УДК 368.1:519

С. Д. Голубев, Л. А. Черная

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛЕЗНОСТИ В ЗАДАЧАХ ИМУЩЕСТВЕННОГО СТРАХОВАНИЯ

Рассматривается метод построения функции полезности индивидуума, принимающего решение застраховать свое имущество на условиях рынка имущественного страхования. Выведена система функциональных уравнений, определяющих функцию полезности, и предложен метод их решения.

Во многих задачах принятия решений в условиях риска, в частности в задачах имущественного страхования, возникает необходимость количественного описания вкусов и предпочтений индивидуума, принимающего решение (ИПР). Такое описание успешно достигается в рамках так называемой линейной теории полезности. В силу условий задач анализа рисковых ситуаций ИПР вынужден сравнивать не отдельные значения доходов (ущербов или других значимых для ИПР показателей управляемой им экономической системы), а распределения этих показателей. В линейной теории полезности доказывается [1; 2, гл. 7, п. 7.3], что сравнение функций распределения $F(x)$, заданных на множестве X_0 возможных значений анализируемого показателя, с точки зрения системы предпочтений ИПР эквивалентно сравнению ожидаемой полезности, т. е. распределение $F_1(x)$ считается более предпочтительным, чем $F_2(x)$, если

$$\mathsf{M}\left\{U(x)\,|F_1(x)\right\} = \int\limits_{X_0} U(x)dF_1(x) > \mathsf{M}\left\{U(x)\,|F_2(x)\right\} = \int\limits_{X_0} U(x)dF_2(x), \tag{1}$$

где $U(x)$ — функция полезности, $\mathsf{M}\{\cdot\}$ — математическое ожидание.

Представление ожидаемой полезности в форме функционала вида

$$\int\limits_{X_0} U(x)dF(x), \tag{2}$$

т. е. в форме линейного функционала, обусловило появление термина “линейная” применительно к теории полезности.

Благодаря простоте сравнения распределений в терминах ожидаемой полезности методы теории полезности стали использовать в анализе различного рода рисков, в том числе и страховых, однако трудности построения функций полезности для различных ИПР в определенной мере препятствуют их широкому распространению. Тем не менее, уже в настоящее время в ряде задач страхования и перестрахования весьма затруднительно найти альтернативу показателю ожидаемой полезности при сравнении различных схем страховой (перестраховочной) защиты. Можно также ожидать, что по мере совершенствования и упрощения методов построения функций полезности методы теории полезности будут становиться более популярными и использование показателей полезности в задачах управления рисками станет таким же привычным, как использование ожидаемых значений дохода, прибыли, ущерба и т. д. Основные результаты теории полезности кратко резюмируются следующим образом:

— в рамках аксиоматической теории полезности [2, гл. 7, п. 7.7] сформулирована система аксиом, следствием которых является существование скалярной функции $U(x)$ такой, что для любой пары распределений $F_1(x)$ и $F_2(x)$ выполнено отношение предпочтения — $F_1(x)$ предпочтительнее $F_2(x)$ — тогда и только тогда, когда соблюдается неравенство в формуле (1), при этом функция полезности определяется однозначно с точностью до положительного линейного преобразования, т. е. если $U(x)$ — функция полезности, то любая другая функция полезности имеет вид

$$V(x) = \chi U(x) + C, \tag{3}$$

где $\chi > 0$, а C — произвольная константа;

— разработана диалоговая процедура построения функции полезности, в которой операционист формулирует последовательность “вопросов” к эксперту, устанавливающему в ответах детерминированный эквивалент некоторой лотереи [2, гл. 7, п. 7.5; 3, разд. 2, п. 2.1]; по результатам этой процедуры строится функция полезности в решетчатом (табулированном) виде, которая затем аппроксимируется подходящей аналитической функцией;

— исследована совокупность аналитических функций, которые могут использоваться в качестве функций полезности, в частности, при аппроксимации решетчатых функций, построенных в процессе диалога с экспертом [3, разд. 2, п. 2.4].

Типовая ситуация принятия решения страхователем, т. е. лицом, стремящимся сохранить свое имущество от воздействия разрушительных факторов, в терминах функции полезности формализуется следующим образом.

Пусть страхователь на основании прошлого опыта (данных статистического учета) знает, что на некотором интервале времени (обычно годовом) его имуществу может быть нанесен ущерб Y, который является случайной величиной с функцией распределения $F_Y(y)$, т. е.

$$\mathsf{P}\{Y < y\} = F_Y(y).$$

Случайная величина ущерба Y может принимать только неотрицательные значения, что влечет за собой тождество $F_Y(y) \equiv 0$ для отрицательных значений y.

Относительно функции распределения страхового ущерба $F_Y(y)$ будем предполагать, что существует конечное значение $y = Y_{\min}$, для которого выполняется равенство

$$F_Y(y) = 1, \tag{4}$$

т. е. $Y_{\min}$ — минимальный корень уравнения (4). Принятие данного предположения (которое практически всегда соблюдается) дает возможность ограничиться рассмотрением интегралов с конечными, точнее, от 0 до $Y_{\min}$, пределами при исчислении ожидаемой полезности.

Предположим, что на рынке страховых услуг страховые компании предлагают полную страховую защиту (т. е. полное возмещение ущерба страхователя в случае возникновения на этом интервале такого ущерба) за страховую плату G_0; тогда страхователь, уже знающий функцию полезности $U(x)$, должен сравнить значения ожидаемой полезности в двух вариантах:

1) при отказе от услуг страховой компании;

2) при принятии предложения страховой компании со страховой платой G_0.

В первом варианте поведения ожидаемая полезность составит величину

$$\mathsf{M}\{U(x - Y)\} = \int_0^{Y_{\min}} U(x - y)dF_Y(y), \tag{5}$$

где x — начальный капитал страхователя.

Во втором случае значение полезности составит величину

$$U(x - G_0). \tag{6}$$

Для выбора более выгодного варианта поведения страхователю следует сравнить величины (5) и (6). При этом, если окажется, что

$$U(x - G_0) < \int_0^{Y_{\min}} U(x - y)dF_Y(y), \tag{7}$$

от предложения страховщика следует отказаться (это означает, что затребованная страховщиком плата G_0 слишком высока).

Если

$$U(x - G_0) > \int\limits_0^{Y_{\min}} U(x - y)dF_Y(y), \tag{8}$$

то предложение о страховании имущества целесообразно принять.

Если же

$$U(x - G_0) = \int\limits_0^{Y_{\min}} U(x - y)dF_Y(y), \tag{9}$$

то оба варианта эквивалентны друг другу, т. е. необходим дополнительный анализ для окончательного принятия решения.

Объединяя соотношения (8) и (9), определим необходимое условие страхования имущества в виде нестрогого неравенства

$$U(x - G_0) \geq \int\limits_0^{Y_{\min}} U(x - y)dF_Y(y). \tag{10}$$

Итак, если страхователь руководствуется принципом максимизации ожидаемой полезности, то ему следует принять предложение страховщика, если соблюдается неравенство (10). Однако страхователь не всегда занимается построением своей функции полезности $U(x)$, тем не менее, в силу определенных соображений страхователь может (считает для себя целесообразным) принять предложение о страховании своего имущества на описанных выше условиях. В этом случае, по-видимому, можно утверждать, что гипотетическая функция полезности такого страхователя удовлетворяет условию (10). Более того, условие (10) может быть использовано для построения функции полезности.

Для решения нестрогого неравенства (10) запишем его в эквивалентной форме:

$$U(x - G_0) = \int\limits_0^{Y_{\min}} U(x - y)dF_Y(y) + C\psi(x), \tag{11}$$

где $\psi(x)$ — неотрицательная функция, $\psi(x) \geq 0$; C — положительная константа.

Естественно, что функция $\psi(x)$ и константа C могут быть выбраны многими способами, причем указанная неоднозначность вытекает из множественности решений исходного соотношения (10).

Отметим, что существует один частный случай, когда множественность решений соотношения (10) устраняется, а именно если G_0 — предельно допустимое значение страховой платы, при которой страхователь еще соглашается на предложение страховой компании о защите имущества. В этом частном случае нестрогое неравенство (10) обращается в равенство, т. е. имеет место уравнение (9). С учетом данного замечания необходимую "добавку" $C\psi(x)$ в правой части неравенств (8) и (10) можно интерпретировать как меру "запаса по полезности", которую предоставляет страховая компания клиентам прежде, чем у страхователей возникнут сомнения в целесообразности страхования. Обычно страховщики, работающие в том или ином сегменте страхового рынка, могут достаточно точно оценить предельное (максимально допустимое) значение G_0, выше которого начнется отток клиентов. Поэтому с точки зрения страховщика представляет интерес оценка функции полезности страхователя в некоторой ограниченной окрестности максимально допустимой страховой платы.

Полученное уравнение (11) относится к классу неоднородных интегро-разностных уравнений. Его решение, естественно, можно найти в виде суммы:

$$U(x) = U_0(x) + \Delta U(x), \tag{12}$$

где $U_0(x)$ — решение соответствующего однородного интегро-разностного уравнения вида

$$U_0(x - G_0) = \int\limits_0^{Y_{\min}} U_0(x - y)dF_Y(y), \tag{13}$$

а $\Delta U(x)$ — поправка к базовому решению уравнения (13).

Чтобы составить уравнение относительно $\Delta U(x)$, подставим выражение (12) в уравнение (11). Проведя необходимые сокращения с учетом соотношения (13), получим

$$\Delta U(x - G_0) = \int\limits_0^{Y_{\min}} \Delta U(x - y)dF_Y(y) + C\psi(x). \tag{14}$$

Итак, функция полезности (12) определяется как сумма решений однородного интегро-разностного уравнения (13) и неоднородного интегро-разностного уравнения (14).

Однородное уравнение (13) будем интерпретировать как условие вычисления максимальной страховой платы G_0 при условии, что функция полезности страхователя есть $U_0(x)$. Поскольку значение страховой платы G_0 в уравнении (13) не зависит от начального капитала x, то данное обстоятельство позволяет предположить, что $U_0(x)$ описывается экспоненциальной функцией (характеристическим свойством функции полезности экспоненциального вида является отсутствие влияния начального капитала x на предпочтения лица, принимающего решение, в частности на величину предельной страховой платы G_0 [3, п. 2.4]). Сказанное позволяет искать решение уравнения (13) в виде

$$U_0(x) \approx -e^{sx}, \tag{15}$$

где s — константа, подлежащая определению.

Чтобы функция полезности (15) отвечала традиционным требованиям, предъявляемым к функциям полезности лица, не склонного к риску, нужно, чтобы параметр s имел вещественное отрицательное значение [3, п. 2.4]. Подставляя выражение (15) в уравнение (13), получаем характеристическое уравнение относительно s:

$$-e^{s(x-G_0)} = -e^{sx} \int\limits_0^{Y_{\min}} e^{-sy} dF_Y(y),$$

откуда после сокращения получаем

$$e^{-sG_0} = \int\limits_0^{Y_{\min}} e^{-sy} dF_Y(y). \tag{16}$$

Чтобы доказать существование отрицательного числа $\tilde{s}$, обращающего в тождество равенство (16), а также определить условия существования такого числа, исследуем поведение левой и правой частей равенства в области $s \le 0$.

Отметим сначала, что точка $s = 0$ всегда является простым корнем уравнения (16). Действительно, левая часть уравнения (16) равна 1 при $s = 0$. Вычислим

$$\lim_{s \to 0} \int\limits_0^{Y_{\min}} e^{-sy} dF_Y(y) = \int\limits_0^{Y_{\min}} dF_Y(y) = F_Y(Y_{\min}) - F_Y(0). \tag{17}$$

Поскольку возможный ущерб Y является неотрицательной величиной, то с учетом непрерывности функции $F_Y(y)$ слева естественно принять $F_Y(0) = 0$. С учетом свойства (4) функций распределения имеем $F_Y(Y_{\min}) = 1$ и формула (17) принимает вид

$$\lim_{s \to 0} \int\limits_0^{Y_{\min}} e^{-sy} dF_Y(y) =1. \tag{18}$$

Итак, левая и правая части уравнения (16) в точке $s = 0$ одновременно становятся равными 1.

Далее, исследуем поведение левой и правой частей уравнения (16) при малых по модулю отрицательных значениях s. Учитывая аналитичность левой и правой частей уравнения (16), вычислим их производные по s в точке $s = 0$. Имеем

$$\lim_{s\to 0} \frac{\partial}{\partial s} e^{-sG_0} = -G_0,$$

$$\lim_{s\to 0} \frac{\partial}{\partial s} \int\limits_0^{Y_{\min}} e^{-sy} dF_Y(y) = \lim_{s\to 0}\left(-\int\limits_0^{Y_{\min}} e^{-sy} y dF_Y(y)\right) = \qquad (18a)$$

$$= -\int\limits_0^{Y_{\min}} y dF_Y(y) = -m_Y,$$

где m_Y — математическое ожидание случайной величины Y. Поскольку страховая плата G_0 складывается из средних страховых выплат m_Y и рисковой надбавки, то всегда имеет место соотношение

$$G_0 > m_Y, \qquad (19)$$

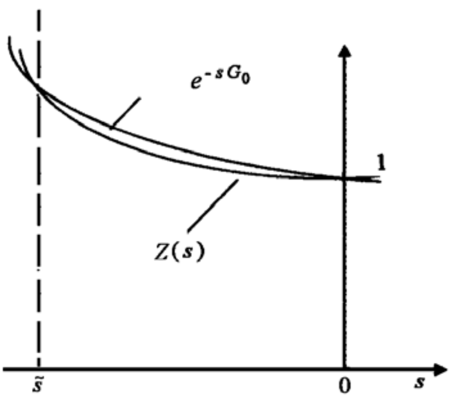
или

$$-G_0 < -m_Y \quad . \qquad (20)$$

Следовательно, во-первых, при малых по модулю отрицательных значениях s имеем неравенство (см. рисунок)

$$e^{-sG_0} > Z(s), \qquad (21)$$

где $Z(s) = \int\limits_0^{Y_{\min}} e^{-sy} dF_Y(y)$, во-вторых, производные левой и правой частей уравнения (16) в точке $s = 0$ отличны между собой, а отсюда следует, что корень $s = 0$ — простой.



Решение характеристического уравнения (16)

Далее предположим, что на страховую плату наложено ограничение вида

$$G_0 + a < Y_{\min}, \qquad (22)$$

где a — некоторая положительная константа.

Покажем, что при выполнении условия (22), где $Y_{\min}$ — минимальный корень уравнения (4), существует отрицательный корень уравнения (16). Для этого необходимо доказать, что при достаточно больших по модулю отрицательных значениях s имеет место неравенство

$$Z(s) > e^{-sG_0}. \tag{23}$$

Следующая цепочка соотношений приводит к требуемому неравенству:

$$\begin{aligned} Z(s) &= \int\limits_0^{Y_{\min}} e^{-sy} dF_Y(y) = \\ &= \int\limits_0^{G_0+a} e^{-sy} dF_Y(y) + \int\limits_{G_0+a}^{Y_{\min}} e^{-sy} dF_Y(y) > \int\limits_{G_0+a}^{Y_{\min}} e^{-sy} dF_Y(y) > \\ &> e^{-s(G_0+a)} \int\limits_{G_0+a}^{Y_{\min}} dF_Y(y) = e^{-s(G_0+a)}[1 - F_Y(G_0+a)] > e^{-sG_0}. \end{aligned} \tag{24}$$

Так как в силу неравенства (22) и определения $Y_{\min}$ выражение в квадратной скобке формулы (24) есть неотрицательная величина, т. е.

$$1 - F_Y(G_0 + a) > 0, \tag{25}$$

следовательно, при достаточно больших по модулю отрицательных значениях s имеем

$$[1 - F_Y(G_0 + a)]e^{-sa} > 1. \tag{26}$$

Отметим, что ограничительные условия (19) и (22) на выбор G_0 естественно интерпретировать как условия согласованности назначения страховой платы с вероятностной характеристикой страхового ущерба. При нарушении указанных условий, например при попытке назначить страховую плату G_0 больше, чем $Y_{\min}$, сформулированная задача определения $U_0(x)$ в форме (15) не будет иметь решения, в частности кривая $Z(s)$ в отрицательной области “не настигнет” e^{-sG_0}.

Поскольку при малых по модулю отрицательных значениях s имеет место неравенство (21), а при больших по модулю отрицательных значениях s знак неравенства (23) меняется на противоположный, то в силу непрерывности левой и правой частей характеристического уравнения (16) существует такое отрицательное значение $s = \tilde{s}$, в котором

$$e^{-sG_0} = \int\limits_0^{Y_{\min}} e^{-sy} dF_Y(y).$$

Отметим, что получаемое в форме (15) решение однородного интегрального уравнения (13) справедливо на всей вещественной оси, т. е. на интервале $(-\infty, +\infty)$.

Переходя к решению неоднородного интегро-разностного уравнения (14), применим преобразование Лапласа. Выбор преобразования Лапласа как метода решения неоднородного интегро-разностного уравнения (14) влечет за собой ограничение на область определения "поправки" $\Delta U(x)$. А именно, при использовании одностороннего преобразования Лапласа "поправка" $\Delta U(x)$ определяется только в области положительных значений x. С практической точки зрения этот недостаток оказывается не слишком ограничительным, так как величина поправки, как показывают расчеты для реальных функций распределения $F_Y(y)$, весьма невелика по сравнению с $U_0(x)$, тем более, она будет несущественной в области $x < 0$, где $U_0(x)$ быстро возрастает по модулю при $x \to -\infty$. Воспользовавшись тем свойством преобразования Лапласа, что свертке оригиналов соответствует произведение изображений, получаем

$$\Delta \bar{U}(p) e^{-pG_0} = \Delta \bar{U}(p) p \bar{F}_Y(p) + C\bar{\psi}(p), \tag{27}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta \bar{U}(p) &= \int\limits_0^{\infty} e^{-px} \Delta U(x) dx, \\ \bar{F}_Y(p) &= \int\limits_0^{\infty} e^{-px} F_Y(x) dx, \\ \bar{\psi}(p) &= \int\limits_0^{\infty} e^{-px} \psi(x) dx. \end{aligned} \tag{28}$$

Разрешим уравнение (27) относительно $\Delta \bar{U}(p)$:

$$\Delta \bar{U}(p) = \frac{C\bar{\psi}(p)}{e^{-pG_0} - p\bar{F}_Y(p)}. \tag{29}$$

Прежде чем приступить к обращению изображения (29), установим следующий факт: полюсы изображения (29), обусловленные нулями знаменателя, совпадают с корнями характеристического уравнения (16). Чтобы доказать это, преобразуем правую часть уравнения (16), заменив в ней s на p. Имеем

$$\int\limits_0^\infty e^{-py} dF_Y(y) = e^{-py} F_Y(y)\Big|_0^\infty + p\int\limits_0^\infty e^{-py} F_Y(y)dy. \qquad (30)$$

При $\operatorname{Re} p > 0$ первое слагаемое в формуле (30) обращается в нуль, второе слагаемое в силу формул преобразования Лапласа (28) равно $p\bar{F}_Y(p)$. Таким образом, уравнение

$$e^{-pG_0} - p\bar{F}_Y(p) = 0 \qquad (31)$$

с точностью до обозначения переменной совпадает с характеристическим уравнением (16). Выше было установлено, что корнями уравнения (31) являются, во-первых, $p = 0$, во-вторых, некоторая вещественная отрицательная величина $p = \tilde{s}$.

Сложности обращения (29) состоят, во-первых, в том, что данное выражение не является дробно-рациональной функцией, а относится к классу так называемых мероморфных функций, т. е. таких аналитических функций, которые в качестве особенностей имеют только полюсы, причем их число конечно в любой ограниченной области [6], во-вторых, операционист обычно располагает только графическим изображением функции распределения $F_Y(y)$, но не имеет аналитического выражения его изображения по Лапласу $\bar{F}_Y(p)$. Поэтому при оперировании выражением $\bar{F}_Y(p)$ предполагается, что оно определено интегральным преобразованием (28), реализуемым средствами компьютерного моделирования. Чтобы воспользоваться теоремой разложения оригинала при обращении такого рода изображений, следует убедиться в его правильности в правой полуплоскости комплексного переменного p ($\operatorname{Re} p \geq 0$): данное изображение убывает при $|p| \to \infty$ не медленнее, чем $\dfrac{1}{p}$. В рассматриваемом случае правильность изображения (29) может быть достигнута только за счет соответствующего выбора его оригинала $\psi(p)$, поскольку сомножитель $(e^{-pG_0} - p\bar{F}_Y(p))^{-1}$ при $p \to \infty$ стремится к бесконечности. Действительно, $\lim\limits_{p\to\infty} e^{-pG_0} = 0$, и по теореме о предельных значениях оригинала

$$\lim_{p\to\infty} p\bar{F}_Y(p) = \lim_{x\to 0} F_Y(x) = F_y(0) = 0,$$

откуда и следует высказанное утверждение.

Из предельного соотношения

$$\lim_{p\to\infty} p\bar{F}_Y(p) = \lim_{x\to 0} F_Y(x) = 0$$

следует, что $\bar{F}_Y(p)$ при больших значениях p ведет себя как функция $\dfrac{1}{p^\alpha}$, где $\alpha > 1$.

В анализе поведения $\bar{F}_Y(p)$, а следовательно, всего выражения (29) можно продвинуться дальше, если принять дополнительное предположение, что производная оригинала $F_Y(x)$ существует в точке $x = +0$, причем, естественно, эта производная положительна. Применяя предельное соотношение к производной функции $F_Y(x)$, можно записать

$$\lim_{p\to\infty} p^2 \bar{F}_Y(p) = \lim_{x\to 0} F'_Y(x) = A, \quad A > 0. \tag{32}$$

Из формулы (32) следует, что $\bar{F}_Y(p)$ при больших p ведет себя как функция $\dfrac{1}{p^2}$:

$$\bar{F}_Y(p) \approx \frac{A}{p^2}. \tag{33}$$

Теперь с учетом формулы (33) изображение (29) при больших p ведет себя как

$$\Delta\bar{U}(p) \approx \frac{1}{e^{-pG_0} - p\cdot\dfrac{A}{p^2}} \cdot \bar{\psi}(p). \tag{34}$$

Покажем, как можно добиться правильности выражения (34) при больших p в частном случае, когда в качестве $\psi(x)$ выбрана плотность гамма-распределения вида

$$\psi(x) = p_\gamma(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} 0, & \text{если} \ \ x < 0, \\ \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & \text{если} \ \ x \geq 0, \end{cases} \tag{35}$$

где α и β — параметры распределения, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Изображение по Лапласу оригинала (35) определяется с привлечением формул (28):

$$\bar{\psi}(p) = \int\limits_0^\infty e^{-px}\psi(x)dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-(p+\beta)x}dx.$$

Сделав замену переменных $y = (p+\beta)x$, $dx = \dfrac{dy}{p+\beta}$, получим

$$\bar{\psi}(p) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{(p+\beta)^\alpha}\int\limits_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-y}dy = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\frac{\beta^\alpha}{(p+\beta)^\alpha} = \frac{\beta^\alpha}{(p+\beta)^\alpha}. \tag{36}$$

Если в формулах (35), (36) параметр α выбран из условия $\alpha > 2$, то формулу (29) можно записать в следующем виде:

$$\Delta\bar{U}(p) = \frac{1}{\left[e^{-pG_0} - p\bar{F}_Y(p)\right](p+\beta)^2}\frac{C}{(p+\beta)^{\alpha-2}}. \tag{37}$$

В полученном выражении первый сомножитель является правильной мероморфной функцией, т. е. при больших p ведет себя как $\dfrac{1}{p}$. В этом можно убедиться, если воспользоваться формулой (34):

$$\frac{1}{\left(e^{-pG_0} - p\cdot\dfrac{A}{p^2}\right)(p+\beta)^2} = \frac{1}{(p+\beta)^2 e^{-pG_0} - \dfrac{Ap(p+\beta)^2}{p^2}} \approx -\frac{1}{Ap}. \tag{38}$$

Второй сомножитель в формуле (37) в качестве оригинала имеет масштабированную плотность гамма-распределения (37) с параметрами $\alpha - 2$ и β. Отметим здесь, что "отщепление" от $\bar{\psi}(p)$ сомножителя $\dfrac{1}{(p+\beta)^2}$ с присоединением его к изображению $\dfrac{1}{e^{-pG_0} - p\bar{F}_Y(p)}$ обеспечивает его правильность, что позволяет непосредственно перейти к его обращению. Вместе с тем, "отщепление" сомножителя $\dfrac{1}{(p+\beta)^\gamma}$, где $\gamma > 2$, нецелесообразно, поскольку усложняет вычисление составляющей оригинала, соответствующего кратному корню $p = -\beta$.

Рассмотрим процедуру вычисления оригинала, соответствующего изображению

$$\overline{W}(p) = \frac{1}{\left[e^{-pG_0} - p\bar{F}_Y(p)\right](p+\beta)^2}. \tag{39}$$

В силу формулы (38) $\bar{W}(p)$ удовлетворяет требованиям, предъявляемым к изображениям в форме мероморфных функций, что позволяет воспользоваться теоремой разложения оригинала с использованием вычетов данной функции, а именно

$$w(x) = \sum_k \operatorname*{res}_{p_k} \overline{W}(p)e^{px}. \tag{40}$$

Здесь полюсами являются следующие точки:

1) $p_1 = 0$;

2) $p_2 = \tilde{s}$;

3) $p_3 = -\beta$ — двукратный полюс.

Вычет в точке $p_1 = 0$ вычисляется по известной [6, гл. 6, п. 82] формуле

$$\operatorname*{res}_{p_1} \overline{W}(p)e^{px} = \lim_{p\to 0} \frac{pe^{px}}{e^{-pG_0} - \int\limits_0^{Y_{\min}} e^{-px} dF_Y(x)}, \tag{41}$$

где выражение $p\bar{F}_Y(p)$ заменено в соответствии с формулой (30) его интегральным эквивалентом. Раскрывая неопределенность в точке $p = 0$ по правилу Лопиталя, получаем

$$\operatorname*{res}_{p_1} \bar{W}(p)e^{px} = \lim_{p\to 0} \frac{1}{\left[-G_0 e^{-pG_0} + \int\limits_0^{Y_{\min}} e^{-px} x dF_Y(x)\right] \beta^2} \cdot e^{px} =$$
$$= \frac{1}{\beta^2\left(-G_0 + m_Y\right)} = C_1. \tag{42}$$

Аналогично вычисляется вычет в полюсе $p_2 = \tilde{s}$:

$$\operatorname*{res}_{p_2} \overline{W}(p)e^{px} = \lim_{p\to s} \frac{p - \tilde{s}}{\left[e^{-pG_0} - \int\limits_0^{Y_{\min}} e^{-px} dF_Y(x)\right] (p+\beta)^2} \cdot e^{px} = C_2 e^{\tilde{s}x}, \tag{43}$$

где

$$C_2 = \frac{1}{\left[-G_0 e^{-\tilde{s}G_0} - \int\limits_0^{Y_{\min}} e^{-\tilde{s}x} dF_Y(x)\right] (\tilde{s}+\beta)^2}.$$

Вычет в полюсе $p_3 = -\beta$ вычисляется с учетом его кратности, равной двум [6, гл. 6, п. 82]:

$$\operatorname*{res}_{p_3} \overline{W}(p)e^{px} = \lim_{p\to -\beta} \frac{\partial}{\partial p} \frac{(p+\beta)^2 e^{px}}{\left[e^{-pG_0} - \int\limits_0^{Y_{\min}} e^{-px} dF_Y(x)\right] (p+\beta)^2} =$$
$$= C_{31} x e^{-\beta x} + C_{30} e^{-\beta x}, \tag{44}$$

где

$$C_{31}=\frac{1}{e^{\beta G_0}-\int\limits_0^{Y_{\min}} e^{\beta x}dF_Y(x)},$$

$$C_{30}=-\frac{\left[-G_0e^{\beta G_0}+\int\limits_0^{Y_{\min}} e^{\beta x}xdF_Y(x)\right]}{\left[e^{\beta G_0}-\int\limits_0^{Y_{\min}} e^{\beta x}dF_Y(x)\right]^2}.$$

Подставляя выражения (42)–(44) в формулу разложения (40), получаем оригинал $w(x)$ в виде

$$w(x)=C_1+C_2e^{\tilde{s}x}+C_{31}xe^{-\beta x}+C_{30}e^{-\beta x}. \tag{45}$$

Оригинал изображения $\dfrac{\beta^{\alpha-2}}{(p+\beta)^{\alpha-2}}$ в силу формул (35) и (36) есть, очевидно, также плотность гамма-распределения с параметрами $\alpha-2$ и β, т. е.

$$L^{-1}\left\{\frac{\beta^{\alpha-2}}{(p+\beta)^{\alpha-2}}\right\}=p_\gamma(x;\ \alpha-2,\ \beta)=\psi_1(x). \tag{46}$$

Поскольку удалось найти оригиналы каждого из сомножителей выражения (37), то можно вернуться к вычислению оригинала изображения $\Delta\bar{U}(p)$, воспользовавшись тем известным фактом, что произведению изображений соответствует свертка оригиналов:

$$\Delta U(x)=C\int\limits_0^x w(x-y)\psi_1(y)dy, \tag{47}$$

где $w(x)$ определяется формулой (45), а $\psi_1(x)$ — формулой (46).

Подстановка формул (45), (46) и (35) в соотношение (47) дает следующий результат:

$$\Delta U(x)=C\Bigg[C_1\int\limits_0^x\psi_1(y)dy+C_2\int\limits_0^x e^{\tilde{s}(x-y)}\psi_1(y)dy+$$
$$+C_{31}\int\limits_0^x(x-y)e^{-\beta(x-y)}\psi_1(y)dy+C_{30}\int\limits_0^x e^{-\beta(x-y)}\psi_1(y)dy\Bigg]. \tag{48}$$

Вычислим входящие в формулу (48) интегралы:

$$\int_0^x \psi_1(y)dy = \int_0^x p_\gamma(y;\ \alpha-2,\ \beta)dy = F_\gamma(x;\ \alpha-2,\ \beta), \tag{49}$$

где $F_\gamma(\cdot)$ – интегральный закон гамма-распределения с параметрами $\alpha-2$ и β,

$$\int_0^x e^{\tilde{s}(x-y)}\psi_1(y)dy = \frac{e^{\tilde{s}x}}{\Gamma(\alpha-2)}\int_0^x y^{\alpha-3}e^{-(\tilde{s}+\beta)y}dy =$$
$$= e^{\tilde{s}x}\int_0^x p_\gamma(y;\ \alpha-2,\ \beta+\tilde{s})dy = e^{\tilde{s}x}F_\gamma(x;\ \alpha-2,\ \beta+\tilde{s}), \tag{50}$$

где $F_\gamma(x;\ \alpha-2,\ \beta+\tilde{s})$ — функция гамма-распределения с параметрами $\alpha-2$ и $\beta+\tilde{s}$,

$$\int_0^x (x-y)e^{-\beta(x-y)}\psi_1(y)dy =$$
$$= \frac{e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha-2)}\int_0^x (x-y)y^{\alpha-3}e^{-\beta y}dy = \frac{e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha-2)}\int_0^x (x-y)y^{\alpha-3}dy =$$
$$= \frac{e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha-2)}\int_0^x x\left(1-\frac{y}{x}\right)x^{\alpha-3}\left(\frac{y}{x}\right)^{\alpha-3}xd\left(\frac{y}{x}\right).$$

Сделав замену переменных $\dfrac{y}{x}=\xi$, получим

$$\int_0^x (x-y)e^{-\beta(x-y)}\psi_1(y)dy = \frac{e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha-2)}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-\xi)\xi^{\alpha-3}d\xi =$$
$$= \frac{e^{-\beta x}x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-2)}\int_0^1 (1-\xi)\xi^{\alpha-3}d\xi. \tag{51}$$

Последнее выражение можно преобразовать, воспользовавшись интегралом Эйлера первого рода [7, гл. 6, п. 140]:

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt, \tag{52}$$

где $\mathrm{B}(p, q)$ — бета-функция, выражаемая через гамма-функцию формулой [7, гл. 6, п. 140]

$$\mathrm{B}(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{53}$$

С учетом формул (52) и (53) интеграл $\int\limits_0^1 (1-\xi)\xi^{\alpha-3} d\xi$ преобразуется к виду

$$\int\limits_0^1 (1-\xi)\xi^{\alpha-3} d\xi = \mathrm{B}(2, \alpha-2) = \frac{\Gamma(2)\Gamma(\alpha-2)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\Gamma(\alpha-2)}{\Gamma(\alpha)}, \tag{54}$$

так как $\Gamma(2) = 1! = 1$ в силу свойств гамма-функции. С учетом приведенных формул имеем

$$\int\limits_0^x (x-y) e^{-\beta(x-y)} \psi_1(y) dy = \\ = \frac{e^{-\beta x} x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-2)} \frac{\Gamma(\alpha-2)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} = p_\gamma(x;\ \alpha, \beta), \tag{55}$$

$$\int\limits_0^x e^{-\beta(x-y)} \psi_1(y) dy = \\ = \frac{e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha-2)} \int\limits_0^x e^{\beta y} y^{\alpha-3} e^{-\beta y} dy = \frac{e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha-2)} \int\limits_0^x y^{\alpha-3} dy = \\ = \frac{e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha-2)} \frac{1}{(\alpha-2)} x^{\alpha-2} = \frac{x^{\alpha-2} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha-1)} = p_\gamma(x;\ \alpha-1,\ \beta). \tag{56}$$

Подставляя выражения сверток в формулу (48), получаем окончательное выражение “поправки”:

$$\Delta U(x) = C\big[C_1 F_\gamma(x;\ \alpha-2,\ \beta) + C_2 F_\gamma(x;\ \alpha-2,\ \beta+\tilde{s}) + \\ + C_{31} p_\gamma(x;\ \alpha, \beta) + C_{30} p_\gamma(x;\ \alpha-1,\ \beta)\big]. \tag{57}$$

Полученные выражения позволяют сформулировать ограничения на выбор параметров плотности гамма-распределения (35), а именно в дополнение к указанному ранее ограничению $\alpha > 2$ параметр β следует выбирать из условия

$$\beta + \tilde{s} > 0, \tag{58}$$

так как в противном случае, если окажется, что $\beta + \tilde{s} < 0$, выражения (50) и (56) потеряют смысл (в функциях плотности и гамма-распределения параметры могут принимать только положительные значения).

Важная особенность полученного результата (57) состоит в том, что входящие в эту формулу функции плотности и гамма-распределения вычисляются с помощью встроенных функций в программно-математической среде пакетов типа Mathcad, что существенно облегчает компьютерную реализацию описанных алгоритмов.

Другой вывод, вытекающий из полученных результатов, состоит в том, что эвристически принятое описание "запаса по полезности" в форме плотности гамма-распределения (35) оказалось весьма удобным с точки зрения возможности получения расчетных формул в форме стандартных функций (в замкнутой аналитической форме вычисляются свертки (49), (50), (55) и (56)), причем на возможность получения такого рода формул не влияет конкретный характер исходных данных (принятые ограничительные условия на исходные данные рассмотренной задачи не являются обременительными с точки зрения использования предлагаемых вычислительных алгоритмов, легко проверяются и обычно выполняются в практических задачах).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение / Под ред. Н.Н. Воробьева. – М.: Наука, 1970. – 707 с.
2. Де Грот М. Оптимальные статистические решения / Под ред. Ю.В. Линника и А.М. Кагана. – М.: Мир, 1974. – 491 с.
3. Голубин Ю. А. Математические модели в теории страхования: построение и оптимизация. – М.: Анкил, 2001. – 160 с.
4. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. – М.: ГИТТЛ, 1957. – 552 с.
5. Бауэрс Н., Гербер Х., Джонс Д., Несбитт С., Хикман Дж. Актуарная математика / Под ред. В.К. Малиновского. – М.: Янус-К, 2001. – 409 с.
6. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
7. Смирнов В. И. Курс высшей математики для техников и физиков. Т. 3. М.–Л.: ГТТИ, 1933. – 754 с.

Статья поступила в редакцию 07.02.2005