Владимир Иванович Тимонин родился в 1952 г., окончил в 1975 г. Московский институт электронного машиностроения. Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Высшая математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 26 научных работ в области теории надежности и математической статистики.

V.I. Timonin (b. 1952) graduated from the Moscow Institute for Electronic Engineering in 1975. Ph. D. (Phys.-Math.), ass professor of “Higher Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 26 publications in the field of theory of reliability and mathematical statistics.

УДК 621.129.3

А. А. Борисов

ОБ ОТБОРЕ ИЗДЕЛИЙ С ПОВЫШЕННОЙ НАДЕЖНОСТЬЮ

Предложен метод отбора изделий с повышенной надежностью, основанный на использовании распределений начальных значений технических параметров и моментов отказов изделий.

Постановка задачи. В последние годы стала актуальной проблема продления срока эксплуатации изделий, уже проработавших свое установленное гарантированное время t_1. Причины этого понятны: техника стареет, и при этом возникают экономические трудности при создании ее новых образцов.

В настоящей работе предложен один из возможных методов отбора изделий из числа эксплуатированных, которые еще могут проработать в среднем требуемое время $T < t_1$.

Пусть работоспособность изделия характеризуется одним, так называемым техническим, параметром X, для которого задан нижний односторонний допуск a. Не нарушая общности рассуждений, будем считать $a = 0$, так как вместо X можно ввести другой технический параметр $Y := X - a$.

Момент времени ξ, при котором в процессе эксплуатации значение технического параметра X изделия впервые выйдет за пределы границ поля допуска, т.е. $X(\xi) < 0$, называют моментом отказа изделия (в дальнейшем будем рассматривать невосстанавливаемые изделия).

Обозначим

$$Q(t|x) := P(\xi < t|X(0) = x)$$

условное распределение моментов отказов всех изделий, у которых в начальный момент времени $t = 0$ технический параметр $X(0)$ равен x.

Наложим на функцию $Q(t|x)$ два ограничения:

1) ограничение

$$M(\xi|x) := \int\limits_0^{+\infty} t dQ(t|x) \uparrow x$$

касается надежности изделия: чем дальше значение технического параметра $X(0)$ изделия от границы поля допуска, тем дольше в среднем это изделие проработает безотказно;

2) будем предполагать, что вид условного распределения $Q(t|x)$ не изменяется при эксплуатации в течение времени t_1 [1].

Пусть в течение гарантированного времени t_1 эксплуатировалось N однотипных изделий, причем $N \to \infty$ (вопросы, связанные с ограниченностью объема выборки, не рассматриваются в настоящей работе). Предположим, что по результатам эксплуатации восстановлены распределения

$$F_0(x) := P(X(0) < x), \;\; F_1(x) := P(X(t_1) < x), \;\; G(t) := P(\xi < t), \;\; t \leqslant t_1.$$

Заметим, что по маргинальным функциям $F_0(x)$ и $G(t)$ неоднозначно определяется двумерное распределение $Q(t|x)$, которое должно удовлетворять очевидному уравнению

$$\int_0^{+\infty} Q(t|x) dF_0(x) = G(t), \;\; t \leqslant t_1. \tag{1}$$

Зафиксируем некоторое значение $\overline{x} > 0$ и найдем среднюю наработку на отказ $T(\overline{x})$ всех изделий $X(t_1) \geqslant \overline{x}$, которые проработали безотказно в течение гарантированного времени t_1. В силу ограничения 2) очевидно, что

$$T(\overline{x}) = \int\limits_x^{+\infty} \int\limits_0^{t_1} t dQ(t|x) d\pi(x), \tag{2}$$

где

$$\pi(x) = \begin{cases} CF_1(x) \;\text{ при }\; x \geqslant \overline{x}, \\ 0 \;\text{ при }\; x < \overline{x}, \end{cases}$$

а коэффициент нормировки равен

$$C := \left(\int\limits_{\overline{x}}^{+\infty} dF_1(x) \right)^{-1}.$$

Таким образом, поставленная задача сводится к нахождению экстремумов функционала $T(\overline{x})$:

$$T_*(\overline{x}) = \inf_{Q\in S} T(\overline{x}), \quad T^*(\overline{x}) = \sup_{Q\in S} T(\overline{x}); \tag{3}$$

варьирование осуществляется по всем условным распределениям $Q(t|x)$ из множества S, определяемого ограничением 1) и условием (1).

Решение вариационной задачи. Согласно работе [2] для определения $T_*(\overline{x})$ необходимо найти так называемое (π, F_0)-разбиение промежутка $[\overline{x}, +\infty)$ на совокупность промежутков $\{I_\alpha^*\}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\bigcup\limits_{\alpha} I_\alpha^* = [\bar{x}, +\infty)$, причем $I_\alpha^* \cap I_\beta^* = \emptyset$, если $\alpha \neq \beta$;

2) для любого промежутка I_α^*

$$P_{F_0}(X_0 < x | X_0 \in I_\alpha^*) \geqslant P_\pi(X_0 < x | X_0 \in I_\alpha^*);$$

здесь P_{F_0} и P_π — вероятностные меры, порожденные соответственно распределениями F_0 и π;

3) условие 2) не должно выполняться для любого объединения $\bigcup\limits_{\alpha\leqslant i\leqslant\beta} I_i^*$, если оно может быть разделено на подмножества $\bigcup\limits_{\alpha\leqslant i<k} I_i^*$ и $\bigcup\limits_{k\leqslant i\leqslant\beta} I_i^*$, имеющие ненулевую меру P_{F_0}.

В качестве номера α промежутка I_α^* выбирается любое значение $\alpha \in I_\alpha^*$.

Теорема 1 [2]. *Если разбиение $\{I_\alpha^*\}$ определено, то абсолютный минимум $T_*(\overline{x})$ достигается на распределении*

$$G(t)^{\{\alpha_*,\beta_*\}} := Q_*(t|x) \equiv \begin{cases} 0 \text{ при } t < \tau_1, \\ \dfrac{G(t)-\alpha_*}{\alpha_*-\beta_*} \text{ при } \tau_1 \leqslant t < \tau_2, \\ 1 \text{ при } t > \tau_2; \end{cases}$$

здесь τ_1, τ_2 — любые решения неравенств

$$G(\tau_1+0) \geqslant \alpha, \quad G(\tau_1-0) \leqslant \alpha,$$

$$G(\tau_2+0) \geqslant \beta, \quad G(\tau_2-0) \leqslant \beta;$$

$$\alpha_* := P_{F_0}\left(\bigcup_{i<k} I_i^*\right), \;\; \beta_* := P_{F_0}\left(\bigcup_{i\leqslant k} I_i^*\right), \;\; x \in I_k^*.$$

Условимся, что $G(t)^{\{\alpha_*,\beta_*\}}$ — распределение, сосредоточенное в одной точке $t \in [\tau_1, \tau_2]$ при $\alpha_* = \beta_*$.

Для нахождения абсолютного максимума $T^*(\bar{x})$ необходимо определить другое разбиение $\{I^*_\alpha\}$ промежутка $[\bar{x}, +\infty)$, удовлетворяющее условиям 1)—3), в условии 2) знак неравенства изменить на обратный, а затем воспользоваться теоремой 1.

В дальнейшем будут полезны следующие теоремы.

Теорема 2 [2]. *Пусть $f_0(x)$ и $n(x)$ — соответственно плотности вероятностей распределений $F_0(x)$ и $\pi(x)$. Если отношение*

$$\gamma(x) := \frac{n(x)}{f_0(x)}$$

является невозрастающей функцией на промежутке J, то весь этот промежуток принадлежит разбиению $\{I^*_\alpha\}$. Если $\gamma(x)$ — строго возрастающая функция в своей области определения X, то каждая точка $x \in X$ принадлежит $\{I^*_\alpha\}$.

Теорема 3 [2]. *Пусть $f_i(x)$ — плотность вероятностей распределения $F_i(x)$, $i = 0, 1$. Если отношение*

$$\gamma(x) := \frac{f_1(x)}{f_0(x)}$$

является неубывающей функцией на некотором промежутке J, то весь промежуток J принадлежит разбиению $\{I^{**}_\alpha\}$.

Пример. Рассмотрим случай, когда величины $X(0)$ и $X(t_1)$ имеют нормальный закон распределения с математическими ожиданиями m_0, m_1 и дисперсиями σ_0^2, σ_1^2 соответственно. Чтобы в начальный момент времени доля негодных изделий была очень малой, будем полагать $m_0 > 3\sigma_0$.

Рассмотрим функцию

$$\gamma(x) = \frac{1}{C}\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\exp\left\{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(x-m_0)^2}{2\sigma_0^2}\right\}$$

и найдем промежутки ее возрастания и убывания.

Если функция $\gamma(x)$ неубывающая на промежутке J, то этот промежуток целиком принадлежит разбиению $\{I^{**}_\alpha\}$. Когда функция $\gamma(x)$ строго убывающая в своей области определения X, то каждая точка $x \in X$ принадлежит $\{I^{**}_\alpha\}$.

Докажем следующее утверждение.

Лемма. *Пусть плотность вероятностей имеет вид*

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 \ \ \text{при} \ \ x < \bar{x}, \\ Cf(x) \ \ \text{при} \ \ x \geqslant x, \end{cases}$$

где $C := [1 - F_1(\overline{x})]$ — *коэффициент нормировки (см. формулу (2)). Тогда*

$$P_{\overline{F}_1}(\xi < x | I_\alpha^*) = P_{F_1}(\xi < x | I_\alpha^*), \text{ *если* } I_\alpha^* \in [\overline{x}, +\infty).$$

Доказательство. Пусть $I_\alpha^* = [a, b]$. Если $x < a$, то

$$P_{\overline{F}_1}(\xi < x | I_\alpha^*) = P_{F_1}(\xi < x | I_\alpha^*) = 0.$$

Если же $x > b$, то $P_{\overline{F}_1}(\xi < x | I_\alpha^*) = P_{F_1}(\xi < x | I_\alpha^*) = 1$.

При $x \in [a, b]$ получим

$$P_{\overline{F}_1}(\xi < x | I_\alpha^*) = \frac{\overline{F}(\xi < x, I_\alpha^*)}{P_{F_1}(I_\alpha^*)} = \frac{\overline{F}_1(x) - \overline{F}_1(a)}{\overline{F}_1(b) - \overline{F}_1(a)} =$$

$$= \frac{(F_1(x) - CF_1(a))}{(F_1(b) - CF_1(a))} = P_{F_1}(\xi < x | I_\alpha^*).$$

Лемма доказана.

Из леммы следует, что (F_1, F_0)-разбиения $\{I_\alpha^*\}$ и $\{I_\alpha^{**}\}$ удовлетворяют трем условиям $(\overline{F}_1, \overline{F})$-разбиения и принадлежат промежутку $[\overline{x}, +\infty)$.

Поскольку для решения поставленной задачи отбора изделий при $x < \overline{x}$ не требуется знания распределения $Q(t|x)$, то можно воспользоваться экстремальными распределениями $Q^*(t|x)$ и $Q^{**}(t|x)$, полученными в работе [2] для неусеченного нормального закона распределения, и записать

$$T_*(\overline{x}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda} \text{ при } \mu_0 \geqslant \mu_1, \ \ \sigma_0 = \sigma_1, \\ -\dfrac{1}{\lambda} \displaystyle\int_{\overline{x}}^{+\infty} \ln(\overline{F}_0(x)) \overline{f}_1(x) dx \text{ при } \mu_0 < \mu_1, \ \ \sigma_0 = \sigma_1. \end{cases}$$

Формулы для $T_*(\overline{x})$ и $T^*(\overline{x})$ при $\sigma_1 \geqslant \sigma_0$ вследствие их громоздкости не приводятся в настоящей работе, они приведены в работе [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. К а р т а ш о в Г. Д. Вариационный подход к задачам форсированных испытаний // Электронная техника. Сер. 8. Управление качеством и стандартизации. – 1975. – Вып. 1(31). – С. 10–19.
2. К а р т а ш о в Г. Д. О некоторых вероятностных задачах теории надежности при наличии ограничений // Теория вероятностей и ее применения. – 1969. – Т. XIV. – Вып. 4. – С. 623–638.

Статья поступила в редакцию 10.06.2003