

В. В. Д у б и н и н

**ПОЛЫЙ ТОЛСТОСТЕННЫЙ ЦИЛИНДР  
ПРИ ЖЕСТКОМ ЗАКРЕПЛЕНИИ**

*Решены задачи определения напряженно-деформированного состояния полого толстостенного цилиндра при воздействии внутреннего давления и касательной нагрузки, движущихся с постоянной скоростью. Цилиндр деформируется упруго, его внешняя поверхность находится в жесткой оболочке при двух видах посадок. Результаты расчетов сравниваются с напряженно-деформированным состоянием свободного цилиндра и используются при выборе оптимальной конструкции ствола баллистических установок.*

В настоящей работе рассматриваются задачи о воздействии на полый толстостенный цилиндр внутренних нагрузок, движущихся с постоянной скоростью  $v$  вдоль оси цилиндра. Такие задачи об упругой прочности возникают для стволов баллистических установок. Баллистические установки используют для получения высоких скоростей метаемых элементов, имитирующих частицы, движущиеся в космическом пространстве.

При различных условиях использования установок возникают различные задачи прочности [1–3]. Поскольку начальная часть ствола баллистической установки нагружена весьма интенсивно, то для устранения остаточной деформации ствол помещают в оболочку.

В статье рассматривается определение напряженно-деформированного состояния (НДС) упругого полого толстостенного цилиндра, когда на него воздействуют внутреннее давление и касательная нагрузка.

Действие толстой прочной оболочки будем имитировать наличием жесткой стенки. При этом рассмотрим два случая, когда ствол:

- 1) помещен в оболочку на свободной посадке;
- 2) “приварен” к оболочке.

Применяя метод, использованный в работах [2, 3], получим решение этих задач при следующих граничных условиях в подвижных осях координат, движущихся вместе с нагрузкой:

- при  $r = a$  в обоих случаях  $\sigma_r = -p(z)$ ,  $\tau = q(z)$ ,
- при  $r = b$  в первой задаче  $u = 0$ ,  $\tau = 0$ ,
- при  $r = b$  во второй задаче  $u = w = 0$ ,

где  $a$  и  $b$  — внутренний и наружный радиусы цилиндра.

В первой задаче цилиндр помещается в жесткую оболочку (радиальное перемещение  $u$  равно нулю), внутренняя полость которой гладкая (касательное напряжение  $\tau$  равно нулю). Во второй задаче при  $r = b$  равны нулю радиальное  $u$  и осевое  $w$  перемещения. Решения задач ищем в подвижной системе координат с помощью преобразования Фурье в виде несобственных интегралов, представляющих функции  $\sigma_r$  и  $u$  — радиальные напряжение и перемещение,  $\theta$  и  $\tau$  — объемная деформация и касательное напряжение вдоль подвижной осевой координаты  $z$ .

Полное решение первой задачи является суммой решений, полученных отдельно для каждого граничного условия при  $r = a$ , например  $\sigma_r = \sigma_r^{(p)} + \sigma_r^{(q)}$ . Здесь решение  $\sigma_r^{(p)}$  получается для граничных условий  $\sigma_r = -p(z)$ ,  $\tau = 0$ , а решение  $\sigma_r^{(q)}$  получается для граничных условий  $\sigma_r = 0$ ,  $\tau = q(z)$ .

Граничные условия при  $r = b$  равны нулю, как это задано выше. Решения для  $\sigma_r$ ,  $u$ ,  $\theta$ ,  $\tau$  находятся как суммы решений, полученных для каждого граничного условия, а затем по этим суммарным значениям рассчитываются все остальные параметры НДС.

В результате получим решения

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(p)} &= \frac{1}{\pi a} \int_0^\infty \frac{P_{1,2}}{\Delta} \left( -\Delta_{A_1} F_1(r) + \Delta_{B_1} F_2(r) + \Delta_{C_1} F_3(r) - \Delta_{D_1} F_4(r) \right) d\eta, \\ u^{(p)} &= \frac{1}{\pi G} \int_0^\infty \frac{P_{1,2}}{\Delta} \left( -\Delta_{A_1} \Phi_1(r) + \Delta_{B_1} \Phi_2(r) + \Delta_{C_1} \Phi_3(r) - \Delta_{D_1} \Phi_4(r) \right) d\eta, \\ \theta^{(p)} &= -\frac{1 - \varepsilon^2}{\pi a G} \int_0^\infty \frac{P_{1,2} \eta}{\Delta} \left[ -\Delta_{A_1} I_0 \left( \varepsilon \eta \frac{r}{a} \right) + \Delta_{B_1} K_0 \left( \varepsilon \eta \frac{r}{a} \right) \right] d\eta, \\ \tau^{(p)} &= \frac{1}{\pi a} \int_0^\infty \frac{P_{1,2}^0 \eta}{\Delta} \left( -\Delta_{A_1} f_1(r) + \Delta_{B_1} f_2(r) - \Delta_{C_1} f_3(r) + \Delta_{D_1} f_4(r) \right) d\eta. \end{aligned} \quad (1)$$

В формулах (1) имеем

$$P_{1,2} = P_1 \cos \left( \eta \frac{z}{a} \right) + P_2 \sin \left( \eta \frac{z}{a} \right), \quad P_{1,2}^0 = P_1 \sin \left( \eta \frac{z}{a} \right) - P_2 \cos \left( \eta \frac{z}{a} \right),$$

где  $P_1$ ,  $P_2$  получаются при нахождении трансформанты нагрузки в преобразовании Фурье:

$$P_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} p(z) \cos \left( \eta \frac{z}{a} \right) dz, \quad P_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} p(z) \sin \left( \eta \frac{z}{a} \right) dz;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_1(a) & F_2(a) & -F_3(a) & -F_4(a) \\ f_1(a) & f_2(a) & f_3(a) & f_4(a) \\ \Phi_1(b) & \Phi_2(b) & -\Phi_3(b) & -\Phi_4(b) \\ f_1(b) & f_2(b) & f_3(b) & f_4(b) \end{vmatrix},$$

а  $\Delta_{A_1}, \Delta_{B_1}, \Delta_{C_1}, \Delta_{D_1}$  получаются при разложении определителя  $\Delta$  по элементам первой строки:

$$\begin{aligned} F_1(j) &= (1 + \gamma^2)\eta I_0\left(\varepsilon\eta\frac{j}{a}\right) - \frac{2\varepsilon}{j/a} I_1\left(\varepsilon\eta\frac{j}{a}\right), \\ F_2(j) &= (1 + \gamma^2)\eta K_0\left(\varepsilon\eta\frac{j}{a}\right) + \frac{2\varepsilon}{j/a} K_1\left(\varepsilon\eta\frac{j}{a}\right), \\ F_3(j) &= 2\left[\gamma\eta I_0\left(\gamma\eta\frac{j}{a}\right) - \frac{I_1(\gamma\eta j/a)}{j/a}\right], \\ F_4(j) &= -2\left[\gamma\eta K_0\left(\gamma\eta\frac{j}{a}\right) + \frac{K_1(\gamma\eta j/a)}{j/a}\right], \\ \Phi_1(j) &= \varepsilon I_1\left(\varepsilon\eta\frac{j}{a}\right), \quad f_1(j) = -2\varepsilon I_1\left(\varepsilon\eta\frac{j}{a}\right), \\ \Phi_2(j) &= -\varepsilon K_1\left(\varepsilon\eta\frac{j}{a}\right), \quad f_2(j) = 2\varepsilon K_1\left(\varepsilon\eta\frac{j}{a}\right), \\ \Phi_3(j) &= I_1\left(\gamma\eta\frac{j}{a}\right), \quad f_3(j) = (1 + \gamma^2)I_1\left(\gamma\eta\frac{j}{a}\right), \\ \Phi_4(j) &= K_1\left(\gamma\eta\frac{j}{a}\right), \quad f_4(j) = (1 + \gamma^2)K_1\left(\gamma\eta\frac{j}{a}\right). \end{aligned}$$

В выписанных формулах  $I_0, I_1, K_0, K_1$  – модифицированные функции Бесселя,

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sqrt{1 - M_1^2}, \quad \gamma = \sqrt{1 - M_2^2}, \quad M_1 = \frac{v}{C_1}, \\ M_2 &= \frac{v}{C_2}, \quad C_1^2 = \frac{2G + \lambda}{\rho}, \quad C_2^2 = \frac{G}{\rho}, \quad \lambda = \frac{2\mu G}{1 - 2\mu}, \end{aligned}$$

где  $\lambda, G$  – постоянные Ляме,  $\mu$  – коэффициент Пуассона,  $C_1, C_2$  – скорости объемной волны расширения и волны сдвига,  $\rho$  – плотность материала цилиндра,  $j = a, b, r$ .

Для сформулированной задачи проведены расчеты НДС цилиндра в оболочке на скользящей посадке ( $u = 0, \tau = 0$ ) для нормальной

внутренней нагрузки, величина которой меняется по экспоненте, и движущейся с постоянной скоростью. Решение получено в подвижной системе координат.

Запишем нагрузку в подвижной системе координат при  $r = a$ :

$$p(z) = \begin{cases} p_0 e^{\beta z} & \text{при } -\infty < z \leq 0, \\ 0 & \text{при } 0 < z < +\infty; \end{cases}$$

тогда

$$P_{1,2} = \frac{p_0 a}{(\beta a)^2 + \eta^2} \left( \beta a \cos\left(\eta \frac{z}{a}\right) - \eta \sin\left(\eta \frac{z}{a}\right) \right),$$

$$P_{1,2}^0 = \frac{p_0 a}{(\beta a)^2 + \eta^2} \left( \beta a \sin\left(\eta \frac{z}{a}\right) + \eta \cos\left(\eta \frac{z}{a}\right) \right).$$

Расчеты, проведенные по этим формулам, сравниваются с расчетами, проведенными для первой задачи, в которой  $\sigma_r = -p(z)$ ,  $\tau = 0$  при  $r = a$  и  $\sigma_r = \tau = 0$  при  $r = b$  для той же внутренней нагрузки [2]. Сравнение результатов проводится по величине радиального перемещения  $\bar{u}$  и по величине интенсивности напряжений  $\bar{\sigma}_i$ , которые представлены в безразмерном виде:

$$\bar{u} = \frac{u}{a} \cdot \frac{G}{p_0}, \quad \bar{\sigma}_i = \frac{\sigma_i}{p_0}.$$

Эти величины являются наиболее используемыми. Первая —  $\bar{u}$  — является конструктивным параметром, вторая —  $\bar{\sigma}_i$  — энергетическим критерием перехода материала цилиндра в пластическое состояние. Опасность появления пластических деформаций основана на том, что при повторных аналогичных нагрузках остаточные деформации могут нарастать при определенных условиях, а это может привести к изменению размера ствола.

На рис. 1 представлена зависимость радиального перемещения  $\bar{u}$  от безразмерной осевой координаты  $z/a$  для внутренней и наружной поверхностей цилиндра в гладкой жесткой обойме и для свободного цилиндра. Расчеты выполнены для  $\gamma = 0,8$ ,  $\beta a = 1,0$ ,  $b/a = 1,6$ . При этих условиях скорость  $v$  движения нагрузки составляет  $\approx 2000$  м/с.

Кривые 1 и 2 на рис. 1 описывают поведение внутренней и наружной поверхностей свободного ствола, кривой 3 представлена зависимость  $\bar{u} = \bar{u}(z/a)$  при  $r = a$  для ствола в оболочке, при  $r = b$  из граничных условий имеем  $\bar{u} = 0$ .

На рис. 2 приведены зависимости безразмерной интенсивности напряжений  $\bar{\sigma}_i$  от осевой координаты  $z/a$  для внутренней (см. кривые 1, 3) и наружной (см. кривые 2, 4) поверхностей ствола.

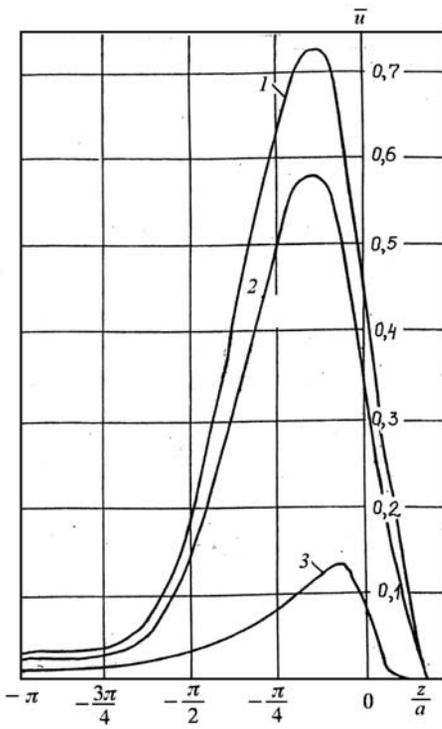


Рис. 1. Радиальные перемещения

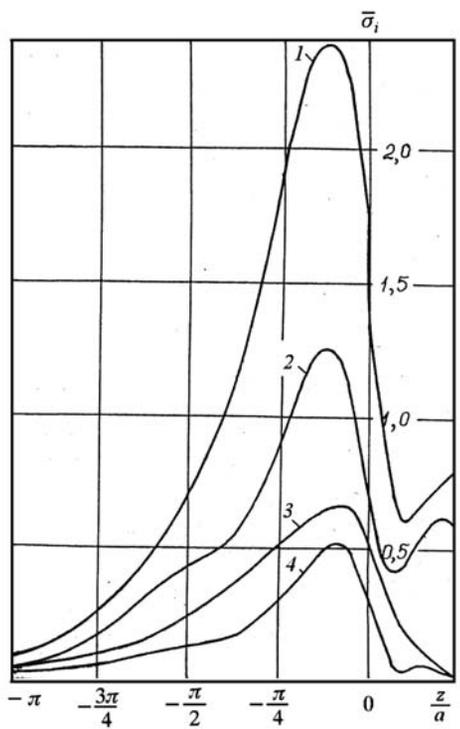


Рис. 2. Интенсивность напряжений

Решение задачи при действии касательной нагрузки имеет вид

$$\sigma_r^{(q)} = \frac{1}{\pi a} \int_0^\infty \frac{Q_{1,2}^0}{\Delta \eta} (\Delta_{A_2} F_1(r) - \Delta_{B_2} F_2(r) - \Delta_{C_2} F_3(r) + \Delta_{D_2} F_4(r)) d\eta,$$

$$\tau^{(q)} = \frac{1}{\pi a} \int_0^\infty \frac{Q_{1,2}}{\Delta} (-\Delta_{A_2} f_1(r) + \Delta_{B_2} f_2(r) - \Delta_{C_2} f_3(r) + \Delta_{D_2} f_4(r)) d\eta.$$

(2)

В выражениях для функций  $u^{(q)}$  и  $\theta^{(q)}$  (см. формулы (1)) используют функции  $Q_{1,2}^0$  вместо  $P_{1,2}$ , знаки меняют на противоположные, величины  $\Delta_{A_1}$ ,  $\Delta_{B_1}$ ,  $\Delta_{C_1}$ ,  $\Delta_{D_1}$  — на величины  $\Delta_{A_2}$ ,  $\Delta_{B_2}$ ,  $\Delta_{C_2}$ ,  $\Delta_{D_2}$  соответственно, которые получаются при разложении определителя  $\Delta$  по элементам второй строки, и подынтегральные выражения делят на  $\eta$ .

В формулах (2) имеем

$$Q_{1,2}^0 = Q_1 \sin\left(\eta \frac{z}{a}\right) - Q_2 \cos\left(\eta \frac{z}{a}\right),$$

$$Q_{1,2} = Q_1 \cos\left(\eta \frac{z}{a}\right) + Q_2 \sin\left(\eta \frac{z}{a}\right),$$

$$Q_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} q(z) \cos\left(\eta \frac{z}{a}\right) dz, \quad Q_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} q(z) \sin\left(\eta \frac{z}{a}\right) dz.$$

Общее решение второй задачи для жесткой посадки цилиндра будет иметь вид

$$\sigma_r = \sigma_r^{(p)} + \sigma_r^{(a)}, \quad u = u^{(p)} + u^{(a)}, \quad \theta = \theta^{(p)} + \theta^{(a)}, \quad \tau = \tau^{(p)} + \tau^{(a)}.$$

Для функций с индексом  $(p)$ , т.е. для задачи с граничными условиями  $\sigma_r = -p(z)$ ,  $\tau = 0$  при  $r = a$  и  $u = 0$ ,  $w = 0$  при  $r = b$ , получаем

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(p)} &= \\ &= \frac{1}{\pi a} \int_0^\infty \frac{P_{1,2}}{\Delta_1} (-\Delta_{A_{11}} F_1(r) + \Delta_{B_{11}} F_2(r) + \Delta_{C_{11}} F_3(r) - \Delta_{D_{11}} F_4(r)) d\eta, \\ u^{(p)} &= \\ &= \frac{1}{\pi G} \int_0^\infty \frac{P_{1,2}}{\Delta_1} (-\Delta_{A_{11}} \Phi_1(r) + \Delta_{B_{11}} \Phi_2(r) + \Delta_{C_{11}} \Phi_3(r) - \Delta_{D_{11}} \Phi_4(r)) d\eta, \\ \theta^{(p)} &= -\frac{1 - \varepsilon^2}{\pi a G} \int_0^\infty \frac{P_{1,2} \eta}{\Delta_1} \left[ -\Delta_{A_{11}} I_0\left(\varepsilon \eta \frac{r}{a}\right) + \Delta_{B_{11}} K_0\left(\varepsilon \eta \frac{r}{a}\right) \right] d\eta, \\ \tau^{(p)} &= \frac{1}{\pi a} \int_0^\infty \frac{P_{1,2}^0}{\Delta_1} (-\Delta_{A_{11}} f_1(r) + \Delta_{B_{11}} f_2(r) - \Delta_{C_{11}} f_3(r) + \Delta_{D_{11}} f_4(r)) d\eta. \end{aligned}$$

Здесь

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} F_1(a) & F_2(a) & -F_3(a) & -F_4(a) \\ f_1(a) & f_2(a) & f_3(a) & f_4(a) \\ \Phi_1(b) & \Phi_2(b) & -\Phi_3(b) & -\Phi_4(b) \\ \varphi_1(b) & \varphi_2(b) & \varphi_3(b) & \varphi_4(b) \end{vmatrix},$$

$$\varphi_1(b) = -I_0\left(\varepsilon \eta \frac{b}{a}\right), \quad \varphi_3(b) = \gamma I_0\left(\gamma \eta \frac{b}{a}\right),$$

$$\varphi_2(b) = -K_0\left(\varepsilon \eta \frac{b}{a}\right), \quad \varphi_4(b) = -\gamma K_0\left(\gamma \eta \frac{b}{a}\right);$$

$\Delta_{A_{11}}, \Delta_{B_{11}}, \Delta_{C_{11}}, \Delta_{D_{11}}$  получаются при разложении определителя  $\Delta_1$  по элементам первой строки.

Формулы для функций  $\sigma^{(q)}, u^{(q)}, \theta^{(q)}, \tau^{(q)}$  получим из формул для функций с индексом  $(p)$ , используя те же поправки, что и в первой задаче.

На рис. 3 приведены результаты расчетов радиального напряжения  $\bar{\sigma}_r$  при действии касательной нагрузки, имеющей вид равнобокой трапеции по координате  $\bar{z}$ :  $\bar{\tau}_{\max} = 1$ , длина верхнего основания трапеции составляет  $c/a = \pi/2$ , длина нижнего основания трапеции равна 2,57,  $b/a = 1,5$ ,  $\gamma = 0,6$ .

При расчетах функций, определяющих НДС цилиндра, находили функции  $Q_1, Q_2$ . При расчетах интегралов определяли пределы подынтегральных функций при  $\eta \rightarrow 0$ , анализировали возможные точки разрыва этих функций, оценивали “хвосты” интегралов на интервале  $[\alpha, +\infty)$ , где  $\alpha$  — большое число.

Решение поставленных задач и проведенные расчеты позволяют определить влияние вида закрепления цилиндра в обойме на его НДС, определить длину обоймы из условия упругой работы материала цилиндра и, следовательно, создать конструкцию облегченного ствола.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. З л а т и н Н. А. и др. Баллистические установки и их применение в экспериментальных исследованиях. — М.: Наука, 1974. — 344 с.
2. Д у б и н и н В. В., М а к с и м о в Г. М., Ш у р ы г и н В. М. Нагружение упругого полого цилиндра “бегущим” с постоянной скоростью импульсом давления // Изв. АН СССР. МТГ. — 1978. — № 1. — С. 57–63.
3. Д у б и н и н В. В., Р е м и з о в А. В. Полый цилиндр в упругой оболочке // Современные естественно-научные и гуманитарные проблемы: Сб. трудов научно-методической конф., посвященной 40-летию НУК ФН. — М.: Логос, 2005. — С. 186–193.

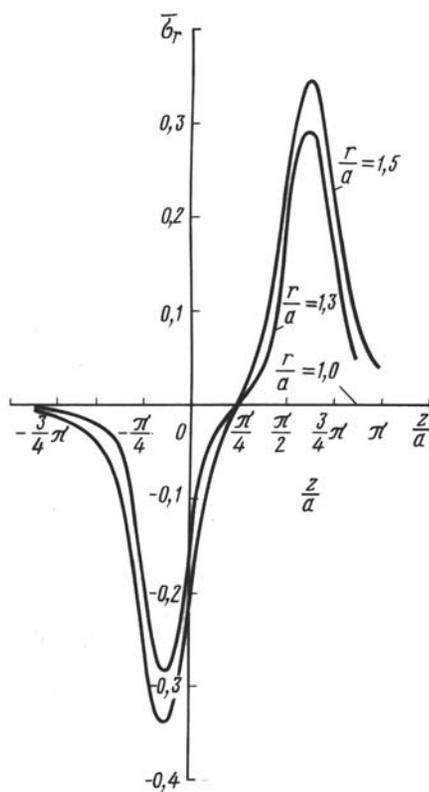


Рис. 3. Радиальные напряжения

Владимир Валентинович Дубинин, родился в 1937 г., заведующий кафедрой “Теоретическая механика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более двухсот научных работ в области динамики сложных механических систем и действия ударных взрывных нагрузок на конструкцию, упругой прочности цилиндрических конструкций и задач, связанных с ударом тел по оболочке, и задач ньютоновского удара.

V.V. Dubinin (b. 1937) — head of “Theoretical Mechanics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 200 publications in the field of dynamics of complex mechanical systems, influence of shock blast loads on a construction, elastic strength of cylindrical constructions and problems associated with strike of bodies on a shell and problems of Newtonian strike.

---

## ЖУРНАЛ “ВЕСТНИК МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА имени Н.Э. БАУМАНА”

В журнале публикуются наиболее значимые результаты фундаментальных и прикладных исследований и совместных разработок, выполненных в МГТУ имени Н.Э. Баумана и других научных и промышленных организациях.

Журнал “Вестник МГТУ имени Н.Э. Баумана” в соответствии с постановлением Высшей аттестационной комиссии Министерства образования Российской Федерации включен в перечень периодических и научно-технических изданий, в которых рекомендуется публикация основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора наук.

Журнал издается в трех сериях: “Приборостроение”, “Машиностроение”, “Естественные науки” — с периодичностью 12 номеров в год.

### Подписка по каталогу “Газеты, журналы” агентства “Роспечать”

Индекс	Наименование серии	Объем выпуска	Подписная цена (руб.)	
		Полугодие	3 мес.	6 мес.
72781	“Машиностроение”	2	150	300
72783	“Приборостроение”	2	150	300
79982	“Естественные науки”	2	150	300

### Подписывайтесь и публикуйтесь!

Адрес редакции журнала “Вестник МГТУ имени Н.Э. Баумана”: 105005, Москва, ул. 2-я Бауманская, д. 5.

Тел.: (095) 263-62-60; 263-60-45.

Факс: (095) 265-42-98; 263-67-07.

E-mail: markir@bmstu.ru, press@bmstu.ru