УДК 517.958

В. Я. Томашпольский

УСТОЙЧИВОСТЬ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН В ОДНОЙ МОДЕЛИ ИЗОТРОПНОГО КОМПОЗИТА

Рассмотрена задача об устойчивости трехпараметрического семейства уединенных волн в изотропном упругом композите. Модель такого композита описывает бесконечную во всех направлениях упругую среду с равномерно распределенными упругими стержнями, расположенными вдоль направления распространения волн. Доказано, что для определенного диапазона скоростей распространения уединенных волн все семейство является орбитально устойчивым. Рассмотренная задача является типичной среди аналогичных задач об устойчивости локализованных импульсов в двухмодовых моделях упругих сред таких, например, как стержни, подверженные сжатию и изгибу.

Изучаются плоские волновые движения в неоднородной нелинейной упругой среде (композите), когда перемещения w_α, их градиенты $u_\alpha = \partial w_\alpha/\partial x$ и скорости частиц v_α, $\alpha = 1, 2, 3$, зависят от одной пространственной переменной — декартовой координаты $x = x_3$ — и времени t. Будем рассматривать квазипоперечные волны в случае, когда u_3 и v_3 постоянны. Эти постоянные можно положить равными нулю без ограничения общности.

Несмотря на то, что движения нелинейного упругого тела описываются гиперболической системой уравнений [7], наличие внутренней неоднородной структуры материала на макроуровне приводит к дисперсии волн [1, 2]. Для упругой среды примем, что нелинейность, анизотропия и дисперсия малы и представляются членами одного порядка. Тогда система основных уравнений может быть записана в виде [6]

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial v_i}{\partial x} = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}\right) + m\frac{\partial^3 u_i}{\partial x^3} = 0, \quad i = 1,\ 2. \qquad (1)$$

Здесь ρ_0 — средняя плотность материала, Φ — упругий потенциал, который задается выражением

$$\Phi = \frac{1}{2} f(u_1^2 + u_2^2) + \frac{1}{2} g(u_2^2 - u_1^2) - \frac{1}{4}\kappa(u_1^2 + u_2^2)^2.$$

Постоянные $g > 0$ и κ характеризуют анизотропию и нелинейность соответственно. Выражения для констант f, g и κ приведены в работе [7]. Будем полагать далее среду изотропной, т. е. $g = 0$. Дисперсионное слагаемое с $m > 0$ появляется в уравнениях движения (второй паре уравнений в (1)) при переходе к описанию неоднородной упругой среды. В настоящей работе в качестве неоднородностей будем рассматривать включенные в упругую матрицу однородно распределенные стержни, имеющие достаточную жесткость на изгиб и расположенные параллельно оси x [6].

Уравнения (1) могут быть записаны в гамильтоновом виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{w} = \mathcal{J}E'(\mathbf{w}),$$

$$E = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big[v_1^2 + v_2^2 + \mu(u_1^2 + u_2^2) - \frac{\kappa}{2\rho_0}(u_1^2 + u_2^2)^2 + \\ + \frac{m}{\rho_0}(\partial_x u_1)^2 + \frac{m}{\rho_0}(\partial_x u_2)^2\Big]\,dx, \tag{2}$$

где $\mu = f/\rho_0$, $\mathbf{w} = \{u_1, u_2, v_1, v_2\}^{\mathrm{т}}$ — неизвестная вектор-функция, штрих обозначает вариационную производную $\delta/\delta\mathbf{w} = \{\delta/\delta u_1, \delta/\delta u_2, \delta/\delta v_1, \delta/\delta v_2\}^{\mathrm{т}}$, а $\mathcal{J}$ — кососимметрический оператор:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}.$$

Очевидно,что гамильтониан E постоянен в силу системы (2). Кроме этого, легко видеть, что функционал

$$Q = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}[u_1 v_1 + u_2 v_2]\,dx$$

также является инвариантом. Формально сохраняющейся величиной является также векторный функционал

$$\mathbf{A} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{w}\,dx.$$

Система уравнений (2) имеет вращательную симметрию:

$$G(\varphi)\mathbf{w} = \exp(\mathcal{A}\varphi)\mathbf{w},\ \ \varphi \in \mathbb{S}^1,$$

где $\mathbb{S}^1$ — окружность, а матрица $\mathcal{A}$ имеет вид

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В результате наличия вращательной симметрии формально сохраняется величина

$$U = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [y_1 v_2 - y_2 v_1 + u_2 w_1 - u_1 w_2]\, dx, \quad \partial_x y_i = u_i, \quad \partial_x w_i = v_i.$$

Гамильтониан E и функционал Q также инвариантны относительно группы вращений.

Солитонные решения системы уравнений (1) представляют собой бегущие волны, быстроубывающие на бесконечности. После подстановки в систему (1) $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\xi)$, где $\xi = x - Vt$, V — постоянная скорость распространения волны, и однократного интегрирования с использованием условий убывания на бесконечности получим

$$v_i = -V u_i, \quad \frac{m}{\rho_0}\ddot{u}_i = (\mu - V^2) u_i - \frac{\kappa}{\rho_0} u_i (u_1^2 + u_2^2). \tag{3}$$

Здесь $\ddot{u}_i$ — вторая производная от u_i по переменной ξ. Уравнения (3) для уединенных волн записываются в эквивалентной форме:

$$E'(\phi_V^\varphi) + VQ'(\phi_V^\varphi) = 0. \tag{4}$$

В уравнении (4) вектор-функция $\phi_V^\varphi = \{u_1^{\text{c}\varphi}, u_2^{\text{c}\varphi}, v_1^{\text{c}\varphi}, v_2^{\text{c}\varphi}\}^{\text{т}}$, $v_i^{\text{c}\varphi} = -V u_i^{\text{c}\varphi}$, обозначает солитонные решения системы (3), которые имеют место при $\mu > V^2$, $\kappa > 0$.

В изотропном случае солитонные решения, ответвляющиеся от нуля, образуют трехпараметрическое семейство; параметрами служат амплитуда (скорость), сдвиг (фаза) и угол φ. Если $\phi_V = \{u_1^c, u_2^c, v_1^c, v_2^c\}^{\text{т}}$ является солитонным решением уравнений (3), то $\phi_V^\varphi = \{u_1^{\text{c}\varphi}, u_2^{\text{c}\varphi}, v_1^{\text{c}\varphi}, v_2^{\text{c}\varphi}\}^{\text{т}} = G(\varphi)\phi_V$, $\varphi \in \mathbb{S}^1$, также является солитонным решением. Поэтому достаточно рассмотреть лишь конкретный случай с фиксированным φ:

$$u_1^{\text{c}} = \pm\sqrt{2\rho_0\kappa^{-1}(\mu - V^2)}\, \operatorname{ch}^{-1}\Big(\sqrt{\rho_0 m^{-1}(\mu - V^2)}\,\xi\Big),$$
$$u_2^{\text{c}} = 0, \quad 0 < V^2 < \mu. \tag{5}$$

В работах [3, 5] были установлены достаточные условия устойчивости двухпараметрического подсемейства (5) при $\varphi = \pi/2$. В настоящей работе этот результат обобщен для всего семейства.

В силу уравнения (4) поведение функционала $E(\mathbf{w}) + VQ(\mathbf{w})$ в окрестности точки $\mathbf{w} = \phi_V^\varphi$ полностью определяется спектральными свойствами самосопряженного оператора

$$\mathcal{H} = E''(\phi_V^\varphi) + VQ''(\phi_V^\varphi).$$

Оператор $\mathcal{H}$ имеет вид

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} H_1 & -\dfrac{2\kappa}{\rho_0}u_1^{\mathrm{c}\varphi}u_2^{\mathrm{c}\varphi} & V & 0 \\ -\dfrac{2\kappa}{\rho_0}u_1^{\mathrm{c}\varphi}u_2^{\mathrm{c}\varphi} & H_2 & 0 & V \\ V & 0 & 1 & 0 \\ 0 & V & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$H_1 = \mu - \frac{3\kappa}{\rho_0}(u_1^{\mathrm{c}\varphi})^2 - \frac{\kappa}{\rho_0}(u_2^{\mathrm{c}\varphi})^2 - \frac{m}{\rho_0}\frac{d^2}{d\xi^2},$$
$$H_2 = \mu - \frac{3\kappa}{\rho_0}(u_2^{\mathrm{c}\varphi})^2 - \frac{\kappa}{\rho_0}(u_1^{\mathrm{c}\varphi})^2 - \frac{m}{\rho_0}\frac{d^2}{d\xi^2}.$$

Непосредственным вычислением определяется, что задача на собственные значения $\mathcal{H}\overline{\psi} = \lambda\overline{\psi}$ сводится к задаче $\mathcal{H}_1\overline{\chi} = \lambda\overline{\chi}$, где

$$\mathcal{H}_1 = \begin{pmatrix} H_{11} & 0 & V & 0 \\ 0 & H_{22} & 0 & V \\ V & 0 & 1 & 0 \\ 0 & V & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$H_{11} = \mu - \frac{3\kappa}{\rho_0}(u_1^{\mathrm{c}})^2 - -\frac{m}{\rho_0}\frac{d^2}{d\xi^2}, \qquad (6)$$

$$H_{22} = \mu - \frac{\kappa}{\rho_0}(u_1^{\mathrm{c}})^2 - \frac{m}{\rho_0}\frac{d^2}{d\xi^2}$$

и $\mathcal{H}_1 = G^{\mathrm{т}}(\varphi)\mathcal{H}G(\varphi)$, $\overline{\psi} = G(\varphi)\overline{\chi}$.

Из формул (6) следует, что задача на собственные значения $\mathcal{H}_1\overline{\chi} = \lambda\overline{\chi}$, $\overline{\chi} = \{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4\}^{\mathrm{т}}$ сводится к двум автономным задачам:

$$
\begin{aligned}
(H_{11} - V^2)\chi_1 &= \left(\lambda - \frac{V^2\lambda}{\lambda - 1}\right)\chi_1,\\
(H_{22} - V^2)\chi_2 &= \left(\lambda - \frac{V^2\lambda}{\lambda - 1}\right)\chi_2,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

а третья и четвертая компоненты $\overline{\chi}$ определяются по формулам: $\chi_{3,4} = V\chi_{1,2}/(\lambda - 1)$.

Спектральная задача (7) приводится к виду

$$
\begin{aligned}
&\left(\mu - V^2 - \frac{3\kappa(u_1^{\mathrm{c}})^2}{\rho_0} - \frac{m}{\rho_0}\frac{d^2}{d\xi^2}\right)\chi_1 = \nu\chi_1,\\
&\left(\mu - V^2 - \frac{\kappa(u_1^{\mathrm{c}})^2}{\rho_0} - \frac{m}{\rho_0}\frac{d^2}{d\xi^2}\right)\chi_2 = \nu\chi_2,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где

$$
\nu = \left(\lambda - \frac{V^2\lambda}{\lambda - 1}\right).
$$

Задача (8) исследована в работе [5]. Спектр λ оператора $\mathcal{H}$ совпадает со спектром $\mathcal{H}_1$ и состоит из:

— простого отрицательного собственного значения;

— двукратного нулевого собственного значения с собственными функциями $\partial_\xi\phi_V^\varphi$ и $\mathcal{A}\phi_V^\varphi$;

— положительной части спектра, отделенной от нуля.

Для нелинейной устойчивости граничных состояний гамильтоновых систем вида (2) ключевую роль играет положительность величины $d(V) = \partial Q(\phi_V)/\partial V$ [4]. Прямым вычислением легко определить, что $d(V) > 0$ для семейства ϕ_V^φ, если $V^2 > \mu/2$.

Из спектральных свойств оператора $\mathcal{H}$ следует, что при $V^2 > \mu/2$ билинейная форма $\langle\mathcal{H}\mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle$ (здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает скалярное произведение в соболевских пространствах $L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R})$) является неотрицательно определенной на линейном подпространстве $L = \{\mathbf{y} \in X = H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R}) \times L_2(\mathbb{R}), \langle Q'(\phi_V^\varphi), \mathbf{y}\rangle = 0\}$, касательном к многообразию $Q(\mathbf{w}) = Q(\phi_V^\varphi)$ в точке $\mathbf{w} = \phi_V^\varphi$. Более того,

$$
\langle\mathcal{H}\mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle \geq c\langle\mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle, \quad \mathbf{y} \in L_1,
\tag{9}
$$

где c — некоторая положительная константа, зависящая от скорости V, $L_1 = L \cap \{\langle\mathbf{y}, \partial_\xi\phi_V^\varphi\rangle = 0, \langle\mathbf{y}, \mathcal{A}\phi_V^\varphi\rangle = 0\}$ [5].

Из соотношения (9) следует более сильное неравенство

$$\langle \mathcal{H}\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \geq c_1 \|\mathbf{y}\|^2, \quad \mathbf{y} \in L_1,$$

где $\|\cdot\|$ обозначает норму в соболевском пространстве X [5].

Эти результаты влекут за собой орбитальную устойчивость семейства уединенных волн (5), а именно трехпараметрическое семейство ϕ_V^φ орбитально устойчиво (устойчиво по форме) для $V^2 > \mu/2$, $\varphi \in \mathbb{S}^1$, т. е. при любом $\epsilon > 0$ для этого диапазона параметров существует $\delta > 0$ такое, что если $\|\mathbf{w}(0) - \phi_V^\varphi\| < \delta$, то

$$\sup_{t>0} \inf_{s\in\mathbb{R}} \inf_{\varphi\in\mathbb{S}^1} \|\mathbf{w}(t) - T(s)G(\varphi)\phi_V^\varphi\| < \epsilon.$$

Здесь[1] $\mathbf{w}(t)$ обозначает непрерывное по времени решение основных уравнений (2) на произвольном полуинтервале $t \in [0, t_0)$ с начальным значением $\mathbf{w}(0)$.

Выводы. Рассмотрены вопросы орбитальной устойчивости, или устойчивости формы, трехпараметрического семейства уединенных волн в идеализированной модели изотропного композита. Показано, что задача о достаточных условиях устойчивости для всего семейства сводится к ранее решенной задаче об устойчивости двухпараметрического подсемейства. Рассмотренная задача является типичной среди аналогичных задач об устойчивости локализованных импульсов в двухмодовых моделях упругих сред таких, например, как стержни, подверженные сжатию и изгибу. В связи с этим результаты настоящей работы, несмотря на свой теоретический характер, могут быть использованы для решения фундаментальных задач об устойчивости локализованных по пространству напряженно-деформированных состояний в стержнях и более сложных моделях композитов, где наряду с нелинейными эффектами важную роль играют эффекты дисперсии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б а х в а л о в Н. С., Э г л и т М. Э. Вариационные свойства осредненных уравнений периодических сред // Тр. МИАН. – 1990. – Т. 192. – С. 5–19.
2. Б а х в а л о в Н. С., Э г л и т М. Э. Эффективные уравнения с дисперсией для распространения волн в периодических средах // Докл. РАН. – 2000. – Т. 370, № 1. – С. 7–10.

[1] Локальное существование и единственность задачи Коши для уравнений (2) имеет место в классах гладких функций. Для настоящего анализа устойчивости достаточно ограничиться рассмотрением непрерывных по времени функций со значениями в X.

3. Bakholdin I., Il'ichev A., Tomaspol'skii V. Stability, instability and interaction of solitary pulses in a composite media // Eur. J. Mech. A Solids. – 2002. – V. 21. – P. 333–346.
4. Grillakis M., Shatah J., Stauss W. Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. I // J. Funct. Anal. – 1987. – V. 74. – P. 160–197.
5. Ильичев А. Т. Устойчивость солитонов в нелинейных композитных средах // ЖЭТФ. – 2000. – Т. 118, вып. 3(9). – С. 720–729.
6. Гвоздовская Н. И., Куликовский А. Г. Квазипоперечные ударные волны в упругих средах с внутренней структурой // Прикладная математика и теоретическая физика. – 1999. – Т. 40, № 2. – С. 174–180.
7. Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Нелинейные волны в упругих средах. – М.: Московский лицей, 1998.

Статья поступила в редакцию 23.03.2005

Виктор Яковлевич Томашпольский родился в 1972 г., окончил в 1994 г. МГУ им. М.В. Ломоносова. Старший преподаватель кафедры "Высшая математика" МГТУ им. Н.Э. Баумана. Специализируется в области нелинейных волн в упругих средах.

V.Ya. Tomashpolsky (b. 1972) graduated from the Lomonosov Moscow State University. Senior teacher of "Higher Mathematics" department of the Bauman Moscow State Technical University. Specializes in the field of nonlinear waves in elastic media.