

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК 519.713

А. А. Г р е ш и л о в, А. А. Т е т ю х и н

АЛГОРИТМ ИДЕНТИФИКАЦИИ ИСТОЧНИКОВ РАДИОАКТИВНЫХ БЛАГОРОДНЫХ ГАЗОВ

Рассмотрена модель идентификации источников радиоактивных изотопов криптона и ксенона, в которой учтена сепарация изотопов от предшествующих им по изобарной цепочке распада. Предложен алгоритм идентификации на основе конфлюентного анализа, позволяющий более полно (по сравнению с традиционными методами) учитывать погрешности в исходных данных и получать обоснованное решение в задаче идентификации источника радиоактивных благородных газов.

При функционировании ядерных реакторов, импульсных источников нейтронов на основе делящихся тяжелых ядер, при мгновенном делении тяжелых ядер и переработке ядерного горючего (отработанного) — почти во всех этих случаях в атмосферу попадают радиоактивные изотопы благородных (инертных) газов — продукты деления изотопов тяжелых ядер (урана и плутония). Для оценки экологической ситуации и в других целях важно знать вид источника радиоактивных газов, это позволяет предсказать структуру ионизирующих излучений и более четко определить негативные последствия радиационного загрязнения.

Выделим следующие процессы образования радиоактивных изотопов — продуктов деления тяжелых ядер:

— мгновенное деление тяжелых ядер, которое приводит к независимому образованию различных осколков, и последующий распад осколков деления по изобарным цепочкам [1–3], который может происходить как без сепарации образующихся продуктов деления от предшествующих им по цепочкам распада, так и с сепарацией;

— непрерывное в течение длительного времени деление тяжелых ядер и накопление продуктов деления без сепарации от предшествующих им по изобарным цепочкам;

— сепарация изотопов криптона и ксенона от предшествующих им по цепочке распада и последующий их распад (без подпитки).

В настоящей работе рассмотрены два источника образования радиоактивных благородных газов: мгновенное деление и накопление в

ядерном реакторе. Для этих источников характерны все три указанных процесса образования газообразных продуктов деления. Формулы для расчета активности продуктов деления тяжелых ядер в этих случаях известны [3–6]. В настоящей работе рассмотрены только некоторые особенности расчета.

Активность радиоизотопов благородных газов (криптона и ксенона) зависит от типа делящихся ядер (U^{235} , Pu^{239} и др.) и от энергии нейтронов, вызывающих деление (тепловых, нейтронов спектра деления, нейтронов с энергией 14 МэВ). Это позволяет использовать изотопы криптона и ксенона для идентификации источника деления (мгновенное деление, ядерный реактор), вида делящихся ядер и для определения числа делений нейтронами различных энергетических групп.

Изотопы криптона и ксенона появляются независимо в процессе деления тяжелых ядер и в результате последующих радиоактивных превращений по изобарным цепочкам распада [1–3]. Практическую ценность для идентификации источников продуктов деления представляют изотопы, которые могут быть зарегистрированы. Теоретические результаты показывают, что в течение 24 ч после мгновенного деления можно обнаружить следующие изотопы: Kr^{83m} , Kr^{85m} , Kr^{85} , Kr^{87} , Kr^{88} , Xe^{133} , Xe^{133m} , Xe^{135m} , Xe^{135} , Xe^{138} . Однако анализ источника по этим изотопам криптона и ксенона затруднен тем, что они не являются начальными в цепочках распада (рис. 1).

При выходе в атмосферу радиоактивных изотопов инертных газов происходит сепарация (отделение) изотопов криптона и ксенона от предшествующих им по цепочке распада. Процесс сепарации, происходящий в результате взаимодействия элементов — членов цепочки (обладающих различными физическими и химическими свойствами) с окружающей средой, довольно сложен. Сепарация изотопов криптона и ксенона происходит также в процессе переработки ТВЭЛов ядерного реактора после окончания кампании T и прошествии некоторого времени выдержки.

Рассмотрим упрощенную модель процесса для случаев мгновенного деления тяжелых ядер, полагая, что отрыв изотопов от предшеству-

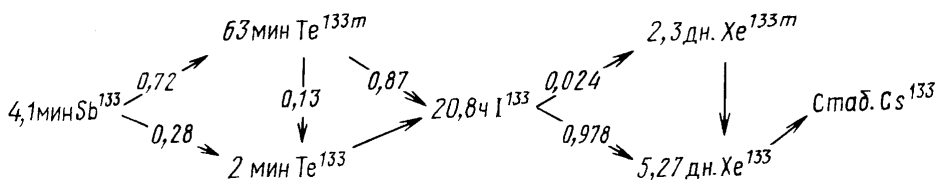


Рис. 1. Пример изобарной цепочки радиоактивного распада

ющих им происходит мгновенно в момент времени t_0 , после чего исследуемые изотопы криптона и ксенона распадаются со своими постоянными распада λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

При мгновенном делении i -й изотоп появляется в результате процессов деления различных типов, и его измеренная активность A_i выражается следующим образом:

$$A_i(t_0) = \rho_i \lambda_i \sum_{j=1}^m f_{ij}(\theta, \eta, t, t_0) N_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где ρ_i — доля i -го изотопа в образце (значение ρ обычно неизвестно); N_j — число делений j -го вида; η — вектор независимых выходов изотопов (при j -м виде деления); λ_i — постоянная распада i -го изотопа; θ — вектор параметров, характеризующих сепарацию измеряемых изотопов от предшествующих им; t — время наблюдения; t_0 — предполагаемый момент сепарации изотопов криптона и ксенона от предшествующих им.

В выражениях (1) положим

$$\lambda_i f_{ij}(\theta, \eta, t, t_0) = a_{ij}^{t_0}(\theta, \eta, t, t_0), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m;$$

тогда получим следующую переопределенную систему уравнений:

$$\rho \sum_{j=1}^m a_{ij}^{t_0}(\theta, \eta, \lambda, t, t_0) N_j = A_i(t_0), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad n \geq m, \quad (2)$$

где $a_{ij}^{t_0}(\theta, \eta, \lambda, t, t_0)$ — активность i -го изотопа при j -м виде деления для одного акта распада, вычисленная с учетом сепарации на момент времени $t > t_0$, т.е. удельная активность; λ — вектор постоянных распада.

Рассматривая сепарацию как мгновенный процесс, для удельной активности получим

$$a_{ij}^{t_0}(\theta, \eta, \lambda, t, t_0) = a_{ij}(\theta, \eta, \lambda, t_0) \exp(-\lambda_i(t - t_0)), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (3)$$

где $a_{ij}(\theta, \eta, \lambda, t_0)$ — активность i -го изотопа при j -м виде деления для одного акта распада, вычисленная в момент сепарации $t = t_0$. Отметим, что для расчета активности до момента сепарации изотопов следует применять формулу для $a_{ij}(\theta, \eta, \lambda, t)$, которая приведена далее, а для расчета активности после момента сепарации следует применять формулу (3).

Рассмотрим способы расчета активности $a_{ij}(\theta, \eta, \lambda, t_0)$ в случае мгновенного деления и в случае ядерного реактора [3–6].

При расчете активности в цепочках с ветвлением целесообразно представить их в виде нескольких линейных цепочек. Процедуру разложения исходной цепочки с ветвлением на линейные цепочки можно проводить поэтапно, исключая по одному узлу ветвления. При этом элементам каждой линейной цепочки, стоящим в цепочке до ветвления, приписываются независимые выходы, умноженные на соответствующий коэффициент ветвления γ_{rs} , где s — номер линейной ветви, r — номер элемента в этой ветви. Независимый выход элемента, стоящего после ветвления, остается неизменным, если он входит только в одну из ветвей. Если же этот элемент входит в обе ветви, то в одной из них его независимый выход следует положить равным нулю. Эта процедура повторяется до тех пор, пока не будут исключены все узлы ветвления. Полная активность каждого элемента разветвленной цепочки равна сумме активностей соответствующих элементов линейных цепочек.

В случае мгновенного деления и последующего распада продуктов деления без сепарации от предшествующих им, кинетика изменения во времени удельной активности всех n элементов линейной изобарной цепочки описывается следующей однородной системой линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{a}_1(t) &= -\lambda_1 a_1(t), \\ \dot{a}_2(t) &= \lambda_2 a_1(t) - \lambda_2 a_2(t), \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{a}_i(t) &= \lambda_i a_{i-1}(t) - \lambda_i a_i(t) \end{aligned}$$

при начальных условиях

$$a_i(0) = \lambda_i \eta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где i — текущий номер члена линейной цепочки, $i \leq n$; η_i , λ_i , $a_i(t)$ — соответственно абсолютный независимый выход, постоянная распада и удельная активность i -го члена цепочки.

Решение данной системы для i -го члена цепочки распада имеет вид [3–6]

$$a_i(t) = \sum_{l=1}^i C_{il} \exp(-\lambda_l t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

где коэффициенты C_{il} определяются следующими рекуррентными соотношениями:

$$C_{il} = \begin{cases} \lambda_i \eta_i & \text{при } i = l = 1, \\ \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \lambda_l} C_{i-1, l} & \text{при } i > l, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad l = 1, 2, \dots, n, \\ \lambda_i \eta_i - \sum_{l=1}^{i-1} C_{il} & \text{при } i = l, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad l = 2, 3, \dots, n, \\ 0 & \text{при } i < l. \end{cases}$$

Просуммировав активности для рассматриваемого изотопа по всем линейным цепочкам, как описано выше, получим полную активность. Учитывая, что после сепарации изотопов от предшествующих им по цепочке удельная активность определяется формулой (3), для активности в случае мгновенного деления окончательно получим

$$a_k^{\text{gen}}(\theta, \eta, \lambda, t, t_0) = \begin{cases} a_k(\theta, \eta, \lambda, t) & \text{при } t < t_0, \\ a_k^0(\theta, \eta, \lambda, t, t_0) & \text{при } t > t_0, \end{cases}$$

где t_0 — момент сепарации.

В случае реактора, работающего на постоянной мощности, кинетика изменения во времени удельной активности всех n элементов линейной изобарной цепочки описывается неоднородной линейной системой дифференциальных уравнений [3–7]

$$\begin{aligned} \dot{a}_1(t) &= \lambda_1 \eta_1 \Sigma_f \varphi - (\sigma_1 \varphi + \lambda_1) a_1(t), \\ \dot{a}_2(t) &= \lambda_2 \eta_2 \Sigma_f \varphi - (\sigma_2 \varphi + \lambda_2) a_2(t) + \lambda_2 a_1(t), \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{a}_i(t) &= \lambda_i \eta_i \Sigma_f \varphi - (\sigma_i \varphi + \lambda_i) a_i(t) + \lambda_i a_{i-1}(t) \end{aligned}$$

при начальных условиях

$$a_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где i — текущий номер элемента линейной цепочки, $i \leq n$; η_i , λ_i , $a_i(t)$ — соответственно абсолютный независимый выход, постоянная распада и удельная активность i -го элемента цепочки; φ — плотность потока нейтронов; Σ_f — макроскопическое сечение деления; σ_i — сечение захвата i -м изотопом нейтронов.

Решение данной системы для i -го элемента цепочки распада имеет вид

$$a_i(t) = b_i + \sum_{l=1}^i C_{il} \exp(-(\sigma_l \varphi + \lambda_l)t), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где коэффициенты b_i , C_{il} определяются следующими рекуррентными соотношениями [3–6]:

$$b_1 = \frac{\lambda_1 \eta_1 \Sigma_f \varphi}{\sigma_1 \varphi + \lambda_1}, \quad b_i = \frac{\lambda_i (\eta_i \Sigma_f \varphi + b_{i-1})}{\sigma_i \varphi + \lambda_i}, \quad i = 2, 3, \dots, n,$$

$$C_{il} = \begin{cases} -b_i & \text{при } i = l = 1, \\ \frac{\lambda_i}{(\sigma_i - \sigma_l) \varphi + \lambda_i - \lambda_l} C_{i-1,l} & \text{при } i > l, \quad i=2,3,\dots,n, \quad l=1,2,\dots,n, \\ -b_i - \sum_{l=1}^{i-1} C_{il} & \text{при } i = l, \quad i = 2,3,\dots,n, \quad l = 2,3,\dots,n, \\ 0 & \text{при } i < l. \end{cases}$$

Полная активность может быть получена суммированием по всем линейным цепочкам, как и в случае мгновенного деления. Следует отметить, что после остановки реактора, в период выдержки, активность рассчитывается по формуле (4), но с начальными условиями, соответствующими активности на момент остановки реактора. Активность изотопов после разрушения ТВЭЛа рассчитывается по формуле (3). Таким образом, в случае реактора, работающего на постоянной мощности, окончательно получим

$$a_k^{\text{gen}}(\theta, \eta, \lambda, t, t_0, T) = \begin{cases} a_k^T(\theta, \eta, \lambda, t, T) & \text{при } t \leq T, \\ a_k(\theta, \eta, \lambda, t) & \text{при } T < t < t_0, \\ a_k^{t_0}(\theta, \eta, \lambda, t, t_0) & \text{при } t \geq t_0, \end{cases}$$

где T — время кампании реактора, t_0 — время выдержки ТВЭЛа до разрушения (после этого момента происходит сепарация изотопов от предшествующих им).

Для системы (2) можно получить решение ρN_j , $j = 1, 2, \dots, m$, и произвести идентификацию источника изотопов.

Однако при решении системы уравнений (2) возникает ряд проблем. Первая проблема уже упоминалась: изотопы криптона и ксенона не являются начальными в цепочках радиоактивных превращений; чтобы вычислить их активность, необходимо знать независимые выходы продуктов деления. Независимые выходы обычно содержат погрешность, более того, информация о независимых выходах некоторых продуктов деления при определенных видах деления вообще отсутствует [1, 3, 8].

Вторая проблема состоит в учете сепарации изотопов криптона и ксенона от предшествующих им по изобарной цепочке распада. Активность изотопов в отобранной пробе в значительной мере зависит от процессов сепарации. На рис. 2 представлена зависимость относительной активности изотопов Kr^{85m} и Kr^{88} (в сравнении с активностью изотопа Xe^{135}). Верхняя и нижняя границы возможных значений относительной активности этих изотопов для различных видов деления

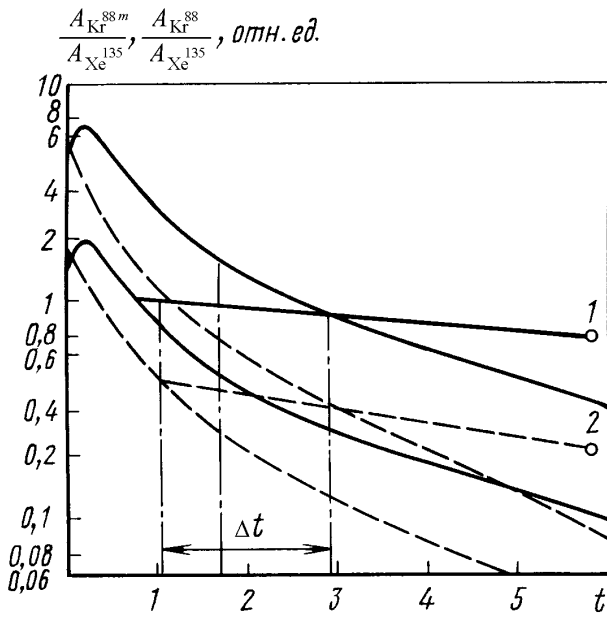


Рис. 2. Изменение относительной активности изотопов Kr^{85m} (сплошные линии) и Kr^{88} (штриховые линии) с учетом и без учета сепарации от предшествующих изотопов

при мгновенном делении в зависимости от времени и в предположении, что изотопы не сепарируются от предшествующих им, показаны сплошными (для Kr^{85m}) и штриховыми (для Kr^{88}) кривыми. На рис. 2 приведены также измеренные относительные активности этих изотопов в образце (точки 1 и 2). Видно, что точки 1 и 2 не принадлежат возможным значениям относительной активности этих изотопов без сепарации. Поэтому, чтобы оценить временной интервал Δt появления сепарации, рассчитаем относительные активности изотопов “в обратном времени”, исходя из измеренных данных, в предположении, что отсутствует какое-либо влияние предшествующих изотопов на результаты измерения, т.е. активность изменяется по экспоненциальному закону (сплошные и штриховые прямые линии). Пересечение границ возможной относительной активности измеренных изотопов при мгновенном делении прямыми линиями показывает временной интервал Δt , когда, возможно, произошло отделение изотопов от предшествующих им. Влияние момента сепарации t_0 на отношение активностей других изотопов видно из приведенной далее таблицы. Следовательно, если неизвестны параметры процессов сепарации, невозможно строго вычислить даже относительную активность изотопов из одной радиоактивной цепочки, и тем более невозможно решить обратную задачу — идентифицировать источник.

В традиционных методах не учитывается сепарация изотопов криптона и ксенона от предшествующих им, и поэтому возможны неверные выводы.

Относительные активности различных изотопов

| Отношение активностей изотопов при делении U^{235} нейтронами спектра деления | Время измерения, $t = 10$ ч | |
|---|-----------------------------|-----------------------------------|
| | Без учета сепарации | С учетом сепарации ($t_0 = 1$ ч) |
| $A_{Xe^{133m}}/A_{Xe^{133}}$ | $7,129 \cdot 10^{-2}$ | $9,142 \cdot 10^{-2}$ |
| $A_{Xe^{135}}/A_{Xe^{133}}$ | $2,874 \cdot 10$ | $8,632 \cdot 10$ |
| $A_{Xe^{135m}}/A_{Xe^{133}}$ | $9,902$ | $1,251 \cdot 10^{-8}$ |
| $A_{Xe^{138}}/A_{Xe^{133}}$ | $5,869 \cdot 10^{-8}$ | $1,330 \cdot 10^{-6}$ |
| $A_{Kr^{85}}/A_{Xe^{133}}$ | $2,141 \cdot 10^{-4}$ | $8,336 \cdot 10^{-4}$ |
| $A_{Kr^{85m}}/A_{Xe^{133}}$ | $5,259$ | $1,192 \cdot 10^2$ |
| $A_{Kr^{88}}/A_{Xe^{133}}$ | $1,491 \cdot 10$ | $3,380 \cdot 10^2$ |

Третья проблема состоит в нелинейности системы (2) по неизвестному параметру t_0 (времени сепарации). Следовательно, необходимо найти какой-либо способ определения этого параметра.

Четвертая проблема состоит в плохой обусловленности переопределенной системы (2) и, как следствие, в некорректности задачи поиска решения ρN_j , $j = 1, 2, \dots, m$. Возникновение этой проблемы вызвано двумя причинами: 1) независимые (и кумулятивные) выходы осколков деления различаются незначительно для разных видов деления [1, 3, 8]; 2) независимые выходы обычно известны с большими ошибками, к тому же погрешности содержат также измеренные значения активности. Таким образом, система (2) неустойчива по входным данным, которыми являются измеренные активности $A_i(t)$ и вычисляемые удельные активности $a_{ij}^{t_0}(\theta, \eta, \lambda, t, t_0)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$. Это сильно усложняет решение системы (2), поскольку вычисляемые активности имеют ошибки (погрешности в задании независимых выходов), которые могут быть сравнимы с ошибками измеренных величин $A_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Если не учитывать ошибки вычисляемых удельных активностей (например, средствами конфлюэнтного анализа), будут получены смещенные оценки величин ρN_j , $j = 1, 2, \dots, m$ [9, 10].

Традиционные методы решения переопределенных систем либо не обладают достаточной устойчивостью по входным данным (например, метод наименьших квадратов), либо учитывают погрешность только в

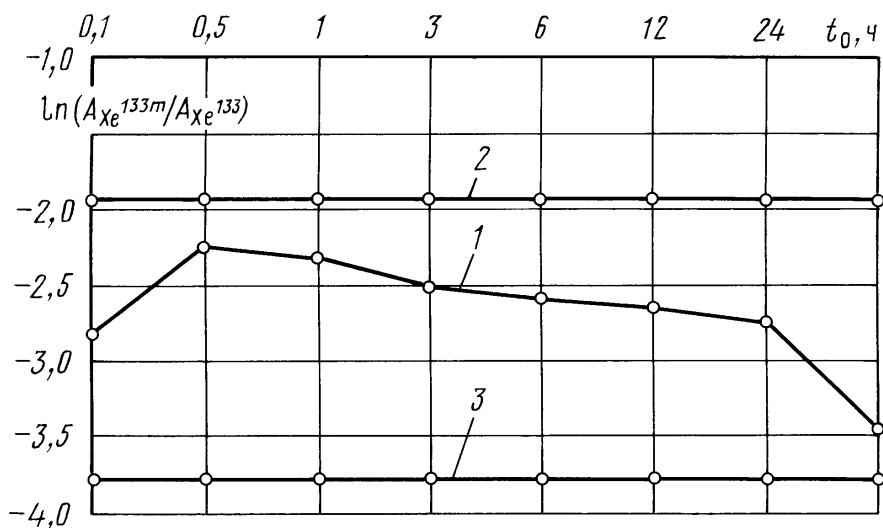


Рис. 3. Отношения активности Xe^{133m} к активности Xe^{133} при делении U^{235} нейтронами спектра деления (1) и в случае реактора с кампанией $T = 0,01$ года (2) и $T = 3$ года (3) на момент $0,1 \text{ ч} \leq t_0 \leq 5$ дней

правой части системы (например, метод регуляризации Тихонова [11]).

Источник изотопов криптона и ксенона иногда возможно идентифицировать по значению отношения активностей каких-либо изотопов (например, $A_{\text{Xe}^{133m}}/A_{\text{Xe}^{133}}$) [12, 13]. Рассмотрим этот подход. Возьмем отношение активности Xe^{133m} к активности Xe^{133} для различных видов деления при мгновенном делении $\text{U}_{\text{th}}^{235}$, $\text{U}_{\text{f}}^{235}$, $\text{Pu}_{\text{f}}^{239}$, $\text{U}_{14\text{МэВ}}^{235}$ (индексы th, f, 14 МэВ обозначают соответственно тепловые нейтроны, нейтроны спектра и нейтроны с энергией 14 МэВ) [1] и в реакторе с кампанией $T = 0,01$ и $T = 3$ года при различных значениях времени сепарации t_0 [3]. Напомним, что после сепарации изотопов от предшествующих им по цепочке распада подпитка активности изотопов прекращается и изотопы распадаются со своими постоянными периодами λ . Вычисления показывают (рис. 3), что, измерив отношение активностей в какой-либо момент времени t , невозможно определить источник активности, поскольку это может быть как мгновенное деление, так и реактор с кампанией $0,01 \leq T \leq 3$ года.

Представленные результаты свидетельствуют о невозможности проведения процедуры идентификации по результатам наблюдений только двух изотопов, поскольку данный способ не позволяет достоверно определить процесс распада и надежно распознать источник изотопов. Следовательно, необходим надежный алгоритм идентификации источников изотопов, основанный на более подробном анализе физического процесса.

Далее рассмотрим пример такого алгоритма, основанного на кон-
флюентном анализе, который позволяет решить указанные проблемы.

Система (2) является линейной относительно неизвестных ρN_j ,
 $j = 1, 2, \dots, m$, поэтому рассмотрим возможность ее решения в пред-
положении, что время сепарации t_0 известно, а элементы матрицы
системы и правая часть заданы с погрешностями, распределенными по
нормальному закону с математическими ожиданиями, равными нулю,
и дисперсиями, равными соответственно $\sigma^2(a_{ij}^{\text{true}})$ и $\sigma^2(A_i^{\text{true}})$:

$$\begin{aligned} a_{ij}^{t_0} &= a_{ij}^{\text{true}} \pm \varepsilon_{ij}, & \varepsilon_{ij} &\sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(a_{ij}^{\text{true}})), \\ A_i &= A_i^{\text{true}} \pm \delta_i, & \delta_i &\sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(A_i^{\text{true}})), \end{aligned}$$

где A_i^{true} , a_{ij}^{true} — истинные значения активностей; \mathcal{N} обозначает нор-
мальное распределение.

Для учета погрешностей как в правой части, так и в элементах ма-
трицы системы используем определение ортогональной регрессии [9]:

$$F_K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\left(A_i - \rho \sum_{j=1}^m a_{ij}^{\text{true}} N_j \right)^2}{\sigma^2(A_i^{\text{true}})} + \sum_{j=1}^m \frac{\left(a_{ij} - a_{ij}^{\text{true}} \right)^2}{\sigma^2(a_{ij}^{\text{true}})} \right). \quad (5)$$

В функционале (5) учитывается, что ошибки являются статисти-
чески независимыми величинами. В этом функционале наряду с не-
известным вектором ρN_j , $j = 1, 2, \dots, m$, неизвестными также являют-
ся истинные значения вычисляемых активностей a_{ij}^{true} , $i = 1, 2, \dots, n$,
 $j = 1, 2, \dots, m$. Единственность и состоятельность оценок, получаемых
методами конфлюентного анализа, доказаны в работе [14].

К сожалению, на практике не представляется возможным миними-
зировать функционал (5) посредством градиентного спуска из-за слож-
ности аналитического выражения для градиента функционала. Поэто-
му здесь применен упрощенный алгоритм минимизации [9], структур-
ная схема которого приведена на рис. 4.

На первом шаге алгоритма положим $a_{ij}^{\text{true}} = a_{ij}$, что сведет функ-
ционал (5) к функционалу метода наименьших квадратов, и получим
первое приближение решения ρN_j , $j = 1, 2, \dots, m$. Далее используем
какой-либо алгоритм решения плохо обусловленных систем линейных
алгебраических уравнений с погрешностью в правой части для поиска
оценки решения на каждой итерации [14–17], например метод регуля-
ризации по числу итераций, описанный в работе [14].

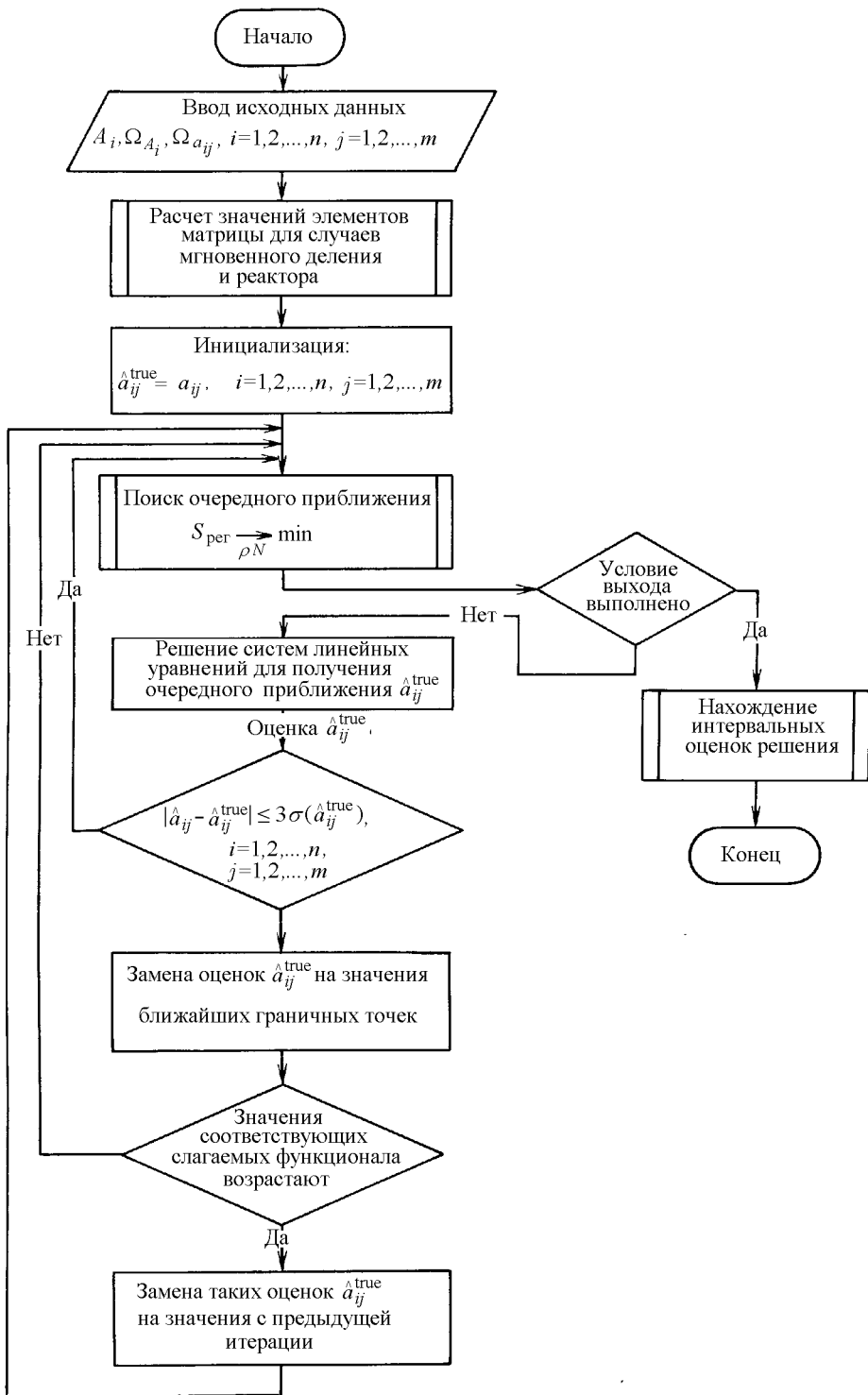


Рис. 4. Схема алгоритма решения плохо обусловленной системы линейных алгебраических уравнений с помощью конфлюентного анализа

Для получения оценок истинных значений a_{ij}^{true} при заданном значении t_0 на каждом шаге получения оценок $\widehat{\rho N}_j$, $j = 1, 2, \dots, m$, используется условие

$$\left. \frac{\partial F_K}{\partial a_{ij}^{\text{true}}} \right|_{a_{ij}^{\text{true}} = \widehat{a}_{ij}^{\text{true}}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

что приводит к решению n систем линейных алгебраических уравнений, каждая из которых содержит m уравнений с m неизвестными, следующего вида:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^m \frac{\rho N_r \rho N_p}{\sigma^2(A_i^{\text{true}})} a_{ir}^{\text{true}} + \frac{a_{ip}^{\text{true}}}{\sigma^2(a_{ip}^{\text{true}})} &= \\ &= \frac{a_{ip}}{\sigma^2(a_{ip}^{\text{true}})} + \frac{\rho N_p A_i}{\sigma^2(A_i^{\text{true}})}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad p = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Полученные новые оценки значений $\widehat{a}_{ij}^{\text{true}}$ должны удовлетворять естественному условию (принадлежать области неопределенности измеренных значений a_{ij}):

$$\left| a_{ij} - \widehat{a}_{ij}^{\text{true}} \right| \leq 3\sigma(a_{ij}^{\text{true}}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Если это условие не выполняется, то a_{ij}^{true} , $j = 1, 2, \dots, m$, которые не удовлетворяют этому неравенству, следует заменить на значения ближайших граничных точек. Из-за этого может происходить увеличение значений функционала на новых точных значениях переменных по сравнению с предыдущим шагом итерационного процесса, что приводит к снижению скорости сходимости итерационного процесса и возникновению колебаний. Чтобы значения функционала не увеличивались после пересчета оценок $\widehat{a}_{ij}^{\text{true}}$, $j = 1, 2, \dots, m$, те наборы оценок $\widehat{a}_{ij}^{\text{true}}$, $j = 1, 2, \dots, m$, для которых произошло увеличение соответствующих слагаемых функционала по сравнению с их значениями на предыдущей итерации, следует заменить на соответствующие значения для предыдущего шага.

После определения оценок истинных значений $\widehat{a}_{ij}^{\text{true}}$ находим очередное приближение к решению ρN_j , $j = 1, 2, \dots, m$, методом регуляризации по числу итераций [14].

Критерием останова алгоритма является несущественное различие значений функционала F_K и компонентов вектора ρN_j , $j = 1, 2, \dots, m$, на соседних итерациях, т.е. выполнение неравенств

$$\left\| \frac{(\rho N_j)^l - (\rho N_j)^{l-1}}{(\rho N_j)^l} \right\| < \gamma_1,$$

$$\left| \frac{F_K((\rho N_j)^{l-1}) - F_K((\rho N_j)^l)}{F_K((\rho N_j)^l)} \right| < \gamma_2,$$

где $(\rho N_j)^l$ — очередное приближение к решению на l -й итерации; $0 < \gamma_1 < 1$, $0 < \gamma_2 < 1$ — некоторые числа.

Следующий этап решения задачи идентификации — определение времени сепарации изотопов криптона и ксенона (2). Минимум функционала конфлюентного анализа, получаемого из системы (2), по переменной t_0 может быть найден каким-либо из методов одномерной минимизации. При этом значение t_0^{\min} , в котором функционал достигает минимума, будет искомым значением времени сепарации изотопов от предшествующих им. Временной отрезок, которому принадлежит точка минимума функционала, можно найти, рассчитав относительные активности изотопов в различных видах деления “в обратном времени” без учета влияния предшествующих им изотопов и определив точки пересечения прямых, проведенных из точек 1 и 2, с кривыми относительных активностей, построенных с учетом влияния предшествующих по цепочке распада изотопов (см. рис. 2).

Общая схема алгоритма, позволяющего найти оценки \hat{t}_0 , $\hat{\rho N}_j$, $\hat{a}_{ij}^{\text{true}}$, приведена на рис. 5.

После того как получены точечные оценки решения, необходимо найти интервальные оценки решения (или, как минимум, средние квадратические отклонения). Согласно работе [8] ковариационная матрица оценок определяется соотношением

$$D_{ij} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial(\hat{\rho N}_i) \partial(\hat{\rho N}_j)} \right)^{-1}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m, \quad (6)$$

где F — соответствующий функционал, определяющий оценку решения ρN_j .

Таким образом, средние квадратические отклонения оценок имеют вид

$$\sigma_{ii} = \sqrt{D_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Как уже было отмечено, аналитические выражения для производных функционала (5) довольно сложны, поэтому для вычисления ковариационной матрицы (6) используем функционал F , также учитывающий погрешности как в правой части, так и в матрице системы [10]:

$$F = \sum_{i=1}^n \frac{\left(A_i - \rho \sum_{j=1}^m a_{ij} N_j \right)^2}{\sigma^2(A_i) + \rho^2 \sum_{j=1}^m \sigma^2(a_{ij}) N_j^2}.$$

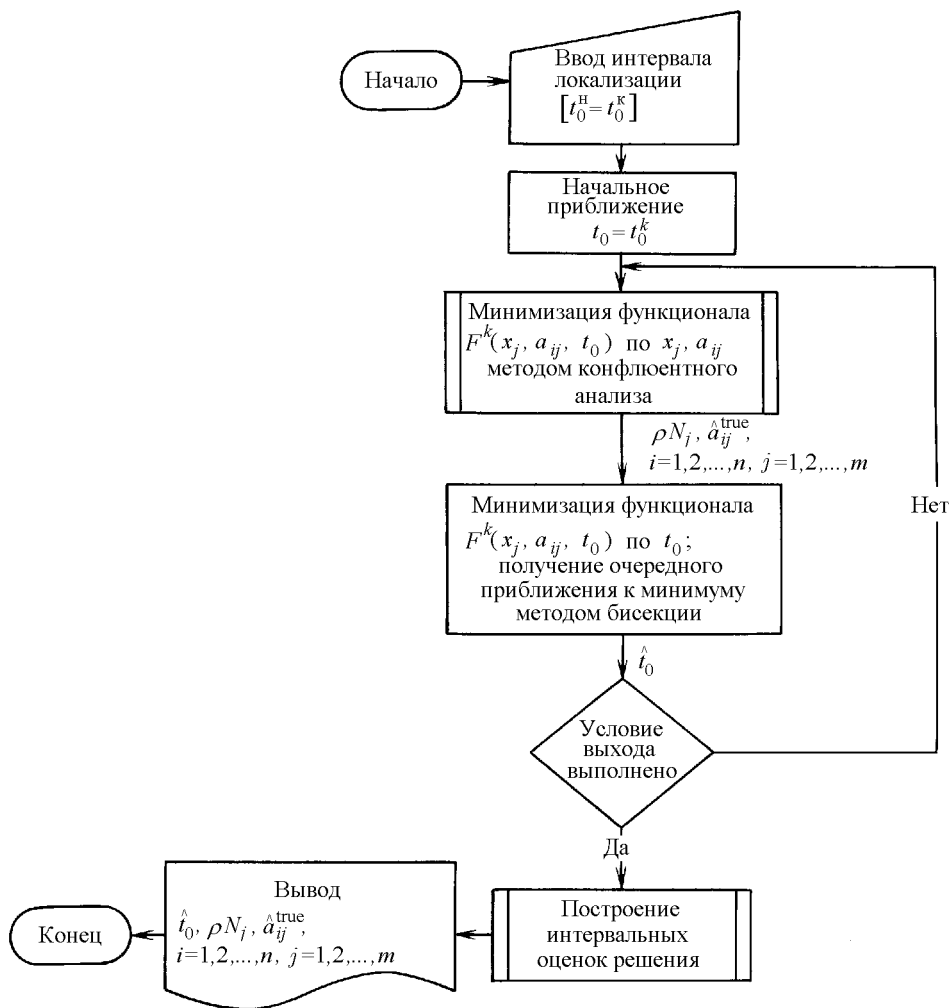


Рис. 5. Схема алгоритма получения оценок t_0 и решения $\hat{\rho N}_j, j = 1, 2, \dots, m$

Этот функционал определяет сумму квадратов наикратчайших расстояний от экспериментальной точки до плоскостей, описываемых линейными уравнениями (2), и эквивалентен функционалу (5).

В заключение приведем результаты модельного эксперимента в случаях, когда присутствует выброс изотопов криптона и ксенона: 1 — только в результате мгновенного деления, 2 — только в реакторе, 3 — и в результате мгновенного деления, и в реакторе.

Пусть $t = 10$ ч, $t_0 = 1$ ч и кампания реактора T составляет 3 года. Значения правой части системы получим путем подстановки в систему точного решения для каждого случая. Затем исказим матрицу и правую часть, используя датчик нормально распределенных случайных чисел (относительная погрешность элементов матрицы 5%, элементов правой части — 10%), и вычислим приближенное решение с помощью

алгоритма, описанного выше. Во всех случаях в качестве ошибки решения приведено ее среднее квадратическое отклонение, рассчитанное согласно формуле (6).

Случай 1. Точное решение системы:

$$\rho N = \begin{pmatrix} 10^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

приближенное решение системы:

$$\widehat{\rho N} = \begin{pmatrix} (1,013 \pm 0,037) \cdot 10^2 \\ (0,010 \pm 0,052) \cdot 10^2 \\ (0,027 \pm 0,038) \cdot 10^2 \\ (0,010 \pm 0,023) \cdot 10^2 \end{pmatrix}.$$

Случай 2. Точное решение системы:

$$\rho N = \begin{pmatrix} 0 \\ 10^2 \\ 10^2 \\ 10^2 \end{pmatrix},$$

приближенное решение системы:

$$\widehat{\rho N} = \begin{pmatrix} (0,007 \pm 0,013) \cdot 10^2 \\ (0,915 \pm 0,137) \cdot 10^2 \\ (1,097 \pm 0,172) \cdot 10^2 \\ (0,993 \pm 0,100) \cdot 10^2 \end{pmatrix}.$$

Случай 3. Точное решение системы:

$$\rho N = \begin{pmatrix} 10^2 \\ 10^2 \\ 10^2 \\ 10^2 \end{pmatrix},$$

приближенное решение системы:

$$\widehat{\rho N} = \begin{pmatrix} (1,031 \pm 0,078) \cdot 10^2 \\ (0,950 \pm 0,194) \cdot 10^2 \\ (0,988 \pm 0,241) \cdot 10^2 \\ (0,986 \pm 0,124) \cdot 10^2 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что покомпонентное сравнение теоретически рассчитанных дисперсий приближенных решений с выборочными исправленными дисперсиями (при 30 решениях исходной системы со случайными ошибками) по критерию Фишера–Снедекора при уровне значимости $\alpha = 0,02$ показывает, что в данном случае нет оснований отвергнуть гипотезу об их равенстве. Следовательно, справедливо применение описанного способа теоретического расчета дисперсий по формуле (6).

Заключение. Предложена модель идентификации источников радиоактивных изотопов криптона и ксенона, позволяющая учесть сепарацию изотопов от предшествующих им по цепочке распада. Также предложен алгоритм идентификации, позволяющий учесть погрешности как в правой части уравнений (погрешности наблюдаемой активности изотопов), так и в матрице модели (погрешности независимых и кумулятивных выходов продуктов деления).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грешилов А. А., Колобашкин В. М., Дементьев С. И. Продукты мгновенного деления U^{235} , U^{238} , Pu^{239} в интервале 0–1 ч: Справочник. – М.: Атомиздат, 1969. – 105 с.
2. Гусев Н. Г., Дмитриев П. П. Радиоактивные цепочки: Справочник. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 111 с.
3. Гусев Н. Г., Рубцов П. М., Коваленко В. В., Колобашкин В. М. Радиационные характеристики продуктов деления: Справочник. – М.: Атомиздат, 1974. – 224 с.
4. Герасимов А. С., Рудик А. П. Отравление реактора ксеноном-135. – М.: Энергоатомиздат, 1982. – 95 с.
5. Грешилов А. А., Соловьев В. Ю. Определение независимых выходов продуктов деления // Вопросы дозиметрии и защиты от излучений / Под ред. Л.Р. Кимеля. – Вып. 12. – М.: Атомиздат, 1971.
6. Камерон И. Ядерные реакторы / Под ред. В.М. Новикова. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 320 с.
7. Галанин А. Д. Введение в теорию ядерных реакторов на тепловых нейтронах. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 534 с.
8. England T. R., Rider B. F. Evaluation and compilation of fission product yields // ENDF-349, LA-UR-94-3106 (Los Alamos National Laboratory), 1994.
9. Грешилов А. А., Стакун В. А., Стакун А. А. Математические методы построения прогнозов. – М.: Радио и связь, 1997. – 112 с.
10. Грешилов А. А., Стакун В. А., Стакун А. А. Статистические методы принятия решений с элементами конфлюентного анализа. – М.: Радио и связь, 1998. – 112 с.
11. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 288 с.
12. Bowyer T. W., McIntyre J. I., Reeder P. L. High sensitivity detection of Xe isotopes via beta-gamma coincidence counting // PNNL-13102 (Pacific Northwest National Laboratory, Richland, WA), 1999.

13. Hayes J. C., Abel K. H., Bowyer T. W., Heimbigner T. R., Panisko M. E. et al. Operations of the Automated Radioxenon Sampler/Analyzer – ARSA // PNNL-13102 (Pacific Northwest National Laboratory, Richland, WA), 1999.
14. Грешилов А. А. Анализ и синтез стохастических систем. Параметрические модели и конфлюентный анализ. – М.: Радио и связь, 1991. – 320 с.
15. Морозов В. А. Методы регуляризации неустойчивых задач. – М.: Изд-во МГУ, 1987. – 215 с.
16. Морозов В. А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. – М.: Наука, 1987. – 239 с.
17. Федотов А. М. Некорректные задачи со случайными ошибками в данных / Под ред. М.М. Лаврентьева. – Новосибирск: Наука, 1990. – 279 с.

Статья поступила в редакцию 9.04.2002

Анатолий Антонович Грешилов родился в 1939 г., окончил в 1964 г. Московский инженерно-физический институт. Др техн. наук, профессор кафедры “Вычислительная математика и математическая физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 150 научных работ, в том числе 9 монографий, 20 авторских свидетельств и патентов в области разработки математических методов строгого учета неопределенности исходной информации в задачах математической физики, распознавания образов, прогнозирования и других технических приложений.

A.A. Greshilov (b. 1939) graduated from the Moscow Institute for Engineering and Physics in 1964. D. Sc. (Eng.), professor of “Computational Mathematics and Mathematical Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of over 150 publications including 9 monographs, 20 authorship certifications and patents in the field of development of mathematical methods for strict account of the source data uncertainty in problems of mathematical physics, image identification, forecasting and other technical applications.



Александр Александрович Тетюхин родился в 1976 г., окончил в 2000 г. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Аспирант кафедры “Вычислительная математика и математическая физика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 2 научных работ в области распознавания образов в условиях неопределенности исходных данных.

A.A. Tetyukhin (b. 1976) graduated from the the Bauman Moscow State Technical University in 2000. Post-graduate of “Computational Mathematics and Mathematical Physics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 2 publications in the field of image identification under the source data uncertainty.

