравнений (6) с начальными условиями (7), отметим одно существенное свойство этого решения. А именно, если начальное условие удовлетворяет равенству $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k(t_0, t_0) = 1$, то и для всех $t > t_0$ имеет место тождество

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t_0, t) \equiv 1. \tag{8}$$

В самом деле, сложим левые и правые части уравнений (6). Имеем

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t_0,t)\right] = -\mu(t)p_0(t_0,t) - \mu(t)\sum_{k=1}^{\infty} p_k(t_0,t) + \mu(t)\sum_{k=1}^{\infty} p_{k-1}(t_0,t) +$$

$$+\lambda p_1(t_0,t) - \lambda\sum_{k=1}^{\infty} kp_k(t_0,t) + \lambda\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)p_{k+1}(t_0,t).$$

После приведения подобных членов в последнем выражении получаем

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t_0,t)\right] \equiv 0, \tag{9}$$

откуда с учетом начальных условий (7) вытекает тождество (8).

Интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений (6), вообще говоря, может выполняться численными методами, однако эта система уравнений имеет две особенности, затрудняющие применение для ее решения стандартных вычислительных методов.

Во-первых, число уравнений в системе (6) может быть, в принципе, произвольно бóльшим. Точнее, если в начальный момент времени $t = t_0$ имеют место равенства (7), то по истечении некоторого времени $t - t_0$ может оказаться, что

$$\begin{aligned} &p_k(t_0,t) = 0, \quad \text{если } k > k_0(t),\\ &p_k(t_0,t) > 0, \quad \text{если } 0 \le k \le k_0(t), \end{aligned}$$

где $k_0(t)$ — заранее не известное число, определяемое в процессе решения системы уравнений (6). С содержательной точки зрения $k_0(t)$ означает максимально возможное число договоров, которое находится в страховом портфеле в момент времени t. С математической точки зрения $k_0(t)$ означает верхнюю границу области возможных значений числа договоров в страховом портфеле, т. е. границу области, охваченной процессом “диффузии” числа договоров.

Во-вторых, имеет место значительный разброс коэффициентов системы дифференциальных уравнений (6). Действительно, коэффициенты при $p_k(t_0,t)$ в правых частях системы уравнений (6), равные $k\lambda$, возрастают по мере увеличения k, что влечет за собой увеличение скорости протекания переходных процессов по соответствующим переменным при больших k. Поскольку реальные значения k, которые могут фигурировать в системе уравнений (6), исчисляются сотнями и даже тысячами, то приблизительно во столько же раз возрастает скорость протекания переходных процессов при предельных значениях k по сравнению со скоростью протекания процессов для $p_1(t_0,t)$. Данное обстоятельство влечет за собой необходимость использования различных шагов интегрирования для каждого из k уравнений системы (6). А именно, чем больше значение k, тем более мелкий шаг интегрирования следует выбирать. Дробление временного шага в сочетании с заранее непредсказуемым увеличением числа уравнений системы (6) обусловливает значительные вычислительные трудности ее численного интегрирования. Указанные трудности численного интегрирования системы уравнений (6) делают целесообразной попытку их преодоления путем введения производящей функции дискретной случайной величины $K(t)$, имеющей распределение $p_k(t_0, t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, в момент времени t, и перехода к уравнению относительно производящей функции. Данный прием успешно используется для решения системы уравнений модели гибели и размножения в более простой ситуации, исследованной в работе [2], а в монографии [3, гл. XVII] при изучении достаточно близкой к рассматриваемой модели линейного роста также отмечается, что основной метод для нахождения явных решений уравнений типа (6) состоит в выводе уравнений в частных производных для производящей функции. Производящая функция случайной величины $K(t)$ записывается в виде бесконечного ряда:

$$\varphi(t_0, t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k p_k(t_0, t) = p_0(t_0, t) + \sum_{k=1}^{\infty} x^k p_k(t_0, t), \tag{10}$$

который, очевидно, сходится в круге единичного радиуса $|x| < 1$ и обращается в силу тождества (8) в единицу при $x = 1$, т. е.

$$\varphi(t_0, t, x)\Big|_{x=1} \equiv 1 \ \ \forall t. \tag{11}$$

Наконец, в силу начальных условий (7) системы уравнений (6) имеем

$$\varphi(t_0, t, x)\Big|_{t=t_0} \equiv 1 \ \ \forall x. \tag{12}$$

Чтобы составить уравнение для $\varphi(t_0, t, x)$, умножим k-е уравнение системы (6) на x^k и просуммируем левые и правые части полученных уравнений. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t_0, t, x) = -\mu(t)\varphi(t_0, t, x) - \lambda \sum_{k=0}^{\infty} k x^k p_k(t_0, t) +$$
$$+ \lambda \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k p_{k+1}(t_0, t) + \mu(t) \sum_{k=1}^{\infty} x^k p_{k-1}(t_0, t). \tag{13}$$

Полученные в правой части уравнения (13) суммы преобразуем, используя определение производящей функции (10):

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k k p_k(t_0,t) = x\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} p_k(t_0,t) =$$
$$= x\frac{\partial}{\partial x}\sum_{k=0}^{\infty} x^k p_k(t_0,t) = x\frac{\partial}{\partial x}\varphi(t_0,t,x),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k (k+1) p_{k+1}(t_0,t) = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} p_k(t_0,t) = \frac{\partial}{\partial x}\varphi(t_0,t,x),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k p_{k-1}(t_0,t) = x\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} p_{k-1}(t_0,t) = x\sum_{k=0}^{\infty} x^k p_k(t_0,t) = x\varphi(t_0,t,x).$$

После подстановки полученных выражений в уравнение (13) преобразуем его к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t_0,t,x) = -\mu(t)\varphi(t_0,t,x) -$$
$$-\lambda x\frac{\partial}{\partial x}\varphi(t_0,t,x) + \lambda\frac{\partial}{\partial x}\varphi(t_0,t,x) + \mu(t)x\varphi(t_0,t,x),$$

или после приведения подобных членов — к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t_0,t,x) - \lambda(1-x)\frac{\partial}{\partial x}\varphi(t_0,t,x) = -\mu(t)(1-x)\varphi(t_0,t,x). \quad (14)$$

Итак, решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (6), вообще говоря, бесконечномерной, свелось к интегрированию линейного уравнения в частных производных с начальным (12) и граничным (11) условиями. Отметим здесь, что численное интегрирование уравнения (14) мало эффективно для достижения конечной цели — вычисления распределения $p_k(t_0,t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Для этого необходимо получить аналитическое (или, по крайней мере, в замкнутой форме) решение уравнения (14).

Следуя общей теории линейных (квазилинейных) дифференциальных уравнений в частных производных [4], будем интерпретировать решение уравнения в частных производных вида (14) с краевыми условиями (11) и (12) как отыскание интегральной поверхности, удовлетворяющей уравнению (14) и проходящей через заданную линию. Чтобы воспользоваться традиционной схемой решения рассматриваемого вида дифференциального уравнения в частных производных, представим начальное и граничное условия уравнения (14) в виде некоторой линии в пространстве координат (t, x, φ), описываемой в параметрической форме.

Обозначим через z параметр линии, через которую проходит искомая интегральная поверхность. Тогда произвольная линия в пространстве координат (t, x, φ) может быть записана следующим образом:

$$L = \{t(z),\, x(z),\, \varphi(z)\}. \tag{15}$$

Нетрудно видеть, что краевые условия (11) и (12) в пространстве координат $(t,\, x,\, \varphi)$ представляют собой два прямолинейных отрезка, соединенных в точке $t = 0$, $x = 1$, $\varphi = 1$, поэтому естественно попытаться описать линию, образованную этими отрезками, с помощью кусочно линейных функций.

Легко видеть, что начальное условие (12) может быть записано в параметрической форме следующим образом:

$$\begin{aligned} &\tau_0(z) = t_0, \\ &x_0(z) = 1 + z, \\ &\varphi_0(z) = 1, \end{aligned} \tag{16}$$

причем z изменяется на интервале $(-1, 0)$.

Аналогично, краевое условие (11) записывается в виде

$$\begin{aligned} &\tau_0(z) = t_0 + z, \\ &x_0(z) = 1, \\ &\varphi_0(z) = 1, \end{aligned} \tag{17}$$

где z изменяется на интервале $(0, \infty)$.

Таким образом, в целом линия, определяемая краевыми условиями (11) и (12), записывается в параметрической форме следующим образом:

$$\begin{aligned} &\tau_0(z) = \begin{cases} t_0, & \text{если } -1 \le z < 0, \\ t_0 + z, & \text{если } z \ge 0, \end{cases} \\ &x_0(z) = \begin{cases} 1 + z, & \text{если } -1 \le z < 0, \\ 1, & \text{если } z \ge 0, \end{cases} \\ &\varphi_0(z) \equiv 1 \;\; \forall z \in [-1, \infty). \end{aligned} \tag{18}$$

Далее, в соответствии с традиционной схемой [4] решения дифференциального уравнения в частных производных (14) следует составить систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих характеристики данного уравнения:

$$\begin{aligned} &\frac{dt}{ds} = 1, \\ &\frac{dx}{ds} = -\lambda(1 - x), \\ &\frac{d\varphi}{ds} = -\mu\,(t(s))\,(1 - x(s))\,\varphi(s), \end{aligned} \tag{19}$$

где s — скалярный параметр, принимающий неотрицательные значения.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (19) интегрируется с начальными условиями (18), т. е.

$$\begin{aligned} t(s)\,|_{s=0} &= \tau_0(z), \\ x(s)\,|_{s=0} &= x_0(z), \\ \varphi_0(s)\,|_{s=0} &= \varphi_0(z). \end{aligned} \tag{20}$$

Поскольку правые части системы обыкновенных дифференциальных уравнений (19) не зависят в явном виде от s, т. е. система автономна, то выбор начального значения s не существен. Для простоты начальное значение s принимается равным нулю.

Первые два уравнения системы (19) можно интегрировать независимо от третьего уравнения:

$$t(s;z) = \tau_0(z) + s, \quad \ln \frac{1-x}{B} = \lambda s, \tag{21}$$

где B — константа, зависящая от начального условия, а именно $B = 1 - x_0(z)$, следовательно, $1 - x(s,z) = (1 - x_0(z))e^{\lambda s}$, или

$$x(s,z) = 1 - (1 - x_0(z))\,e^{\lambda s}. \tag{22}$$

Наконец, решая третье уравнение в системе (16), получим

$$\frac{d\varphi}{\varphi(s)} = -\mu\,(t(s))\,(1 - x(s))ds, \;\text{ или }\; \ln\frac{\varphi(s)}{C} = -\int\limits_0^s \mu\,(t(s')\,(1 - x(s'))\,ds',$$

откуда $\varphi(s) = C\exp\left[-\int\limits_0^s \mu\,(t(s')\,(1 - x(s'))\,ds'\right]$, где C — константа, зависящая от начального условия $C = \varphi(s)\Big|_{s=0}$, или $C = \varphi_0(z)$, с учетом чего имеем

$$\varphi(s,z) = \varphi_0(z)\exp\left[-\int\limits_0^s \mu\,(t(s'))\,(1 - x(s',z))\,ds'\right]. \tag{23}$$

Формулы (21)–(23) описывают в параметрической форме искомую интегральную поверхность, проходящую через линию (18).

Чтобы найти зависимость φ от t и x, следует, положив $t(s,z)=t$ и $x(s,z)=x$ в соотношениях (21) и (22), разрешить их относительно s и z. Имеем следующую систему уравнений для определения s и z:

$$\begin{aligned} &\tau_0(z)+s=t,\\ &1-(1-x_0(z))e^{\lambda s}=x, \end{aligned} \tag{24}$$

где $\tau_0(z)$ и $x_0(z)$ определяются формулами (18).

Вследствие отличия аналитических выражений для $\tau_0(z)$ и $x_0(z)$ при отрицательных и положительных значениях z следует рассмотреть отдельно каждый из случаев $z<0$ и $z\geq 0$.

В силу формул (18) имеем $\tau_0(z)\equiv 0$ и $x_0(z)=1+z$ при $z<0$. Подставив эти выражения в систему уравнений (24), получим

$$\begin{aligned} &s=t-t_0,\\ &z=-e^{-\lambda t}(1-x). \end{aligned} \tag{25}$$

Итак, каждой паре (t,x) в полосе $\{t\geq 0;\ 0\leq x<1\}$ при условии отрицательности параметра z соответствует пара (s,z), определяемая формулами (25).

Аналогично, если $z\geq 0$, то $\tau_0(z)=z$ и $x_0(z)=1$, и в силу соотношений (24) имеем

$$\begin{aligned} &z+s=t-t_0,\\ &x=0, \end{aligned} \tag{26}$$

что свидетельствует, во-первых, о невозможности однозначного отыскания пары (s,z), во-вторых, о том, что случай $z\geq 0$ соответствует ситуации $x\equiv 1$, которая, очевидно, не представляет практического интереса, поскольку в этом случае линия, через которую проводится интегральная поверхность (14), совпадает с одной из его характеристик. Действительно, в силу соотношений (21)–(23) имеем

$$\begin{aligned} &t(t_0,s,z)=t_0+z+s, \quad z>0, \quad s\geq 0,\\ &x(s,z)\equiv 1,\\ &\varphi(s,z)\equiv 1, \end{aligned} \tag{27}$$

т. е. характеристика (27) совпадает с отрезком линии (18) при $z\geq 0$. В последнем случае нарушено важное требование к линии краевых условий, а именно эта линия не должна совпадать ни с одной из характеристик уравнения (14) и, как следствие, решение уравнения (14) с краевыми условиями (18) при $z\geq 0$ не может быть найдено однозначно. Впрочем, случай $z\geq 0$ можно не рассматривать, так как случай $z<0$ полностью исчерпывает поставленную задачу — решение уравнения (14) относительно функции $\varphi(t_0, t, x)$ и соответствующей ей бесконечномерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (6). Действительно, интегральная поверхность, соответствующая граничной линии (18) при $z < 0$, в силу доказанного проходит через кусок линии (18) при $z \geq 0$, а следовательно, полученная интегральная поверхность удовлетворяет обоим краевым условиям рассматриваемой задачи.

Для получения соответствующих квадратурных формул перейдем от параметрической записи решения уравнения (14) в виде (21)–(23) к координатной, воспользовавшись для такого перехода формулами (25). Обозначив

$$G(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \mu(t')e^{-\lambda(t-t')}dt', \tag{28}$$

получаем

$$s = t - t_0, \quad z = -e^{-\lambda t}(1-x), \quad x_0(z) = 1 - e^{-\lambda t}(1-x),$$

$$x(s,z)\Big|_{z=-e^{-\lambda t}(1-x)} = 1 - e^{-\lambda t}(1-x)e^{\lambda s} = 1-(1-x)e^{-\lambda(t-s)},$$

$$\varphi(s,z)\Bigg|_{\substack{s=t \\ z=e^{-\lambda t}(1-x)}} = \exp\left[-\int\limits_{t_0}^{t}\mu(t')(1-x)e^{-\lambda(t-t')}dt'\right] = e^{-(1-x)G(t)}.$$

Или окончательно:

$$\varphi(t_0,t,x) = e^{-(1-x)G(t)}. \tag{29}$$

Экспоненциальное выражение производящей функции (29) представим следующим образом:

$$e^{-(1-x)G(t)} = e^{-G(t)}e^{xG(t)} = e^{-G(t)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[xG(t)]^k}{k!}. \tag{30}$$

Из формул (28) и (29) следует, что найденное решение $\varphi(t_0,t,x)$, во-первых, удовлетворяет дифференциальному уравнению (14), в чем можно убедиться соответствующей подстановкой, во-вторых, удовлетворяет начальному (12) и граничному (11) условиям.

Сравнивая формулы (10) и (30), приходим к следующим выражениям для $p_k(t_0,t)$:

$$p_k(t_0,t) = e^{-G(t)}\frac{[G(t)]^k}{k!}, \quad k = 0,1,2,\ldots. \tag{31}$$

Таким образом, распределение случайной величины $K(t)$ — числа страховых договоров, находящихся в страховом портфеле в момент времени t, — описывается распределением Пуассона вида (31), где параметр распределения $G(t)$ определяется формулой (28).

Переходя к рассмотрению ситуации, когда страховые договоры могут прекращать действие (покидать страховой портфель) вследствие истечения срока их действия $T_с$, отметим, что при $t > t_0 + T_с$ договоры, заключенные на интервале времени $(t_0,\ t - T_с)$ не оказывают никакого влияния на состояние портфеля в момент времени t (они уже к этому времени прекратят существование). Что же касается договоров, заключенных на интервале $(t - T_с,\ t)$, то их влияние на распределение числа договоров в страховом портфеле в момент времени t по-прежнему описывается распределением (31), в котором $G(t)$ определяется формулой (28), где нижний предел t_0 заменен на $t - T_с$. Объединяя оба случая, $t_0 \le t \le t_0 + T_с$ и $t > t_0 + T_с$, запишем решение задачи в виде

$$G(t) = \int\limits_{\max(t - T_с, t_0)}^{t} \mu(t')e^{-\lambda(t-t')}dt'. \tag{32}$$

Вероятности $p_k(t_0, t)$ определяются, как и в случае $t_0 \le t \le t_0 + T_с$, формулами (31).

Выведенная формула, очевидно, справедлива для постоянного интервала времени действия страховых договоров. Однако, как показывает анализ реальной статистической отчетности по имущественным видам страхования, интервал продолжительности действия страховых договоров может колебаться в широких пределах, а следовательно, более реалистичным является описание интервала $T_с$ как случайной величины с некоторой функцией распределения $F_{T_с}(\theta)$, т.е. $\mathsf{P}\{T_с < \theta\} = F_{T_с}(\theta)$.

Теперь вместо формулы (32) следует рассматривать условную случайную величину $G(t|\theta)$ при условии $T_с = \theta$, т.е.

$$G(t|\theta) = \int\limits_{\max(t_0, t-\theta)}^{t} \mu(t')e^{-\lambda(t-t')}dt'. \tag{33}$$

Наконец, осредняя выражение (33) по возможным значениям θ, получаем следующее выражение:

$$G(t) = \int\limits_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} G(t|\theta)dF_{T_с}(\theta), \tag{34}$$

где $\theta_{\min}$ и $\theta_{\max}$ — соответственно минимально и максимально возможные значения $T_с$.

Полученное решение системы уравнений (6) позволяет найти распределение вероятностей того, что в страховом портфеле компании будут в момент времени t находиться $K(t)$ договоров, заключенных в рамках анализируемого вида страхования $(K(t) = k = 0, 1, 2, \ldots)$. Знание указанного распределения позволяет обратиться к вычислению совокупных страховых выплат на интервале (t_0, t).

Чтобы получить соответствующие формулы, вычислим сначала математическое ожидание числа страховых договоров $\tilde{K}(t)$, находящихся в страховом портфеле в момент времени t:

$$\begin{gathered}\tilde{K}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k(t_0, t) = \lim_{x \to 1} \frac{\partial}{\partial x} \sum_{k=0}^{\infty} x^k p_k(t_0, t) = \\ = \lim_{x \to 1} \frac{\partial}{\partial x} \varphi(t_0, t, x) = \lim_{x \to 1} \frac{\partial}{\partial x} e^{-(1-x)G(t)} = G(t),\end{gathered} \tag{35}$$

где $G(t)$ определяется формулами (33) и (34).

Учитывая аддитивный характер вклада всех удерживаемых в портфеле договоров в интенсивность совокупного потока договоров, покидающих портфель вследствие наступления страховых событий, определим искомую интенсивность

$$\mu_-(t) = \lambda \tilde{K}(t) = \lambda G(t). \tag{36}$$

Полагая, что этот поток является потоком пуассоновского вида с переменным параметром, воспользуемся формулой (3), чтобы найти распределение числа страховых событий на интервале (t_0, t). Имеем

$$\begin{gathered}\Lambda_-(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} \mu_-(t') dt', \\ q_i(t_0, t) = e^{-\Lambda_-(t_0, t)} \frac{[\Lambda_-(t_0, t)]^i}{i!}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots .\end{gathered} \tag{37}$$

Теперь модель аккумуляции, выражающая функцию распределения совокупных страховых выплат по страховым случаям на интервале (t_0, t), записывается как сложно-пуассоновское распределение вида

$$R(w; t_0, t) = q_0(t_0, t) h(w) + \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t_0, t) F^{(i)}(w), \tag{38}$$

где $h(w)$ — вырожденная функция распределения страховых выплат, соответствующая ситуации, когда не наступает ни одного страхового события на интервале (t_0, t):

$$h(w) = \begin{cases} 0, & \text{если } w \le 0, \\ 1, & \text{если } w > 0, \end{cases} \tag{39}$$

— функция Хевисайда, $F^{(i)}(w)$ — i-кратная свертка функции $F_0(w)$ ($F_0(w)$ — функция распределения страховых выплат при единичном страховом событии), соответствующая суммарным страховым выплатам при наступлении i страховых событий.

Теперь, располагая выражением (38) функции распределения совокупных страховых выплат на интервале (t_0, t), вычислим функцию распределения случайной величины дохода V на интервале (t_0, t), считая, что доход от страховой деятельности определяется как разность суммарной страховой премии, собранной на этом интервале, и совокупных страховых выплат.

Суммарная премия $\mathrm{Pr}(t_0, t)$ на интервале (t_0, t) с достаточной точностью описывается детерминированной величиной вида

$$\mathrm{Pr}(t_0, t) = N_0(t)\,\mathsf{Trb}\,\tilde{S}, \tag{40}$$

где $N_0(t)$ — совокупное число договоров, заключенных на интервале (t_0, t); Trb — брутто-ставка страхового тарифа; $\tilde{S}$ — средняя страховая ответственность объектов, страхуемых в рамках рассматриваемого вида страхования.

Величина дохода V определяется как разность

$$V(t_0, t) = \mathrm{Pr}(t_0, t) - W_\Sigma(t_0, t), \tag{41}$$

где $W_\Sigma(t_0, t)$ — случайная величина совокупных страховых выплат, функция распределения которой определяется формулой (38).

На основании соотношений (41) и (38) вычислим функцию распределения случайной величины $V(t_0, t)$. Имеем

$$\begin{gathered} F_V(v; t_0, t) = \mathsf{P}\left\{\mathrm{Pr}(t_0, t) - W_\Sigma(t_0, t) < v\right\} = \\ = \mathsf{P}\left\{W_\Sigma(t_0, t) > \mathrm{Pr}(t_0, t) - v\right\} = 1 - \mathsf{P}\left\{W_\Sigma(t_0, t) < \mathrm{Pr}(t_0, t) - v\right\} = \\ = 1 - R\left(\mathrm{Pr}(t_0, t) - v;\ t_0, t\right). \end{gathered} \tag{42}$$

Формулы (38)–(42) дают искомую модель доходов от страховой деятельности в выбранном виде страхования.

Функция распределения доходов (42) на интервале (t_0, t) позволяет построить “квантильный коридор”, заключающий в себе с заданной вероятностью возможные кривые изменения дохода на интересующем андеррайтера интервале времени.

Задав, например, $P_{\max}$ достаточно близким к единице ($P_{\max} = 0{,}9\ldots 0{,}95$), можно получить оценку верхней границы кривой доходов как результат решения для различных t уравнения вида

$$F_V(v; t_0, t) = P_{\max}, \tag{43}$$

откуда

$$V_{\max}(t_0, t; P_{\max}) = F_V^{-1}(P_{\max}; t_0, t). \tag{44}$$

Аналогично, принимая $P_{\min}$ достаточно малой величиной ($P_{\min} = 0{,}05\ldots 0{,}1$), найдем нижнюю границу кривой дохода:

$$V_{\min}(t_0, t; P_{\min}) = F_V^{-1}(P_{\min}; t_0, t). \tag{45}$$

Пусть $P = 0{,}5 + \varepsilon$ — порядок квантиля и $1 - P = 0{,}5 - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < 0{,}5$, — симметричное ему значение. Тогда получаем две "квантильные" кривые, которые с надежностью P дают верхнюю и нижнюю границы ожидаемого дохода от реализации страховой программы, т. е.

$$\mathsf{P}\left\{V(t_0, t) > V_P(t_0, t)\right\} = \mathsf{P}\left\{V(t_0, t) < V_{1-P}(t_0, t)\right\} = P, \tag{46}$$

где

$$V_P(t_0, t) = F_V^{-1}(P; t_0, t) \tag{47}$$

есть решение уравнения вида

$$F_V(v; t_0, t) = P. \tag{48}$$

Отметим, что построенная функция распределения (42) величины дохода позволяет также изучать случайную величину резерва [5] страховой компании

$$U(t_0, t) = V(t_0, t) + U_0, \tag{49}$$

где U_0 — начальный резерв компании. В частности, функция распределения (42) позволяет решать важную задачу (см. [5, с. 16]) определения коридора U_1, U_2, внутри которого с заданной вероятностью изменяется величина $U(t)$, а также оценивать вероятность p^* того, что в конце интервала наблюдения (t_0, t) величина $U(t)$ будет меньше некоторого заданного значения U_1 при условии $U(t_0) = U_0$:

$$p^* = \mathrm{Prob}\left\{U(t) < U_1 | U(t_0) = U_0\right\}. \tag{50}$$

Выбирая в качестве U_1 критическое значение $U_1 = U_{\text{kr}}$, приходим к оценке вероятности разорения [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ш т р а у б Э. Актуарная математика имущественного страхования, перевод и художественное оформление “КРОКУС-Т”. – М.: АНКИЛ, 2000. – 147 с.
2. Г н е д е н к о Б. В., К о в а л е н к о И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: Наука, 1966. – 431 с.
3. Ф е л л е р В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. – М.: Мир, 1967. – 752 с.
4. С м и р н о в В. И. Курс высшей математики для техников и физиков. Т. 4. – М. – Л.: Гостехтеориздат, 1933. – 754 с.
5. D a y k i n C. D., P e n t i k a n e n T., P e s o n e n M. Practical Risk Theory for actuaries. – London–Glasgow–Weinheim–New York–Tokyo–Melburn–Madras: CHAPMAN & HALL, 1993.

Статья поступила в редакцию 12.04.2005

Сергей Дмитриевич Голубев родился в 1938 г., окончил в 1962 г. Московский авиационный институт им. С. Орджоникидзе. Канд. техн. наук, главный специалист Центра имущественного страхования ОАО “Росно”. Автор 60 научных работ в области автоматического управления.

S.D. Golubev (b. 1938) graduated from Moscow Aviation Institute n. a. S. Ordzhonikidze in 1962. Ph. D. (Eng.), main specialist of Center of Property Insurance of open stock company “OAO “ROSNO”. Author of 60 publications in the field of automatic control.

Людмила Александровна Черная родилась в 1945 г., окончила в 1969 г. Хабаровский политехнический институт. Канд. техн. наук, доцент кафедры “Теория механизмов и машин” МГТУ им. Н.Э. Баумана, главный специалист Центра имущественного страхования ОАО “Росно”. Автор 67 научных работ в области технической механики и актуарных расчетов.

L.A. Chornaya (b. 1945) graduated from the Khabarovsk Polytechnic Institute in 1969. Ph. D. (Eng.), assoc. professor of “Theory of Mechanisms and Machines” department of the Bauman Moscow State Technical University, main specialist of Center of Property Insurance of open stock company “OAO “ROSNO”. Author of 67 publications in the field of technical mechanics and actuarial calculations.

А.Г. Шухов, канд. физ.-мат. наук, актуарий Центра актуарных расчетов ОАО “Росно”.

A.G. Shukhov, D. Sc. (Phys.-Math.), actuarist of Center of Actuarial Calculations of open stock company “OAO “ROSNO”.