

С. П. Б а б е н к о, А. В. Б а д ь и н

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ РОЖДЕНИЯ И ОСЕДАНИЯ ПРОДУКТОВ ГИДРОЛИЗА ГАЗООБРАЗНОГО ГЕКСАФТОРИДА УРАНА $UF_6$ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

*Рассмотрена одна из проблем использования  $UF_6$  в производственных процессах — возникновение в воздухе рабочих помещений избыточного количества токсичных для человека веществ: урана и фтора, которые присутствуют в воздухе в газовой и аэрозольной фазах. Предложена математическая модель формирования этих веществ в воздухе и оседания их на человека и производственные поверхности в условиях пренебрежения силой тяжести, действующей на частицы. Принятые допущения ограничивают использование результатов расчета оценкой доз, получаемых человеком от газовых фаз токсичных веществ.*

Известно, что работа с гексафторидом урана ( $UF_6$ ) в производственных условиях сопряжена со следующими трудностями:

1) возможны аварийные выбросы из емкостей, в которых он содержится [1];

2) в повседневном производственном процессе имеет место незначительное поступление газообразного гексафторида урана в воздух рабочего помещения [2].

На производстве  $UF_6$  хранится в жидком или твердом агрегатном состоянии при температуре, близкой к температуре плавления  $t = 64,02^\circ C$  [3, с. 210]. Над гексафторидом урана находятся его насыщенные пары. При  $t = 58^\circ C$  давление насыщенных паров  $p_{н.п}$  больше атмосферного давления  $p_{атм}$ . При  $t = 54,6^\circ C$  имеем  $p_{н.п} = 760$  мм рт.ст. [3], что соответствует концентрации пара  $n = \frac{p}{kT} = 2,8 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ .

Если газ при выбросе выходит из емкости узкой струей, то он резко охлаждается до комнатной температуры. При  $t = 23^\circ C$  имеем  $p_{н.п} = 100$  мм рт.ст., что соответствует  $n = 3,27 \cdot 10^{24} \text{ м}^{-3}$ . Это означает, что масса пара

$$\Delta m_{п} = \left( n \Big|_{t=54,6^\circ C} - n \Big|_{t=23^\circ C} \right) V m_{\text{МОЛ}}$$

должна сконденсироваться. Здесь  $V$  — объем узкой струи. Конденсат массой  $\Delta m_{п}$  выделится только в объеме струи.

В 1976 г. сотрудниками Института биофизики Минздрава (Москва) и Электрохимического завода (Зеленогорск) проведен эксперимент, моделирующий аварийную ситуацию. Согласно этому эксперименту выброшенный газ мгновенно распределяется по всему объему помещения. Из сказанного выше ясно, что получаемая человеком доза токсичных веществ, образующихся при аварийной ситуации в воздухе рабочих помещений, зависит от расположения человека относительно источника выброса и от времени его пребывания в аварийных условиях. При этом могут быть следующие характерные случаи:

- 1) человек не оказался на пути струи и быстро покинул аварийное помещение;
- 2) человек оказался на пути струи;
- 3) человек не оказался на пути струи, но в течение длительного времени  $\Delta t$  находился в помещении, в котором произошел выброс гексафторида урана, быстро распространившегося по всему его объему.

В первом случае пребывание человека в аварийном помещении может не повлечь серьезные последствия. Во втором случае человек оказывается под струей выходящего пара.

В модельном эксперименте выброс реализовывался за время  $\Delta t = 50$  с, что соответствовало скорости выброса массы гексафторида урана  $\frac{\Delta m_{\text{UF}_6}}{\Delta t} = 0,76 \frac{\text{г}}{\text{с}}$  и скорости выброса массы фтора  $\frac{\Delta m_{\text{F}}}{\Delta t} = 0,25 \frac{\text{г}}{\text{с}}$ . В таком случае смертельную дозу фтора  $m_{\text{Fcm}} = 0,33$  г

[4] человек получает за время  $\frac{m_{\text{Fcm}} \Delta t}{\Delta m_{\text{F}}} = 1,32$  с. Следовательно, попадание человека в струю означает его неминуемую гибель. Это подтвердилось в реальной аварийной ситуации [3].

И наконец, третий случай, когда человек оказывается в атмосфере равномерно распределенного по объему помещения пара, подробно рассматривается в настоящей статье. В этом случае для теоретической оценки доз, получаемых человеком, предлагается математическая модель процесса оседания  $\text{UF}_6$  и продуктов его гидролиза в закрытом помещении.

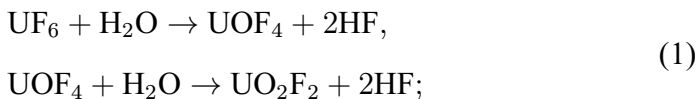
Математическая модель сначала строится для самого общего случая, а затем совершается переход ко все более конкретным ситуациям.

Рассмотрим ограниченную область  $Q$  в трехмерном евклидовом пространстве с кусочно гладкой границей  $\partial Q$  и временной промежуток  $(t_0, t_1)$ . В основу математической модели положим следующие физические допущения:

- 1) в области  $Q$  на временном промежутке  $(t_0, t_1)$  находятся вещества  $\text{UF}_6$  (газ),  $\text{UOF}_4$  (газ),  $\text{UO}_2\text{F}_2$  (газ),  $\text{UO}_2\text{F}_2$  (аэрозоль),  $\text{HF}$  (газ),  $\text{HF}$  (аэрозоль), пары  $\text{H}_2\text{O}$ ;

2) концентрация молекул паров  $\text{H}_2\text{O}$  с течением времени не меняется;

3) вещества  $\text{UF}_6$  (газ) и  $\text{UOF}_4$  (газ) взаимодействуют с парами  $\text{H}_2\text{O}$  в соответствии с уравнениями



4) вещества  $\text{UO}_2\text{F}_2$  и  $\text{HF}$  переходят из газообразного состояния в состояние аэрозоля;

5) вещество  $\text{UF}_6$  (газ) поступает в область  $Q$  из внешних источников (частицы вещества возникают в каждой точке области  $Q$ );

6) вещества  $\text{UF}_6$  (газ),  $\text{UOF}_4$  (газ),  $\text{UO}_2\text{F}_2$  (газ),  $\text{UO}_2\text{F}_2$  (аэрозоль),  $\text{HF}$  (газ),  $\text{HF}$  (аэрозоль) выводятся из области  $Q$  за счет воздухообмена (частицы вещества исчезают в каждой точке области  $Q$ );

7) вещества  $\text{UF}_6$  (газ),  $\text{UOF}_4$  (газ),  $\text{UO}_2\text{F}_2$  (газ),  $\text{UO}_2\text{F}_2$  (аэрозоль),  $\text{HF}$  (газ),  $\text{HF}$  (аэрозоль) диффузионно осаждаются на границу области  $Q$ ;

8) вещества  $\text{UF}_6$  (газ),  $\text{UOF}_4$  (газ),  $\text{UO}_2\text{F}_2$  (газ),  $\text{UO}_2\text{F}_2$  (аэрозоль),  $\text{HF}$  (газ),  $\text{HF}$  (аэрозоль) дрейфуют в пространстве (под действием силы тяжести и силы сопротивления среды или вместе с потоком воздуха).

Введем обозначения:  $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$  — концентрации молекул соответственно  $\text{UF}_6$  в газообразном состоянии,  $\text{UOF}_4$  в газообразном состоянии,  $\text{UO}_2\text{F}_2$  в газообразном состоянии,  $\text{UO}_2\text{F}_2$  в составе аэрозоля,  $\text{HF}$  в газообразном состоянии,  $\text{HF}$  в составе аэрозоля;  $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6$  — коэффициенты диффузии веществ  $\text{UF}_6$  (газ),  $\text{HF}$  (газ),  $\text{UO}_2\text{F}_2$  (газ),  $\text{UO}_2\text{F}_2$  (аэрозоль),  $\text{HF}$  (газ),  $\text{HF}$  (аэрозоль) соответственно;  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5, \vec{v}_6$  — скорости дрейфа веществ  $\text{UF}_6$  (газ),  $\text{UOF}_4$  (газ),  $\text{UO}_2\text{F}_2$  (газ),  $\text{UO}_2\text{F}_2$  (аэрозоль),  $\text{HF}$  (газ),  $\text{HF}$  (аэрозоль) соответственно. Тогда плотность потока числа частиц вещества с номером  $k$  в точке  $\vec{x}$  области  $Q$  в момент времени  $t$  временного промежутка  $(t_0, t_1)$  можно записать в виде

$$\vec{j}_k(\vec{x}, t) = -D_k \text{grad}(n_k) + \vec{v}_k n_k.\tag{2}$$

Если обозначить через  $\psi_k$  плотность мощности источников и стоков вещества с номером  $k$  (т. е. число частиц, возникающих в единице объема области  $Q$  в единицу времени), то уравнение непрерывности для вещества с номером  $k$  можно записать в виде

$$\text{div}(\vec{j}_k) + \frac{\partial}{\partial t} n_k = \psi_k,$$

или

$$\operatorname{div}(-D_k \operatorname{grad}(n_k) + \vec{v}_k n_k) + \frac{\partial}{\partial t} n_k = \psi_k. \quad (3)$$

Для рассматриваемой физической ситуации функция  $\psi_k$  определяется следующими процессами:

- 1) подтеканием производственного газа  $\text{UF}_6$ ;
- 2) воздухообменом;
- 3) гидролизом;
- 4) коагуляцией.

Пусть  $F_1$  — плотность мощности внешних источников вещества  $\text{UF}_6$  (газ),  $K$  — кратность воздухообмена,  $\tau_1, \tau_2$  — периоды полувыведения соответственно веществ  $\text{UF}_6$  (газ),  $\text{UOF}_4$  (газ) за счет гидролиза,  $\tau_3, \tau_5$  — периоды полувыведения веществ  $\text{UO}_2\text{F}_2$  (газ),  $\text{HF}$  (газ) за счет коагуляции,  $\lambda_1 = (\ln 2)/\tau_1$ ,  $\lambda_2 = (\ln 2)/\tau_2$ ,  $\lambda_3 = (\ln 2)/\tau_3$ ,  $\lambda_5 = (\ln 2)/\tau_5$ . Тогда плотность мощности источников и стоков для каждого вещества можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -(\lambda_1 + K) n_1 + F_1, & \psi_2 &= \lambda_1 n_1 - (\lambda_2 + K) n_2, \\ \psi_3 &= \lambda_2 n_2 - (\lambda_3 + K) n_3, & \psi_4 &= \lambda_3 n_3 - K n_4, \\ \psi_5 &= 2\lambda_1 n_1 + 2\lambda_2 n_2 - (\lambda_5 + K) n_5, & \psi_6 &= \lambda_5 n_5 - K n_6. \end{aligned}$$

Здесь процессы гидролиза, коагуляции и воздухообмена обуславливают появление в выражении для  $\psi_k$  слагаемых, пропорциональных  $n_1, \dots, n_k$ , а подтекание дает слагаемое, не зависящее от  $n_1, \dots, n_k$ .

Пусть  $D_k \equiv \text{const}$ ,  $\vec{v}_k \equiv \text{const}$ . Тогда система уравнений непрерывности может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} n_1 &= D_1 \Delta n_1 - (\vec{v}_1, \operatorname{grad}(n_1)) - (\lambda_1 + K) n_1 + F_1(\vec{x}, t), \\ \frac{\partial}{\partial t} n_2 &= D_2 \Delta n_2 - (\vec{v}_2, \operatorname{grad}(n_2)) + \lambda_1 n_1 - (\lambda_2 + K) n_2, \\ \frac{\partial}{\partial t} n_3 &= D_3 \Delta n_3 - (\vec{v}_3, \operatorname{grad}(n_3)) + \lambda_2 n_2 - (\lambda_3 + K) n_3, \\ \frac{\partial}{\partial t} n_4 &= D_4 \Delta n_4 - (\vec{v}_4, \operatorname{grad}(n_4)) + \lambda_3 n_3 - K n_4, \\ \frac{\partial}{\partial t} n_5 &= D_5 \Delta n_5 - (\vec{v}_5, \operatorname{grad}(n_5)) + 2\lambda_1 n_1 + 2\lambda_2 n_2 - (\lambda_5 + K) n_5, \\ \frac{\partial}{\partial t} n_6 &= D_6 \Delta n_6 - (\vec{v}_6, \operatorname{grad}(n_6)) + \lambda_5 n_5 - K n_6, \quad \vec{x} \in Q, \quad t \in (t_0, t_1). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\Delta$  — оператор Лапласа.

Для однозначного определения функций  $n_k$  заданы следующие дополнительные условия, соответствующие рассматриваемой физической ситуации:

$$\begin{aligned} n_1(\vec{x}, t_0) &= n_{1,0}(\vec{x}), \quad \vec{x} \in Q, \\ n_k(\vec{x}, t_0) &= 0, \quad k = \overline{2, 6}, \quad \vec{x} \in Q, \\ \alpha_k(\vec{x}, t) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} n_k(\vec{x}, t) + \beta_k(\vec{x}, t) n_k(\vec{x}, t) &= r_k(\vec{x}, t), \\ k = \overline{1, 6}, \quad \vec{x} \in \partial Q, \quad t &\in (t_0, t_1). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $\frac{\partial}{\partial \vec{n}}$  — производная по направлению внешней нормали. Первые два равенства представляют собой начальные условия ( $n_{1,0}$  — начальная концентрация молекул UF<sub>6</sub>). Третье равенство представляет собой краевые условия третьего рода [5, 6]. Если  $r_k = 0$ , то это условие отражает тот факт, что на границе области частицы вещества частично поглощаются и частично отражаются. Если  $r_k \neq 0$ , то это условие описывает поступление вещества внутрь области через ее границу. Коэффициенты  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  удовлетворяют условиям  $|\alpha_k| + |\beta_k| \neq 0$ ,  $\alpha_k \beta_k \geq 0$  (эти условия связаны с теоремой о единственности решения);  $r_k$  — некоторая функция, вид которой зависит от конкретной задачи.

Задачу (4), (5) можно разбить на две независимые задачи: для урансодержащих и фторсодержащих продуктов. Это облегчает процесс решения.

Для урансодержащих продуктов получаем следующую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} n_1 &= D_1 \Delta n_1 - (\vec{v}_1, \text{grad}(n_1)) - (\lambda_1 + K) n_1 + F_1(\vec{x}, t), \\ \frac{\partial}{\partial t} n_2 &= D_2 \Delta n_2 - (\vec{v}_2, \text{grad}(n_2)) + \lambda_1 n_1 - (\lambda_2 + K) n_2, \\ \frac{\partial}{\partial t} n_3 &= D_3 \Delta n_3 - (\vec{v}_3, \text{grad}(n_3)) + \lambda_2 n_2 - (\lambda_3 + K) n_3, \\ \frac{\partial}{\partial t} n_4 &= D_4 \Delta n_4 - (\vec{v}_4, \text{grad}(n_4)) + \lambda_3 n_3 - K n_4, \quad \vec{x} \in Q, \quad t \in (t_0, t_1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_1(\vec{x}, t_0) &= n_{1,0}(\vec{x}), \quad \vec{x} \in Q, \\ n_k(\vec{x}, t_0) &= 0, \quad k = \overline{2, 4}, \quad \vec{x} \in Q, \\ \alpha_k(\vec{x}, t) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} n_k(\vec{x}, t) + \beta_k(\vec{x}, t) n_k(\vec{x}, t) &= r_k(\vec{x}, t), \\ k = \overline{1, 4}, \quad \vec{x} \in \partial Q, \quad t &\in (t_0, t_1). \end{aligned}$$

Для фторсодержащих продуктов получаем следующую задачу:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}n_1 &= D_1\Delta n_1 - (\vec{v}_1, \text{grad}(n_1)) - (\lambda_1 + K)n_1 + F_1(\vec{x}, t), \\ \frac{\partial}{\partial t}n_2 &= D_2\Delta n_2 - (\vec{v}_2, \text{grad}(n_2)) + \lambda_1 n_1 - (\lambda_2 + K)n_2, \\ \frac{\partial}{\partial t}n_5 &= D_5\Delta n_5 - (\vec{v}_5, \text{grad}(n_5)) + 2\lambda_1 n_1 + 2\lambda_2 n_2 - (\lambda_5 + K)n_5, \\ \frac{\partial}{\partial t}n_6 &= D_6\Delta n_6 - (\vec{v}_6, \text{grad}(n_6)) + \lambda_5 n_5 - Kn_6, \quad \vec{x} \in Q, \quad t \in (t_0, t_1);\end{aligned}$$

$$n_1(\vec{x}, t_0) = n_{1,0}(\vec{x}), \quad \vec{x} \in Q,$$

$$n_k(\vec{x}, t_0) = 0, \quad k = 2, 5, 6, \quad \vec{x} \in Q,$$

$$\alpha_k(\vec{x}, t) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} n_k(\vec{x}, t) + \beta_k(\vec{x}, t) n_k(\vec{x}, t) = r_k(\vec{x}, t),$$

$$k = 1, 2, 5, 6, \quad \vec{x} \in \partial Q, \quad t \in (t_0, t_1).$$

Нетрудно записать систему уравнений, частным случаем которой будет система уравнений (4):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}n_k &= D_k\Delta n_k - (\vec{v}_k, \text{grad}(n_k)) + \sum_{m=1}^k a_{k,m}n_m + F_k(\vec{x}, t), \\ k &= \overline{1, N}, \quad \vec{x} \in Q, \quad t \in (t_0, t_1).\end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $N$  — произвольное натуральное число;  $D_k$  — коэффициент диффузии частиц вещества с номером  $k$ ;  $\vec{v}_k$  — скорость дрейфа частиц вещества с номером  $k$ ;  $a_{k,m}$  — коэффициенты, описывающие процессы гидролиза, коагуляции и воздухообмена,  $a_{k,m} = 0$  при  $k < m$ ;  $F_k$  — плотность мощности внешних источников вещества с номером  $k$ .

Системы для урансодержащих и фторсодержащих продуктов тоже являются частными случаями системы (6). Дополнительные условия к системе уравнений (6) имеют вид

$$\begin{aligned}n_k(\vec{x}, t_0) &= n_{k,0}(\vec{x}), \quad k = \overline{1, N}, \quad \vec{x} \in Q, \\ \alpha_k(\vec{x}, t) \frac{\partial}{\partial \vec{n}} n_k(\vec{x}, t) + \beta_k(\vec{x}, t) n_k(\vec{x}, t) &= r_k(\vec{x}, t), \\ k &= \overline{1, N}, \quad \vec{x} \in \partial Q, \quad t \in (t_0, t_1).\end{aligned} \quad (7)$$

Первое равенство представляет собой начальные условия ( $n_{k,0}$  — начальная концентрация молекул вещества с номером  $k$ ). Второе равенство представляет собой краевые условия третьего рода. Если  $r_k = 0$ , то это условие отражает тот факт, что на границе области молекула

вещества частично поглощаются и частично отражаются. Если  $r_k \neq 0$ , то это условие описывает поступление вещества внутрь области через ее границу. Коэффициенты  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  удовлетворяют условиям  $|\alpha_k| + |\beta_k| \neq 0$ ,  $\alpha_k \beta_k \geq 0$  (эти условия связаны с теоремой о единственности решения);  $r_k$  — некоторые функции, вид которых зависит от конкретной задачи.

До сих пор рассматривалась задача для ограниченной области  $Q$ . Однако некоторые физические ситуации, рассматриваемые при определении доз, получаемых человеком, работающим с гексафторидом урана, удобнее описывать, используя задачу для неограниченной области. В этом случае в список дополнительных условий нужно включить следующее условие регулярности решения: можно указать такие числа  $C, \delta \geq 0$ , что  $|n_k(\vec{x}, t)| \leq C e^{\delta t}$  при  $k = \overline{1, N}$ ,  $\vec{x} \in Q$ ,  $t \in (t_0, t_1)$ .

Перейдем к рассмотрению конкретных ситуаций. Предположим, что мы хотим изучить процессы, происходящие в пространстве между полом и потолком комнаты и вдали от боковых стенок. В этом случае мы можем считать, что  $Q$  — это плоский слой, задаваемый следующими условиями:  $x, y$  — произвольные вещественные числа,  $0 < z < h$ .

Особый интерес с точки зрения физики процесса и простоты исследования краевой задачи представляет случай, когда можно считать, что оседание токсичных веществ происходит только под действием диффузии. Поскольку диффузия — медленный процесс, то на временном промежутке в несколько суток можно с достаточной точностью считать, что процессы, происходящие вблизи пола, не зависят от процессов, происходящих вблизи потолка. В этом случае можно считать, что  $Q$  — это полупространство, задаваемое следующими условиями:  $x, y$  — произвольные вещественные числа,  $z > 0$ . Мы рассматриваем временной промежуток  $(0, +\infty)$ , т. е. полагаем  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = +\infty$ . Кроме того, мы считаем, что величины  $\alpha_k, \beta_k$  не зависят от переменной  $t$ . В этих условиях задача (6), (7) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} n_k = D_k \Delta n_k + \sum_{m=1}^k a_{k,m} n_m + F_k(x, y, z, t), \quad (8)$$

$$k = \overline{1, N}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad z \in (0, +\infty), \quad t \in (0, +\infty);$$

$$n_k(x, y, z, 0) = n_{k,0}(x, y, z),$$

$$k = \overline{1, N}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad z \in (0, +\infty),$$

$$\left( -\alpha_k(x, y) \frac{\partial}{\partial z} n_k + \beta_k(x, y) n_k \right) \Big|_{z=0} = r_k(x, y, t), \quad (9)$$

$$k = \overline{1, N}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad t \in (0, +\infty),$$

$$\exists C \geq 0 \exists \delta \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \forall z \in (0, +\infty) \forall t \in (0, +\infty)$$

$$(|n_k(x, y, z, t)| \leq C e^{\delta t}), \quad k = \overline{1, N}.$$

Будем считать, что величины  $F_k$ ,  $n_{k,0}$ ,  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$ ,  $r_k$  не зависят от переменных  $x$ ,  $y$ . Тогда величины  $n_k$  также не зависят от переменных  $x$ ,  $y$ . Соответственно, задача (8), (9) приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} n_k = D_k \frac{\partial^2}{\partial z^2} n_k + \sum_{m=1}^k a_{k,m} n_m + F_k(z, t), \quad (10)$$

$$k = \overline{1, N}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad z \in (0, +\infty), \quad t \in (0, +\infty);$$

$$n_k(z, 0) = n_{k,0}(z), \quad k = \overline{1, N}, \quad z \in (0, +\infty),$$

$$\left( -\alpha_k \frac{\partial}{\partial z} n_k + \beta_k n_k \right) \Big|_{z=0} = r_k(t), \quad (11)$$

$$k = \overline{1, N}, \quad t \in (0, +\infty),$$

$$C \geq 0 \exists \delta \geq 0 \forall z \in (0, \infty) \forall t \in (0, +\infty)$$

$$(|n_k(z, t)| \leq C e^{\delta t}), \quad k = \overline{1, N}.$$

Вначале такая задача решалась в условиях пренебрежения процессами коагуляции продуктов гидролиза в воздухе производственного помещения. Соответственно, считалось, что все рассматриваемые вещества присутствуют в атмосфере рабочего помещения только в составе газов. Будем отдельно описывать урансодержащие и фторсодержащие продукты. Для этого полагаем  $N = 3$ . Для упрощения выкладок предположим, что для всех веществ величины  $D_k$ ,  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  одинаковы, т. е.  $D_1 = D_2 = D_3 = D$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta$ .

Для урансодержащих продуктов матрица  $\{a_{k,m}\}$  имеет вид

$$\{a_{k,m}\} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что справедливы равенства  $a_{1,m} + a_{2,m} + a_{3,m} = 0$  при  $m = \overline{1, 3}$ .

Для фторсодержащих продуктов матрица  $\{a_{k,m}\}$  имеет вид

$$\{a_{k,m}\} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 & 0 \\ 2\lambda_1 & 2\lambda_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что справедливы равенства  $4a_{1,m} + 2a_{2,m} + a_{3,m} = 0$  при  $m = \overline{1, 3}$ .



Иными словами, в обоих случаях можно указать такие натуральные числа  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , что  $\sigma_1 a_{1,m} + \sigma_2 a_{2,m} + \sigma_3 a_{3,m} = 0$  при  $m = \overline{1, 3}$ . Особый интерес представляет физический смысл коэффициентов  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Нетрудно заметить, что  $\sigma_k$  — число интересующих нас атомов в молекуле вещества с номером  $k$ . Действительно, в случае урансодержащих продуктов нас интересуют атомы урана. В молекулах  $UF_6, UOF_4, UO_2F_2$  содержится по одному атому урана. Далее, в случае фторсодержащих продуктов нас интересуют “активные” атомы фтора (т. е. те, которые могут перейти в свободное состояние и нанести вред человеку). В молекуле  $UF_6$  содержится четыре “активных” атома фтора, в молекуле  $UOF_4$  — два “активных” атома фтора, в молекуле  $HF$  — один “активный” атом фтора. Итак, задача (10), (11) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} n_k = D \frac{\partial^2}{\partial z^2} n_k + \sum_{m=1}^k a_{k,m} n_m + F_k(z, t), \quad (12)$$

$$k = \overline{1, 3}, \quad z \in (0, +\infty), \quad t \in (0, +\infty);$$

$$n_k(z, 0) = n_{k,0}(z), \quad k = \overline{1, 3}, \quad z \in (0, +\infty),$$

$$\left( -\alpha \frac{\partial}{\partial z} n_k + \beta n_k \right) \Big|_{z=0} = r_k(t), \quad k = \overline{1, 3}, \quad t \in (0, +\infty), \quad (13)$$

$$C \geq 0 \exists \delta \geq 0 \forall z \in (0, +\infty) \forall t \in (0, +\infty)$$

$$(|n_k(z, t)| \leq C e^{\delta t}), \quad k = \overline{1, 3}.$$

Введем обозначения:  $n = \sigma_1 n_1 + \sigma_2 n_2 + \sigma_3 n_3, F = \sigma_1 F_1 + \sigma_2 F_2 + \sigma_3 F_3, n_0 = \sigma_1 n_{1,0} + \sigma_2 n_{2,0} + \sigma_3 n_{3,0}, r = \sigma_1 r_1 + \sigma_2 r_2 + \sigma_3 r_3$ . Очевидно, функция  $n$  удовлетворяет следующей задаче:

$$\frac{\partial}{\partial t} n = D \frac{\partial^2}{\partial z^2} n + F(z, t), \quad z \in (0, +\infty), \quad t \in (0, +\infty); \quad (14)$$

$$n(z, 0) = n_0(z), \quad z \in (0, +\infty),$$

$$\left( -\alpha \frac{\partial}{\partial z} n + \beta n \right) \Big|_{z=0} = r(t), \quad t \in (0, +\infty), \quad (15)$$

$$C \geq 0 \exists \delta \geq 0 \forall z \in (0, +\infty) \forall t \in (0, +\infty)$$

$$(|n(z, t)| \leq C e^{\delta t}).$$

Пусть  $r \equiv 0$ . Тогда задача (14), (15) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} n = D \frac{\partial^2}{\partial z^2} n + F(z, t), \quad z \in (0, +\infty), \quad t \in (0, +\infty); \quad (16)$$

$$n(z, 0) = n_0(z), \quad z \in (0, +\infty),$$

$$\left( -\alpha \frac{\partial}{\partial z} n + \beta n \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad t \in (0, +\infty), \quad (17)$$

$$C \geq 0 \exists \delta \geq 0 \forall z \in (0, +\infty) \forall t \in (0, +\infty)$$

$$(|n(z, t)| \leq C e^{\delta t}).$$

Задачу (16), (17) нетрудно решить, используя преобразование Лапласа. Сравнивая результаты решения задачи (16), (17) и результаты модельного эксперимента, приходим к выводу, что задача (16), (17) может быть использована для верного описания некоторых моментов рассматриваемого процесса.

В следующем приближении математической модели к реальному физическому процессу, учитывались:

- 1) коагуляция газов таких продуктов гидролиза, как  $\text{UO}_2\text{F}_2$  и  $\text{HF}$ ,
- 2) различие коэффициентов диффузии отдельных веществ.

Для описания осаждения  $\text{UF}_6$  и продуктов его гидролиза в таких условиях подходит задача (10), (11). Будем отдельно рассматривать осаждение урансодержащих и фторсодержащих продуктов, для чего выберем  $N = 4$ . Тогда для рассматриваемой физической ситуации задача (10), (11) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} n_k = D_k \frac{\partial^2}{\partial z^2} n_k + \sum_{m=1}^k a_{k,m} n_m + F_k(z, t), \quad (18)$$

$$k = \overline{1, 4}, \quad z \in (0, +\infty), \quad t \in (0, +\infty);$$

$$n_k(z, 0) = n_{k,0}(z), \quad z \in (0, +\infty),$$

$$\left( -\alpha_k \frac{\partial}{\partial z} n_k + \beta_k n_k \right) \Big|_{z=0} = r_k(t),$$

$$k = \overline{1, 4}, \quad \in (0, +\infty), \quad (19)$$

$$\exists C \geq 0 \exists \delta \geq 0 \forall z \in (0, +\infty) \forall t \in (0, +\infty)$$

$$(|n_k(z, t)| \leq C e^{\delta t}), \quad k = \overline{1, 4}.$$

Задачу (18), (19) также можно решить, используя преобразование Лапласа (хотя получающиеся при этом выкладки довольно громоздки). Сравнение результатов решения задачи (18), (19) и результатов

модельного эксперимента дает возможность более глубокого осмысления рассматриваемых процессов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Х о у л а н д Д ж. Фармакология и токсикология урановых соединений // Действие урановых соединений на человека: Пер. с англ. Т. 2. – М.: ИЛ, 1951. – С. 224–243.
2. Г а л и б и н Г. П., Н о в и к о в Ю. В. Токсикология промышленных соединений урана. – М.: Атомиздат, 1976. – 184 с.
3. Т а б л и ц ы физических величин: Справоч. / Под ред. И.К. Кикоина. – М.: Атомиздат, 1976. – 1008 с.
4. Р а д и а ц и о н н а я медицина. Руководство для врачей-исследователей и организаторов здравоохранения. Т. 2. Радиационные поражения человека / Под ред. Л.А. Ильина. – М.: ИздАТ, 2001. – С. 369–388.
5. Т и х о н о в А. Н., С а м а р с к и й А. А. Уравнения математической физики. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 798 с.
6. Б о г о л ю б о в А. Н., К р а в ц о в В. В. Задачи по математической физике. – М.: Изд-во МГУ, 1998. – 350 с.

Статья поступила в редакцию 05.04.2005

Светлана Петровна Бабенко родилась в 1937 г., окончила в 1960 г. Московский государственный педагогический институт им. В.И. Ленина. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 65 научных работ.

S.P. Babenko (b. 1937) graduated from the Lenin Moscow State Pedagogical Institute in 1960. Ph. D. (Phys.-Math.), assoc. professor of “Physics” department of the Bauman State Technical University. Author of 65 publications.

Андрей Валентинович Бадьин родился в 1970 г., окончил в 1992 г. МГУ им. М.В. Ломоносова. Канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник кафедры математики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Автор 12 научных работ.

A.V. Badiin (b. 1970) graduated from the Lomonosov Moscow State University in 1992. Ph. D. (Phys.-Math.), senior researcher of department of mathematics of Physical faculty of the Lomonosov Moscow State University. Author of 12 publications.