УДК 519.2

В. И. Тимонин

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ В ТЕОРИИ ФОРСИРОВАННЫХ ИСПЫТАНИЙ

Предложен новый метод проведения предварительных исследований для форсированных испытаний, позволяющий значительно сократить их объем. Метод основан на применении оценок Каплана–Мейера функции надежности и разработке нового критерия однородности типа Колмогорова–Смирнова для зависимых выборок.

Режим испытаний с переменной нагрузкой применяется при предварительных исследованиях в теории форсированных испытаний [1]. Стандартные методы проведения этих исследований подробно рассмотрены в работах [1, 2]. Эти методы предназначены для определения функций пересчета $\xi_0 = \varphi(\xi_*)$ между наработками, полученными до отказа в нормальном ε_0 и форсированном ε_* режимах. Основным недостатком применяемых методов является необходимость испытаний не только в переменном $\widetilde{\varepsilon}$, но и в постоянном (как правило, ε_0) режиме, что приводит к большим временны́м и материальным затратам. В настоящей работе предложен новый метод проведения предварительных исследований и обработки их результатов, позволяющий значительно сократить эти затраты.

Постановка задачи. Рассмотрим испытания $N = 2n$ образцов, случайным образом разбитых на n пар. Обозначим $\left(\xi_1^i, \xi_2^i\right)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, — наработки, полученные до отказа в режиме ε_0, образцов i-й пары (неизвестные). Пусть $F_0(x)$ — функция распределения наработок в режиме ε_0. Переменный режим реализуется следующим образом: изделия испытываются в режиме ε_0 и при отказе одного из образцов i-й пары оставшийся годным начинает испытываться в форсированном режиме ε_*. Результатом испытаний являются n пар наработок $\left(\theta_i, \gamma_i\right)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где $\theta_i = \min\left(\xi_1^i, \xi_2^i\right)$, γ_i — наработка в режиме ε_* образца, оставшегося годным в i-й паре, полученная от момента переключения в этот режим до отказа.

Вторая выборка изделий объемом m испытывается в постоянном режиме ε_0. Обозначим $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ моменты отказов элементов выборки.

Задача, которую необходимо решить исходя из результатов этих испытаний, состоит в определении зависимости

$$\xi_0 = \varphi(\xi_*), \tag{1}$$

где $\varphi(x)$ — функция связи между наработками до отказа одного и того же изделия в режимах ε_0 и ε_*.

На практике $\varphi(x)$, как правило, линейна: $\varphi(x) = kx$; $k > 1$ — коэффициент ускорения форсированного режима.

В условиях нестабильного производства, когда распределение наработок до отказа может изменяться от партии к партии, Г.Д. Карташовым был доказан следующий результат [2]: соотношение (1) эквивалентно тому, что величины $\eta_i = \theta_i + \varphi(\gamma_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, являются наработками до отказа в режиме ε_0 изделий, испытывавшихся в обоих режимах, т.е. $\eta_i = \max\left(\xi_1^i, \xi_2^i\right)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Следствием этого является то, что объединенная выборка $Q = \left(\theta_1, \eta_1, \theta_2, \eta_2, \ldots, \theta_n, \eta_n\right)$ извлечена из совокупности H с функцией распределения $F_0(x)$. Таким образом, справедливость равенства (1) эквивалентна однородности выборок Q и Y, которую можно проверить, например, с помощью критерия Смирнова (или любого другого критерия однородности).

С другой стороны, независимо от справедливости равенства (1) выборка $\Theta = \left(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\right)$ также может рассматриваться как извлеченная из совокупности H, хотя она является цензурированной [3]. В данном случае отказы θ_i одновременно являются и моментами цензурирования — оставшееся годным изделие снимается с испытаний в режиме ε_0. Следовательно, можно проверить справедливость равенства (1), сравнивая выборочные характеристики, вычисленные по разным выборкам Q и Θ. В этом случае отпадает необходимость испытаний в режиме ε_0, что приводит к резкому сокращению всего объема предварительных исследований.

Пусть $P_0(t) = 1 - F_0(t)$ — функция надежности в режиме ε_0. Обозначим $d_1(t)$, $d_2(t)$ количества элементов выборок Θ и Q соответственно, меньших t. Очевидно, $d_1(t) \le d_2(t)$. Тогда оценки, полученные по этим выборкам, имеют вид

$$\widehat{P}_Q(t) = \frac{2n - d_2(t)}{2n};$$
$$\widehat{P}_\Theta(t) = \begin{cases} 1 \ \text{при} \ d_1(t) = 0, \\ \prod\limits_{i=1}^{d_1(t)} \left(1 - \dfrac{1}{2n - 2i + 2}\right) \ \text{при} \ 1 \leqslant d_1(t) \leqslant n - 1, \\ 0 \ \text{при} \ d_1(t) = n. \end{cases} \tag{2}$$

Оценка $\widehat{P}_\Theta(t)$ называется оценкой Каплана–Мейера функции $P_0(t)$ по цензурированным данным [3, 4]. Иногда не выделяют отдельно случай $d_1(t) = n$ и считают $\widehat{P}_\Theta(t)$ по общей формуле при $d_1(t) \neq 0$, однако в данном случае выкладки существенно упрощаются при введенном $\widehat{P}_\Theta(t)$.

Для проверки (1) предлагается статистика вида

$$T_{2n} = \max_{0 \leqslant t < \infty} S_{2n}(t) = \max_{0 \leqslant t < \infty} \frac{\widehat{P}_Q(t)}{(\widehat{P}_Q(t))^2 + (1 - \widehat{P}_Q(t))^2} \left| \widehat{P}_\Theta(t) - \widehat{P}_Q(t) \right|. \quad (3)$$

Статистика (3) является аналогом статистики Смирнова применительно к рассматриваемой проблеме, при этом с ее помощью проверяется однородность двух выборок, хотя они не являются независимыми и, кроме того, одна из них — прогрессивно цензурируемая выборка.

Точные распределения. Заметим, прежде всего, что распределение статистики (3) не зависит от вида $F_0(t)$, так как значения $S_{2n}(t)$ полностью определяются взаимным расположением элементов выборки Q, т.е. распределение инвариантно относительно любого монотонно возрастающего преобразования. Будем в дальнейшем считать, что $F_0(t) = t,\ \ 0 \le t \le 1$. Отсюда следует, что маргинальные распределения величин θ_i, η_i равны $F_\theta(t) = 2t - t^2,\ \ F_\eta(t) = t^2, 0 \leqslant t \leqslant 1$.

Пусть $v_1 < v_2 < \ldots < v_{2n}$ — вариационный ряд выборки Q,

$$z_i = \begin{cases} 1, & \text{если} \ \ v_i \ \text{— один из минимумов}, \\ 0, & \text{если} \ \ v_i \ \text{— один из максимумов}, \end{cases}$$

$$v_i = \sum_{j=1}^{i} z_j, \ \ i = 1, 2, \ldots, 2n.$$

Вектор $z = \left(z_1, z_2, \ldots, z_{2n}\right)$ будем называть допустимым, если он состоит из n нулей и n единиц и выполняются неравенства $\frac{i}{2} \leqslant v_i \leqslant$ $\leqslant \min(i, n), \ \ i = 1, 2, \ldots, 2n$. Очевидно, что результатом эксперимента могут быть только допустимые векторы. В работе [5] доказана следующая лемма.

Лемма 1. *При справедливости равенства (1) распределение вектора z имеет вид*

$$p(z) = \frac{2^n n!}{(2n)!} \left(r_1 - 1\right) \left(r_2 - 3\right) \ldots (r_n - 2n + 1) = \frac{2^n n!}{(2n)!} \prod_{j=1}^{n} \left(r_j - 2j + 1\right),$$

где r_j — номер (ранг) j-го нуля в z, $\ 2 \le r_1 < r_2 < \cdots < r_n = 2n$.

Чтобы найти точное распределение статистики (3), рассмотрим следующую модель случайного блуждания.

Пусть $\left\{a_{ij}\right\} = A, \ i = 0, 1, \ldots, n, \ j = 0, 1, \ldots, i,$ — двумерный массив ячеек (имеющий треугольный вид). Частица начинает блуждание из ячейки a_{00} и на k-м шаге переходит из $a_{v_{k-1}, k-1-v_{k-1}}$ в ячейку $a_{v_k, k-v_{k-1}}$.

На $2n$-м шаге она заканчивает блуждание в ячейке a_{nn}. Появление единицы в z соответствует скачку частицы вниз, появление нуля — ее скачку вправо. Присвоим каждой траектории ω частицы вероятность $p(\omega)$, равную вероятности соответствующего z.

Пусть $A_0 \subset A$ — произвольный подмассив.

Теорема 1. *Вероятность невыхода траектории из A_0 равна величине π_{nn}, которую можно получить повторным применением соотношений*

$$\begin{aligned} &\pi_{ij} = \left(\pi_{i,j-1}\frac{2(i-j+1)}{i+j} + \pi_{i-1,j}\frac{j}{i+j}\right)\chi_{ij}(A_0), \quad n \geqslant i > j \geqslant 0, \\ &\pi_{ii} = \pi_{i,i-1}\frac{1}{i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{4}$$

с начальными и граничными условиями

$$\pi_{00} = \chi_{00}(A_0), \qquad \pi_{i,i-1} = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{5}$$

здесь

$$\chi_{ij}(A_0) = \begin{cases} 1 & \text{при } a_{ij} \in A_0, \\ 0 & \text{при } a_{ij} \notin A_0. \end{cases}$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что вероятность каждой траектории можно представить в виде

$$p(\omega) = \prod_{k=1}^{2n}\left(\frac{2^{1-z_k}\left(k-2v_k+1\right)^{1-z_k} v_k^{z_k}}{k}\right) = \prod_{k=1}^{2n}\lambda_k(\omega). \tag{6}$$

Пусть ω_{ij} — "частичная" траектория, оканчивающаяся в a_{ij} (соответствующий вектор z содержит i единиц и j нулей на первых $i+j$ местах). Обозначим $p_{ij} = \prod\limits_{k=1}^{i+j}\lambda_k\left(\omega_{ij}\right)$. Согласно выражению (6), вероятность любой траектории частицы, совершающей скачок $a_{i-1,j} \to a_{ij}$ (или $a_{i,j-1} \to a_{ij}$), имеет множитель $j/(i+j)$ (или, соответственно, $2(i-j+1)/(i+j)$). Пусть $\pi_{ij} = \sum\limits_{\omega_{ij}} p_{ij}$. Тогда соотношения (4) следуют из того, что в a_{ij} за один шаг можно попасть только из $a_{i-1,j}$ или $a_{i,j-1}$ (при $i = j$ — только из $a_{i,j-1}$). Граничные условия обеспечивают равенство нулю вероятностей траекторий, не лежащих полностью в A_0. Теорема доказана.

Пусть $\varphi(i, j)$ — произвольная функция, определенная на множестве целочисленных пар (i, j), $0 \leq j \leq i \leq n$. Тогда справедливо

Следствие. *Имеем*

$$P\left(\max_{0\leqslant k\leqslant 2n}\varphi\left(v_k, k-v_k\right)\right) = \pi_{nn}(h),$$

где $\pi_{nn}(h)$ *определяется выражениями (4), (5) при* $A_0 = \left\{a_{ij}\,|\,\varphi(i,j) < h\right\}$.

Распределение статистики (3) теперь можно получить как частный случай данного следствия. Поскольку при прохождении траектории через a_{ij} функция $S_{2n}(t)$ принимает одно из значений

$$S_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ при } i = j = 0, \\ \dfrac{2n(2n-i-j)}{(2n-i-j)^2+(i+j)^2}\left|\prod_{k=1}^{i}\left(1-\dfrac{1}{2n-2k+2}\right)-\dfrac{2n-i-j}{2n}\right| \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } 0 \leqslant j \leqslant i \leqslant n-1, \\ \dfrac{(n-j)^2}{(n-j)^2+(n+j)^2} \text{ при } i = n, \end{cases}$$

то $P\left(\max\limits_t S_{2n}(t) < h\right) = P\left(\max\limits_k S_{\nu_k, k-\nu_k} < h\right)$.

Предложенный метод позволяет табулировать точные распределения для очень больших объемов выборок. В частности, проводились расчеты достигаемых уровней значимости для $n = 1000\ldots1500$. Время расчета на ПЭВМ Celeron-1000 для таких объемов не превышало 20 с.

Предельное распределение. Рассмотрим сначала случайный процесс $X_n(t) = \widehat{P}_\Theta(t) - \widehat{P}_Q(t)$, $0 \leqslant t < 1$. Для удобства выкладок выразим $\widehat{P}_\Theta(t)$ через гамма-функцию. Нетрудно получить

$$\widehat{P}_\Theta(t) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-d_1(t)+1\right)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-d_1(t)\right)} \text{ при } 0 \leqslant d_1(t) \leqslant n-1, \\ 0 \text{ при } d_1(t) = n. \end{cases}$$

Вычислим среднее и функцию ковариации $X_n(t)$. Легко проверить справедливость равенства

$$\sum_{j=0}^{[\beta]+1} \frac{\Gamma(\beta+2)}{\Gamma(\beta+2-j)\,\Gamma(j+1)} t^j (1-t)^{\beta-j+1} = 1 - I_t\left([\beta]+2, \{\beta\}\right), \qquad (7)$$

где $[\beta]$, $\{\beta\}$ — целая и дробная части β;

$$I_t(\lambda,\mu) = \frac{1}{B(\lambda,\mu)} \int_0^t \tau^{\lambda-1}(1-\tau)^{\mu-1}\,d\tau$$

— неполная функция Пирсона; $B(\lambda,\mu)$ — бета-функция [6].

Тогда, полагая $\beta = n - 3/2$, получим

$$
\begin{aligned}
EX_n(t) &= E\widehat{P}_\Theta(t) - E\widehat{P}_Q(t) = \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n-i+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-i\right)} C_n^i \left(2t-t^2\right)^i (1-t)^{2(n-i)} - \\
&- (1-t) = (1-t)\left(1 - I_{t_1}\left(n, \frac{1}{2}\right)\right) - (1-t) = -(1-t) I_{t_1}\left(n, \frac{1}{2}\right),
\end{aligned}
$$

где $t_1 = 2t - t^2$.

Пусть $0 \le s \le t < 1$. Имеем

$$
EX_n(s)X_n(t) = E\widehat{P}_\Theta(s)\widehat{P}_\Theta(t) - E\widehat{P}_\Theta(s)\widehat{P}_Q(t) - E\widehat{P}_\Theta(t)\widehat{P}_Q(s) - E\widehat{P}_Q(s)\widehat{P}_Q(t).
$$

Опуская громоздкие преобразования и используя несколько раз равенство (7), выпишем окончательный результат для каждого слагаемого:

$$
E\widehat{P}_\Theta(s)\widehat{P}_\Theta(t) = \frac{1-t}{B^2\left(n, \frac{1}{2}\right)} \Lambda(n) - \frac{(1-t)\, s_1 (n-1)}{nB^2\left(n, \frac{1}{2}\right)} \Lambda(n-1),
$$

где

$$
\Lambda(k) = \iint_D e^{-k(x+y)} \frac{dx\, dy}{\sqrt{(1-e^{-y})(1-e^{-x})\left(1 - s_1 e^{y}\right)}},
$$

$$
D = \left\{ (x,y) \middle|\ 0 \leqslant y \leqslant \ln s_1,\ \ 0 \leqslant x \leqslant -\ln\left(1 - \frac{(1-t_1)}{(1-s_1)}\left(1 - s_1 e^{y}\right)\right) \right\},
$$

$$
s_1 = 2s - s^2;
$$

$$
E\widehat{P}_\Theta(s)\widehat{P}_Q(t) = (1-t)\left(I_{1-s_1}\left(n, \frac{1}{2}\right) - s\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)}{n} I_{1-s_1}\left(n-1, \frac{1}{2}\right) \right);
$$

$$
E\widehat{P}_\Theta(t)\widehat{P}_Q(s) = (1-t)\left(I_{1-t_1}\left(n, \frac{1}{2}\right) - s\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)}{n} I_{1-t_1}\left(n-1, \frac{1}{2}\right) \right);
$$

$$E\widehat{P}_Q(s)\widehat{P}_Q(t) = (1-t)(1-s)\left(1+\frac{s}{2n(1-s)}\right).$$

Исследуем изменение моментов при $n \to \infty$. Асимптотическое разложение $\Lambda(n)$ получаем стандартным способом: разлагается по степеням x, y функция-множитель при экспоненте и для каждого слагаемого соответствующий член разложения вычисляется интегрированием по I-му квадранту плоскости (в данном случае точкой максимума является граничная точка — начало координат) [6].

Имеем

$$\Lambda(n) \sim \frac{\pi}{\sqrt{1-s_1}}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{4n^2(1-s_1)}+\frac{8s_1+1}{32n^3(1-s_1)^2}+O_{s_1}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right).$$

Учитывая также асимптотическое разложение для $\dfrac{1}{B^2(n,1/2)}$, которое легко определить из разложения $\dfrac{1}{B(n,1/2)}$ [7], получим, что

$$E\widehat{P}_\Theta(s)\widehat{P}_\Theta(t) \sim (1-s)(1-t)\left(1+\frac{s_1}{4n(1-s_1)}+\right.$$
$$\left.+\frac{s_1^2}{32n^2(1-s_1)^2}+o_{s_1}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Для $E\widehat{P}_\Theta(s)\widehat{P}_Q(t)$ и $E\widehat{P}_\Theta(t)\widehat{P}_Q(s)$ разложения одинаковы, поскольку

$$\int_0^{1-s_1} x^{n-1}(1-x)^{-1/2}dx = \int_0^{-\ln s_1} e^{-nz}\frac{(1-se^{-z})}{\sqrt{1-e^{-z}}}dz$$

и асимптотика не зависит от ненулевого верхнего предела. Получим

$$E\widehat{P}_Q(s)\widehat{P}_\Theta(t) \sim (1-s)(1-t)\left(1+\frac{s}{2n(1-s)}+O_s\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Для слагаемого $E\widehat{P}_\Theta(s)\widehat{P}_\Theta(t)$ очевидным образом справедливо равенство

$$E\widehat{P}_Q(s)\widehat{P}_Q(t) = (1-s)(1-t)\left(1+\frac{s}{2n(1-s)}\right).$$

Разложение для $EX_n(t)$ имеет вид

$$EX_n(t) \sim (1-t)\left(\frac{O}{\sqrt{n}}+\frac{O}{\sqrt{n^3}}+\dots\right) \to 0.$$

Тогда окончательно, сохраняя члены до порядка $1/n$ включительно, получим

$$K_n(s,t) = EX_n(s)X_n(t) - EX_n(s)EX_n(t) \sim$$
$$\sim (1-t)(1-s)\left(\frac{s^2}{4n(1-s)^2} + o_s\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Рассмотрим процесс $Y_n(t) = 2\sqrt{n}X_n(t)$, $0 \leqslant t < 1$.

Утверждение. *Конечномерные распределения $Y_n(t)$ сходятся к гауссовским распределениям.*

Доказательство. Проведем доказательство для одномерных распределений. В результате испытаний одной пары образцов возможны три исхода:

$$A_1 = (\max(\xi_1,\xi_2) < t),\ \ A_2 = (\min(\xi_1,\xi_2) < t, \quad \max(\xi_1,\xi_2) > t),$$
$$A_3 = (\min(\xi_1,\xi_2) > t).$$

Обозначим ν_1, ν_2, ν_3 количество появлений A_1, A_2, A_3 соответственно для n пар. Тогда, согласно центральной предельной теореме для полиномиального распределения, вектор $\overline{\nu} = (\nu_1, \nu_2)$ имеет асимптотически нормальное распределение, причем

$$\frac{\nu_1 - nt^2}{\sqrt{nt^2(1-t^2)}} \sim N(0,1),\ \ \frac{\nu_2 - 2nt(1-t)}{\sqrt{2nt(1-t)(1-2t+2t^2)}} \sim N(0,1),$$
$$\operatorname{cov}(\nu_1,\nu_2) \sim \frac{-2t^2}{\sqrt{2t(1-2t+2t^2)}}.$$

Обозначим $\varepsilon_1 = \dfrac{\nu_1 - nt^2}{\sqrt{n}}$, $\varepsilon_2 = \dfrac{\nu_2 - 2nt(1-t)}{\sqrt{n}}$. Нетрудно видеть, что значения $Y_n(t)$ можно выразить через ν_1, ν_2:

$$Y_n(t) = h_n(\nu_1,\nu_2) =$$
$$= 2\sqrt{n}\left(\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n-\nu_1-\nu_2+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-\nu_1-\nu_2\right)} - \frac{2n-2\nu_1-\nu_2}{2n}\right).$$

Применяя при $n \to \infty$ формулу Стирлинга для гамма-функции и подставляя вместо ν_1, ν_2 их представление через $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ соответственно, получим

$$h_n(\nu_1, \nu_2) =$$
$$= 2\sqrt{n}\left(\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n - nt^2 - 2nt(1-t) - \varepsilon_1\sqrt{n} - \varepsilon_2\sqrt{n} + 1\right)}{\Gamma(n+1)\Gamma\left(n - nt^2 - 2nt(1-t) - \varepsilon_1\sqrt{n} - \varepsilon_2\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right)} - \right.$$
$$\left. - \frac{2n - 2nt^2 - 2\varepsilon_1\sqrt{n} - 2nt(1-t) - \varepsilon_2\sqrt{n}}{2n}\right) \sim$$
$$\sim 2\sqrt{n}\left((1-t)\left(1 - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2(1-t)^2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) - 1 + t + \frac{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2\sqrt{n}}\right) \to$$
$$\to \frac{\varepsilon_1(1-2t) - \varepsilon_2 t}{(1-t)}.$$

Поскольку $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ сходятся к нормальным случайным величинам и предельное отображение линейно, то утверждение доказано. Опустим подробности обоснования предельного перехода.

В работе [8] для различных механизмов цензурирования доказана общая теорема о сходимости эмпирических процессов к непрерывным гауссовским процессам на множествах вида

$$\Gamma = \{t \,|\, 0 \leqslant t \leqslant T, \quad F(T) < 1\},$$

где $F(x)$ — функция распределения совокупности, из которой извлечена выборка. В данном случае это означает, что распределение $Y_n(t)$ слабо сходится к распределению гауссовского процесса $Y(t)$ такого, что

$$EY(t) = 0, \quad EY(s)Y(t) = \frac{s^2}{(1-s)}(1-t), \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T < 1.$$

Опуская довольно громоздкие доказательства, приведем лишь общую схему вывода предельного распределения.

Лемма 2. *Случайный процесс* $\dfrac{\widehat{P}_Q(t)}{\left(1 - \widehat{P}_Q(t)\right)^2 + \left(\widehat{P}_Q^2(t)\right)}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, *с вероятностью* 1 *равномерно сходится к функции* $\lambda(t) = \dfrac{1-t}{(1-t)^2 + t^2}$.

Доказательство леммы очевидно в силу теоремы Гливенко и равномерной непрерывности функции $\lambda(t)$ на отрезке [0,1].

Рассмотрим случайный процесс $R_{2n}(t) = 2\sqrt{n}S_{2n}(t)$, $0 \leqslant s \leqslant t < 1$. В силу общих теорем сходимости (см., например, работу [9, теорема 5.5]) предельное распределение $R_{2n}(t)$ совпадает с распределением процесса

$R(t) = \lambda(t)Y(t)$. Имеем

$$ER(t) = 0, \;\; ER(s)R(t) = \frac{(1-s)(1-t)}{((1-s)^2+s^2)((1-t^2)+t^2)} \frac{s^2}{(1-s)}(1-t) = \\ = \frac{s^2}{(1-s)^2+s^2} \frac{(1-t)^2}{(1-t)^2+t^2}.$$

Теорема 2. *Предельным распределением случайной величины* $2\sqrt{n}T_{2n}$ *является стандартное распределение Колмогорова–Смирнова*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(2\sqrt{n}T_{2n} < x\right) = P(\sup|R(t)| < x) = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-2k^2x^2}.$$

Доказательство. Рассмотрим строго возрастающее преобразование $\tau = \dfrac{t^2}{(1-t)^2+t^2}$: $[0,1] \to [0,1]$. Пусть $t(\tau)$ — обратное преобразование. Введем процесс $W(\tau) = R(t(\tau))$. Имеем

$$EW(\tau) = 0, \;\; EW(u)W(v) = ER(t(u))R(t(v)) = \\ = \frac{t^2(u)}{(1-t(u))^2+t^2(u)} \frac{(1-t(v))^2}{(1-t(v))^2+t^2(v)} = \\ = u\left(1 - \frac{t^2(v)}{(1-t(v))^2+t^2(v)}\right) = u(1-v), \;\; 0 \leqslant u \leqslant v < 1.$$

Следовательно, $W(\tau)$ — стандартный броуновский мост. Очевидным образом доопределяя $R(t)$ на отрезке $[T, 1]$ через $W(\tau)$, получим, что $R(t)$ — процесс, полученный из $W(\tau)$ простым изменением времени. В силу того, что функционал $\sup R(t)$ инвариантен относительно подобных преобразований, получим требуемый результат.

Таким образом, статистика (3) имеет известное предельное распределение, что значительно упрощает ее использование. Следует, однако, заметить, что точное распределение можно удовлетворительно для практики аппроксимировать асимптотическим начиная с $n = 50\ldots55$ (расчеты были проделаны А. Антоновой, за что автор приносит ей благодарность).

Метод троек. Во многих задачах (анализ регрессионных зависимостей, проверка автомодельности форсированных режимов и др.) требуется сравнить наработки, полученные в нескольких режимах. Рассмотрим случай двух форсированных режимов: $\varepsilon_*^1, \varepsilon_*^2$.

Обозначим ξ_*^1, ξ_*^2 наработки, полученные до отказа в режимах $\varepsilon_*^1, \varepsilon_*^2$ соответственно. Предположим, что справедлива система равенств

$$\xi_0 = \varphi_1(\xi_*^1), \ \ \xi_0 = \varphi_2(\xi_*^2), \tag{8}$$

где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ — известные функции.

Справедливость соотношений (8) можно проверить, используя предыдущие результаты. Предлагается, однако, другая организация испытаний, дающая преимущество во времени их проведения.

Пусть выборка объема $N = 3n$ разбита на n троек. Обозначим $(\xi_1^i, \xi_2^i, \xi_3^i)$ наработки, полученные до отказа в режиме ε_0, образцов i-й тройки (неизвестные). Испытания начинаются в режиме ε_0, и при отказе образца в i-й тройке испытания двух оставшихся годными образцов переключаются в режимы ε_*^1 и ε_*^2 соответственно. Результатом испытаний являются n троек $(\theta_1^i, \theta_2^i, \theta_3^i)$ наработок, полученных соответственно в режимах $\varepsilon_0, \varepsilon_*^1, \varepsilon_*^2$ (очевидно, что $\theta_1^i = \min(\xi_1^i, \xi_2^i, \xi_3^i)$). Как и при проверке справедливости равенства (1), в случае справедливости системы равенств (8) объединенная выборка Q величин $(\theta_1^i, \eta_i, \tau_i)$, где $\eta_i = \theta_1^i + \varphi_1(\theta_2^i)$, $\tau_i = \theta_1^i + \varphi_2(\theta_3^i)$, извлечена из совокупности с функцией распределения $F_Q(t)$.

Пусть $\Theta = (\theta_1^1, \ldots, \theta_1^n)$. Обозначим $\mu(t), \nu(t)$ количество элементов выборок Θ, Q соответственно, меньших t. При таком проведении испытаний оценками функции надежности по выборкам Θ, Q будут статистики

$$\widehat{P}_\Theta(t) = \begin{cases} 1 \ \text{ при } \ \mu(t) = 0, \\ \prod\limits_{j=1}^{\mu(t)} \left(1 - \dfrac{1}{3n-3j+3}\right) \text{ при } 1 \leqslant \mu(t) \leqslant n-1, \\ 0 \ \text{ при } \ \mu(t) = n; \end{cases}$$

$$\widehat{P}_Q(t) = 1 - \frac{\nu(t)}{N}.$$

Для проверки однородности выборок Θ, Q предлагается статистика

$$T_n^1 = \max_t \frac{(\widehat{P}_Q(t))^2}{1 - 3(\widehat{P}_Q(t))^2(1 - \widehat{P}_Q(t)} \left| \widehat{P}_\Theta(t) - \widehat{P}_Q(t) \right|. \tag{9}$$

При выполнении равенств (8) для распределения статистики (9) справедливы теоремы, аналогичные теоремам для T_n. Приведем их без доказательства, так как они во всем подобны доказательствам предыдущих теорем.

Пусть $\upsilon_1 < \upsilon_2 < \ldots < \upsilon_{3n}$ — вариационный ряд выборки Q,

$$z_i = \begin{cases} 1, \ \text{ если } \ \upsilon_i \ \text{ — один из } \theta_1^j, \\ 0 \ \text{ в противном случае}, \end{cases} \qquad v_i = \sum_{j=1}^{i} z_j, \ \ i = 1, 2, \ldots, 3n.$$

Вектор $z = \left(z_1, z_2, \ldots, z_{3n}\right)$ будем называть допустимым, если $\left[\dfrac{i-1}{3}\right] + 1 \le V_i \le \min(i, n)$, $i = 1, 2, \ldots, 3n$. Очевидно, что результатом эксперимента могут быть только допустимые векторы.

Лемма 3. *При справедливости системы равенств (8) распределение вектора z имеет вид*

$$p(z) = \frac{3^n n!}{(3n)!}\left(2r_1 - 2\right)\left(2r_2 - 5\right)\ldots\left(2r_n - 3n + 1\right) = \\ = \frac{3^n n!}{(3n)!}\prod_{j=1}^{2n}\left(2r_j - 3j + 1\right),$$

где r_j — номер (ранг) j-го нуля в z, $2 \le r_1 < r_2 < \cdots < r_{2n} = 2n$.

Теорема 3. *Вероятности $P(T_n^1 < h)$ равны величине $\pi_{n,2n}(h)$, которую можно получить повторным применением соотношения*

$$\pi_{ij}(h) = \begin{cases} 1, \text{ если } i = j = 0, \\ \pi_{i-1,j}(h)\dfrac{3i}{i+j}\chi(T_{ij} < h) = 3\pi_{i-1,j}(h)\chi(T_{ij} < h), \\ \qquad\qquad\qquad \text{если } j = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n, \\ \dfrac{2i - j + 1}{i + j}\pi_{i,j-1}(h)\chi(T_{ij} < h), \text{ если } j = 2i - 1,\ j = 2i, \\ \left(\pi_{i-1,j}(h)\dfrac{3i}{i+j} + \pi_{i,j-1}(h)\dfrac{2i - j + 1}{i + j}\right)\chi(T_{ij} < h) \\ \qquad\qquad\qquad \text{для остальных } i, j, \end{cases}$$

где

$$T_{ij} = \begin{cases} \dfrac{3n(3n - i - j)}{(3n)^3 - 3(3n - i - j)(i + j)^2}\left|\dfrac{3n - i - j}{3n} - \right. \\ \qquad \left. -\displaystyle\prod_{k=1}^{i}\left(1 - \dfrac{1}{3n - 3k + 3}\right)\right|, \text{ если } i < n, \\ \dfrac{3n(2n - j)}{(3n)^3 - 3(2n - j)(n + j)^2}\left|\dfrac{2n - j}{3n}\right|, \text{ если } i = n, \end{cases}$$

$\chi(T_{ij} < h)$ — *индикатор события* $(T_{ij} < h)$. Этот метод, как и в случае одного форсированного режима, позволяет вычислять точные распределения практически для любых объемов выборок n.

Предельное распределение статистики (9) определяется следующей теоремой.

Теорема 4. *Предельное распределение статистики $3\sqrt{n}T_n^1$ является стандартным распределением Колмогорова–Смирнова:*

$$\lim P(3\sqrt{n}T_n^1 < h) = P(\sup|R_1(t)| < h) = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty}\exp(-2k^2h^2),$$

*где $R_1(t)$ — нормальный случайный процесс с $ER_1(t) = 0,\ ER_1(s)R_1(t) =$
$= \dfrac{s^2(3-2s)}{(1-s)^3+s^2(3-2s)}\dfrac{(1-t)^3}{(1-t)^3+t^2(3-2t)},\ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1.$*

Результаты моделирования. Для проверки эффективности применения статистики T_{2n} при оценке функций связи $\xi_0 = \varphi(\xi_*)$ был использован метод Монте-Карло. Оценивался коэффициент ускорения k в функции связи $\xi_0 = k\xi_*$. Моделировались n пар (ξ_1^i, ξ_2^i) одинаково распределенных случайных величин, по которым вычислялись n векторов (θ_i, γ_i) , где $\theta_i = \min(\xi_1^i, \xi_2^i)$, $\gamma_i = (\max(\xi_1^i, \xi_2^i) - \min(\xi_1^i, \xi_2^i))/k_0$, k_0 — заданное число. Случайные величины ξ_j^i моделировались по экспоненциальному закону с параметром $\lambda = 10^{-4}$. Эксперимент предусматривал возможность цензурирования испытаний временем $\delta_{(r)}$ — r-й порядковой статистикой из $\delta_i = \theta_i + \gamma_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Величины δ_i — это общая длительность испытаний i-й пары. По этим данным оценивался коэффициент ускорения k по формуле $\widehat{k} = \arg\min T_{2n}(k)$. При $r < n$ значения статистики $T_{2n}(k)$ вычислялись в промежутке $0 \leqslant t \leqslant \delta_{(r)}$. В таблице приведены значения отношения $\rho = \overline{k}/k_0$, где $\overline{k} = \dfrac{1}{500}\sum_{i=1}^{n}\widehat{k}_i$ — среднее по пятистам реализациям оценок $\widehat{k}$ для каждого набора (n, r). Анализ результатов моделирования показал, что при $n > 20$ оценка $\widehat{k}$ имеет незначительное положительное смещение, которое постепенно уменьшается при увеличении r.

n	r	Значения k_0			n	r	Значения k_0		
		3	4	5			3	4	5
20	15	1,1313	1,1312	1,0912	44	42	1,0491	1,0261	1,0388
	17	1,0950	1,1285	1,0921		44	1,0390	1,0249	1,0286
	19	1,0982	1,1419	1,0987	48	36	1,0594	1,0705	1,0503
	20	1,1097	1,1097	1,0820		39	1,0577	1,0288	1,0794
24	18	1,1030	1,1249	1,0820		41	1,0343	1,0523	1,0343
	20	1,0837	1,1545	1,1089		43	1,0030	1,0472	1,0374
	22	1,0740	1,0900	1,0811		45	1,0645	1,0220	1,0440
	24	1,0462	1,0589	1,0367		48	1,0266	1,0073	1,0040

n	r	Значения k_0			n	r	Значения k_0		
		3	4	5			3	4	5
28	22	1,1091	1,1173	1,1030	52	39	1,0639	1,0415	1,0604
	24	1,0309	1,0950	1,0508		42	1,0434	1,0760	1,0616
	26	1,0904	1,0583	1,1004		45	1,0229	1,0387	1,0416
	28	1,0732	1,0883	1,0408		48	1,0388	1,0191	1,0233
32	24	1,0774	1,0778	1,0895		51	1,0248	1,0171	1,0187
	27	1,0929	1,0754	1,0707		52	1,0164	1,0390	1,0302
	30	1,0267	1,0502	1,0572	56	42	1,0710	1,0644	1,0391
	32	1,0826	1,0746	1,0262		45	1,0383	1,0393	1,0502
36	27	1,0690	1,0940	1,0476		47	1,0210	1,0293	1,0325
	29	1,0389	1,1069	1,0793		50	1,0349	1,0308	1,0403
	31	1,0401	1,0483	1,0645		53	1,0420	1,0065	1,0341
	33	1,0470	1,0848	1,0528		56	1,0337	1,0203	1,0134
	35	1,0259	1,0793	1,0274	60	45	1,0529	1,0421	1,0596
	36	1,0106	1,0611	1,0018		48	1,0349	1,0459	1,0500
40	30	1,0620	1,0529	1,0661		52	1,0259	1,0228	1,0423
	32	1,0454	1,0408	1,0808		55	1,0290	1,0391	0,9995
	34	1,0296	1,0717	1,0400		57	1,0343	1,0064	1,0304
	36	1,0484	1,0486	1,0259		60	1,0143	1,0043	0,9937
	38	1,0076	1,0508	1,0161	64	48	1,0399	1,0554	1,0220
	40	1,0310	1,0245	1,0228		52	1,0288	1,0564	1,0322
44	33	1,0561	1,0557	1,0628		55	1,0388	1,0210	1,0182
	35	1,0328	1,0580	1,0563		59	1,0345	1,0139	1,0428
	37	1,0112	1,0549	1,0739		62	1,0192	1,0122	1,0229
	39	1,0242	1,0349	1,0683		64	1,0148	1,0239	1,0111

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карташов Г. Д. Основы теории форсированных испытаний. – М.: Знание, 1977. – 52 с.
2. Карташов Г. Д. Установление связей между ненаблюдаемыми одновременно случайными величинами // Применение теории вероятностей и математической статистики. – 1981. – № 4. – С. 18–29.
3. Кокс Д., Оукс Д. Анализ данных типа времени жизни. – М.: Финансы и статистика, 1988. – 191 с.
4. Скрипник В. М., Назин А. Е. и др. Анализ надежности систем по цензурированным данным. – М.: Радио и связь, 1988. – 184 с.
5. Тимонин В. И. О точных распределениях некоторых ранговых критериев // Труды МВТУ им. Н.Э. Баумана. – 1983. – № 396. – С. 25–33.
6. Брейн, де Н. Г. Асимптотические методы в анализе. – М.: Ин. лит., 1961. – 248 с.
7. Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. – М.: Наука, 1990. – 528 с.
8. Breslow N., Crowley J. A large sample study of the life table and product limit estimates under random censorship // Annals of statist. – 1974. – № 2. – P. 437–453.
9. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 352 с.

Статья поступила в редакцию 29.05.2003