УДК 621.391.01

В. И. А н

СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТЫ УЗКОПОЛОСНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Случайная частота суммы узкополосного гауссовского стационарного случайного процесса и гармонического сигнала представлена в виде отношения производной огибающей суммы к самой огибающей.

В радиотехнике часто встречаются узкополосные случайные процессы. Основные характеристики таких процессов — огибающая, фаза и частота (производная фазы) — определяются с помощью аналитического сигнала [1]. Известно, что фаза и частота статистически зависят от огибающей. Однако отсутствие простых аналитических выражений для этой зависимости значительно усложняет решение различных научно-технических задач. В настоящей работе показано, что в ряде случаев можно использовать простое определение частоты узкополосного гауссовского случайного процесса, связанное функциональной зависимостью с огибающей.

Будем далее называть квазигармоническим шумом узкополосный гауссовский стационарный случайный процесс $\xi(t)$ с нулевым математическим ожиданием, дисперсией σ^2 и спектральной плотностью $S(\omega)$, симметричной относительно частоты ω_0 при $\omega > 0$. Известно следующее представление для $\xi(t)$ [1]:

$$\xi(t) = A(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t)),$$

где $A(t) = \sqrt{A_c^2(t) + A_s^2(t)}$, $\varphi(t) = \operatorname{arctg}(A_s(t)/A_c(t))$ — огибающая и случайная фаза процесса $\xi(t)$; $A_c = \xi(t)\cos\omega_0 t + \eta(t)\sin\omega_0 t$, $A_s = \eta(t)\cos\omega_0 t - \xi(t)\sin\omega_0 t$ — квадратурные составляющие $\xi(t)$;

$$\eta(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi(x)}{t-x}dx$$

— преобразование Гильберта от $\xi(t)$.

Плотности вероятности огибающей $A(t)$, производных от огибающей $A'(t) = dA(t)/dt$ и случайной частоты $\varphi'(t) = d\varphi(t)/dt$ соответственно имеют вид

$$r(A) = \frac{A}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right),$$

$$p(A') = \frac{1}{\sigma\omega_*\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{A'^2}{2\sigma^2\omega_*^2}\right),$$

$$q(\varphi') = \frac{1}{2\omega_*\left(1+\dfrac{\varphi'^2}{\omega_*^2}\right)^{3/2}}, \tag{1}$$

где

$$\omega_*^2 = \frac{\int\limits_0^\infty (\omega-\omega_0)^2 S(\omega)d\omega}{\int\limits_0^\infty S(\omega)d\omega}.$$

Случайная частота (производная случайной фазы) квазигармонического шума $\xi(t)$ выражается через огибающую, квадратурные составляющие процесса и их производные [1]:

$$\varphi'(t) = \frac{A_c(t)A_s'(t) - A_c'(t)A_s(t)}{A^2(t)}.$$

Известно [1], что $A'(t)$ и $A(t)$ — независимые случайные величины. Покажем, что плотность вероятности случайной частоты квазигармонического шума $\xi(t)$ совпадает с плотностью вероятности логарифмической производной огибающей:

$$\gamma(t) = (\ln A(t))' = \frac{A'(t)}{A(t)}. \tag{2}$$

Действительно, имеем

$$\int\limits_0^\infty p(\gamma\tau)\tau r(\tau)d\tau = \int\limits_0^\infty \frac{1}{\sigma\omega_*\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\gamma\tau)^2}{2\sigma^2\omega_*^2}\right)\frac{\tau^2}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}\right)d\tau =$$

$$= \frac{1}{\sigma^3\omega_*\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty \tau^2 \exp\left(-\frac{(\gamma^2+\omega_*^2)}{2\sigma^2\omega_*^2}\tau^2\right)d\tau = \frac{1}{2\omega_*\left(1+\dfrac{\gamma^2}{\omega_*^2}\right)^{3/2}}.$$

Используя свойства преобразования Меллина, моменты $\gamma(t)$ можно определить намного проще, чем моменты случайной частоты $\varphi'(t)$.

Преобразованием Меллина функции $f(x)$ называется функция комплексного переменного [2]

$$g(s) = \int\limits_0^\infty f(x)x^{s-1}dx,$$

где s — комплексное число.

Обозначим через $M_1(s), M_2(s), M_3(s)$ преобразования Меллина для $p(A'), r(A), q(\gamma)$ соответственно. Из формулы (2) следует, что преобразование Меллина для $q(\gamma)$ имеет вид [2]

$$M_3\,(s) = M_1(s)M_2(2-s). \tag{3}$$

Для огибающей $A(t)$, имеющей распределение Релея, существует только первый отрицательный момент. Поэтому существует только первый начальный момент случайной частоты (при $s = 2$), равный нулю, так как первый момент $A'(t)$ равен нулю. Дисперсия случайной частоты стремится к бесконечности, так как второй момент $A'(t)$ конечный, а второй отрицательный момент $A(t)$ стремится к бесконечности. Эти результаты совпадают с известными значениями первого момента и дисперсии случайной частоты $\varphi'(t)$ [1].

Корреляционная функция $\gamma(t)$ также может быть вычислена с помощью преобразования Меллина, поскольку

$$R_\gamma(\tau) = m_1\{\gamma(t)\gamma(t+\tau)\} = m_1\{A'(t)A'(t+\tau)\}\, m_1\left\{\frac{1}{A(t)A(t+\tau)}\right\}, \tag{4}$$

где $m_1\{\cdot\}$ – математическое ожидание случайной величины. Сомножитель $m_1\{A^{'}(t)A^{'}(t+\tau)\}$ в выражении (4) является корреляционной функцией $A'(t)$, которая выражается через $R_A(\tau)$ — корреляционную функцию огибающей $A(t)$:

$$m_1\{A'(t)A'(t+\tau)\} = R_{A'}(\tau) = -R_A^{''}(\tau),$$

где

$$R_A(\tau) = \sigma^2\left((1+\rho)\mathbf{E}\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1+\rho}\right)\right);$$

$\rho = \rho(\tau) = \sigma^{-2}m_1\{A_c(t),\ A_c(t+\tau)\}$ — нормированная огибающая корреляционной функции процесса $\xi(t)$; $\mathbf{E}(\cdot)$ — полный эллиптический интеграл второго рода [1].

Используя известное выражение для двумерных моментов огибающей стационарного гауссовского случайного процесса [1], найдем сомножитель $m_1\{1/A(t)A(t+\tau)\}$ из выражения (4), равный смешанному второму отрицательному моменту:

$$m_1\left\{\frac{1}{A(t)A(t+\tau)}\right\} = \frac{\pi}{2\sigma^2}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;\rho^2\right) = \sigma^{-2}\mathbf{K}(\rho),$$

где $\mathbf{K}(\cdot)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

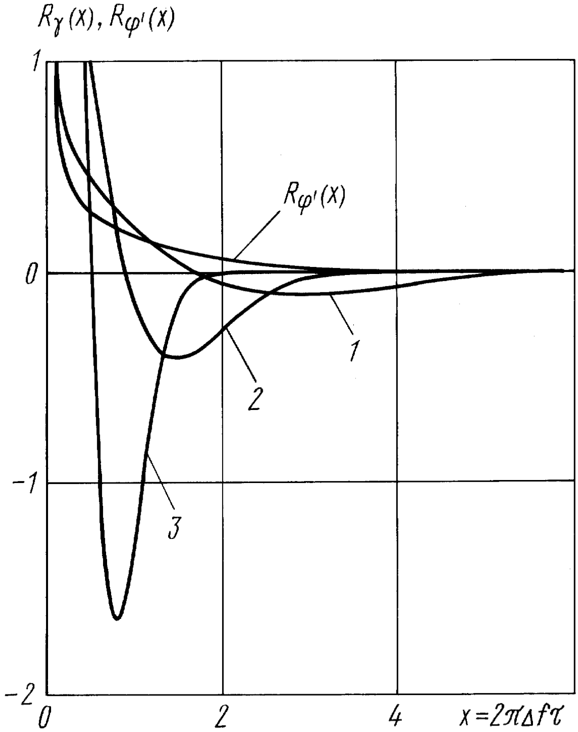

Рис. 1. Корреляционные функции логарифмической производной огибающей квазигармонического шума

Итак, корреляционная функция $\gamma(t)$ имеет вид

$$R_\gamma(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2}\left((1+\rho)\mathbf{E}\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1+\rho}\right)\right)\mathbf{K}(\rho). \tag{5}$$

На рис. 1 приведены рассчитанные по формуле (5) графики $R_\gamma(\tau)$ (*1–3*) для квазигармонического шума $\xi(t)$ с гауссовой формой спектральной плотности, когда $\rho(\tau) = \exp(-\pi\,(\Delta f\tau)^2)$, где Δf — ширина спектра шума. Для графиков *2* и *3* ширина спектра шума соответственно в 2 и 4 раза больше, чем для графика *1*. Для сравнения на рис. 1 показан график $R_{\varphi'}(\tau)$ — корреляционной функции производной случайной фазы процесса $\xi(t)$, вычисленной по известной формуле [1]

$$R_{\varphi'}(\tau) = -\frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{2\rho^2}\ln(1-\rho^2) \tag{6}$$

для ширины спектра такой же, как для графика *1*.

Из рис. 1 видно, что для корреляционных функций случайного процесса $\gamma(t)$, определяемых формулой (5), характерно наличие участков положительной и отрицательной корреляции, тогда как корреляционные функции, рассчитанные по формуле (6), содержат только участок положительной корреляции. Однако в обоих случаях дисперсии стремятся к бесконечности, так как $R_\gamma(\tau), R_{\varphi'}(\tau) \to \infty$, когда $\tau \to 0$.

Плотность вероятности случайной частоты совпадает с плотностью вероятности логарифмической производной огибающей; для суммы гармонического сигнала $s(t) = A_0 \cos(\omega_s t + \vartheta)$ и квазигармонического шума $\xi(t)$ с центральной частотой спектра ω_0, совпадающей с частотой сигнала, имеем [1]

$$\zeta(t) = s(t) + \xi(t) = V(t)\cos(\omega_0 t + \psi(t)), \tag{7}$$

где

$$V(t)\cos\psi(t) = A_0\cos\vartheta + A_c(t),\ \ V(t)\sin\psi(t) = A_0\sin\vartheta + A_s(t),$$

$$V(t) = \sqrt{(A_0\cos\vartheta + A_c(t))^2 + (A_0\sin\vartheta + A_s(t))^2}.$$

В этом случае плотности вероятности огибающей $V(t)$, производной от огибающей $V'(t)$ и случайной частоты $\psi'(t) = d\psi(t)/dt$ имеют следующий вид:

$$r_1(V) = \frac{V}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{V^2 + A_0^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{VA_0}{\sigma^2}\right), \tag{8}$$

$$p(V') = \frac{1}{\sigma\omega_*\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{V'^2}{2\sigma^2\omega_*^2}\right),$$

$$q_1(\psi') = \frac{\exp\left(-\dfrac{A_0^2}{2\sigma^2}\right)}{2\omega_*\left(1 + \dfrac{\psi'^2}{\omega_*^2}\right)^{3/2}}\,{}_1F_1\left(\frac{3}{2}, 1; \frac{A_0^2}{2\sigma^2\left(1 + \dfrac{\psi'^2}{\omega_*^2}\right)}\right), \tag{9}$$

где $I_0(\cdot)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка, ${}_1F_1(\cdot)$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Поскольку $V'(t)$ и $V(t)$ — независимые случайные величины [1], то для плотности вероятности отношения $V'(t)$ к $V(t)$ имеем

$$\int\limits_0^\infty p(x\tau)\tau r_1(\tau)d\tau =$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{1}{\sigma\omega_*\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x\tau)^2}{2\sigma^2\omega_*^2}\right)\frac{\tau^2}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{\tau^2 + A_0^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{\tau A_0}{\sigma^2}\right) d\tau =$$

$$= \frac{1}{\sigma^3 \omega_* \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{A_0^2}{2\sigma^2}\right) \int\limits_0^\infty \tau^2 \exp\left(-\frac{(x^2+\omega_*^2)}{2\sigma^2\omega_*^2}\tau^2\right) I_0\left(\frac{\tau A_0}{\sigma^2}\right) d\tau.$$

Вычислив в последнем выражении интеграл [3], получим плотность вероятности (9).

Введем обозначение для логарифмической производной огибающей:

$$\Omega(t) = (\ln V(t))' = \frac{V'(t)}{V(t)}. \tag{10}$$

Вычисление $R_\Omega(\tau)$ — корреляционной функции $\Omega(t)$ — аналогично вычислению $R_\gamma(\tau)$, но в данном случае получение замкнутого выражения связано с математическими трудностями.

Ряд известных вероятностных характеристик случайной частоты суммы гармонического сигнала и квазигармонического шума можно получить, используя выражение (10).

Поскольку среднее значение $\Omega(t)$ равно нулю, то в качестве ее числовой характеристики рассмотрим среднее значение случайной величины $|\Omega(t)|$:

$$|\Omega(t)| = \frac{|V'(t)|}{V(t)}, \tag{11}$$

где $|V'(t)|$ — нормальная односторонняя случайная величина, для которой существуют начальные моменты всех порядков. Известно [1], что для огибающей суммы $V(t)$, имеющей распределение Райса (8), существует только первый отрицательный момент, а второй отрицательный момент не существует (стремится к бесконечности). Поэтому, согласно свойству преобразования Меллина, существует только первый момент $|\Omega(t)|$:

$$m_1\{|\Omega|\} = m_1\{|V'|\}\, m_{-1}\{V\} = \omega_* \exp\left(-\frac{A_0^2}{4\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{A_0^2}{4\sigma^2}\right),$$

где $m_{-1}\{\cdot\}$ — первый отрицательный момент. Если в сумме (7) гармонический сигнал отсутствует $(A_0 = 0)$, то $m_1\{|\Omega|\} = \omega_*$. Второй момент $|\Omega(t)|$ в силу того же свойства преобразования Меллина стремится к бесконечности. Таким образом, стремление к бесконечности дисперсий $|\Omega(t)|$ и $\Omega(t)$ очевидным образом следует из выражений (11) и (10) соответственно, тогда как, например, в работе [1] для обоснования стремления к бесконечности дисперсии случайной частоты $\psi'(t)$ узкополосного случайного процесса $\zeta(t)$ используются качественные рассуждения.

Рис. 2. Структурная схема измерения логарифмической производной огибающей суммы гармонического сигнала и квазигармонического шума

Практический интерес представляет произведение огибающей и случайной частоты суммы гармонического сигнала и квазигармонического шума. С учетом выражения (10) получим

$$V(t)\Omega(t) = V'(t).$$

Таким образом, параметры распределения произведения огибающей и случайной частоты суммы гармонического сигнала и квазигармонического шума не зависят от амплитуды гармонического сигнала и полностью определяются шумовой компонентой суммы. Аналогичный результат получен в работе [4] более сложным путем.

Выражение (10) используется в структурной схеме измерения логарифмической производной огибающей суммы (7), изображенной на рис. 2. Данная схема измерения $\Omega(t)$, в отличие от схемы измерения случайной частоты $\psi'(t)$ [5], не требует вычисления преобразования Гильберта от процесса $\zeta(t)$, квадратурных составляющих этого процесса и др.

Совпадение плотностей вероятности случайной частоты и логарифмической производной огибающей квазигармонического шума $\xi(t)$ и суммы гармонического сигнала и квазигармонического шума $\zeta(t)$ позволяет определить случайную частоту как логарифмическую производную огибающей этих процессов, т.е. с помощью выражений (2) и (10). Благодаря более простой форме нового определения случайной частоты, его использование при решении различных задач может оказаться предпочтительным по сравнению с использованием существующего определения случайной частоты $\psi'(t)$ [1].

Если для узкополосного случайного процесса $\zeta(t)$, определяемого выражением (7), частота сигнала ω_s не совпадает с центральной частотой спектра шума ω_0, то возникает частотная расстройка $\Delta\omega = \omega_s - \omega_0$. При этом плотность вероятности логарифмической производной огибающей $\Omega(t)$, определяемая выражением (10), не совпадает с плотностью вероятности случайной частоты $\psi'(t)$. Как известно [1], последняя асимметрична при $\Delta\omega \neq 0$, тогда как плотность вероятности $\Omega(t)$ остается четной. Отметим также, что величины $V(t)$ и $V'(t)$ в этом случае зависимы. В этом случае случайная частота $Z(t)$ узкополосного случайного процесса $\zeta(t)$ может быть представлена в виде частного зависимых случайных величин $W(t)$ и $V(t)$:

$$Z(t) = \frac{W(t)}{V(t)}. \tag{12}$$

Из совместной плотности вероятности $p_4(V, V', \psi, \psi')$ для огибающей $V(t)$, случайной фазы $\psi(t)$ и их первых производных [1], произведя замену переменной $\psi'(t)$ на W/V, нетрудно установить, что величина $W(t)$ статистически связана с $V'(t)$. Совместная плотность вероятности $w_2(V, W)$, полученная из совместной плотности вероятности огибающей и случайной частоты $p_2(V, \psi')$ [1] путем замены переменной $\psi'(t)$ на W/V, имеет вид

$$w_2(V, W) = \frac{V}{\sigma_\xi^2 \sigma_1 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{V^2 + A_0^2}{2\sigma_\xi^2} - \frac{\Delta\omega^2 A_0^2 + 2W^2}{4\sigma_1^2}\right) \times$$

$$\times \left\{ I_0(G)\, I_0\left(\left(\frac{\Delta\omega A_0}{2\sigma_1}\right)^2\right) + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, I_{2n}(G)\, I_n\left(\left(\frac{\Delta\omega A_0}{2\sigma_1}\right)^2\right) \right\},$$

где

$$G = A_0\left(\frac{V}{\sigma_\xi^2} + \frac{\Delta\omega W}{\sigma_1^2}\right).$$

При $\Delta\omega \to 0$ имеем $W \to V'$, и $w_2(V, W)$ переходит в совместную плотность вероятности независимых величин $V(t)$ и $V'(t)$. Таким образом, определение случайной частоты (12) можно рассматривать как обобщение определения (10) при $\Delta\omega \neq 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Т и х о н о в В. И. Нелинейные преобразования случайных процессов. – М.: Радио и связь, 1986. – 296 с.
2. Б е й т м е н Г., Э р д е й и А. Таблицы интегральных преобразований. Т.1. – М.: Наука, 1969. – 344 с.
3. П р у д н и к о в А. П., Б р ы ч к о в Ю. А., М а р и ч е в О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука, 1983. – 752 с.
4. Г р о з н е ц к и й Б. Н., Ш т е й н б е р г А. Л. Вероятностные характеристики произведения огибающей и производной фазы узкополосного случайного процесса // Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. – 1999. – №7. – С. 79–80.
5. В а к м а н Д. Е. Измерение частоты аналитического сигнала // Радиотехника и электроника. – 1979. – Т. 34. – №5. – С. 982–989.

Статья поступила в редакцию 25.09.2003

Вячеслав Ильич Ан родился в 1952 г., окончил в 1974 г. Воронежский государственный университет и в 1993 г. Воронежский политехнический институт. Канд. техн. наук, докторант кафедры “Радиотехнические системы и устройства” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 17 научных работ.

V.I. An (b. 1952) graduated from the Voronezh State University in 1974 and Voronezh Polytechnic Institute in 1993. Ph. D. (Eng.), doctoral student of “Radio Engineering Systems and Devices” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 17 publications.